ऐच्छिक गणित

कक्षा - 10

लेखकहरू

रमेशप्रसाद अवस्थी

रामकृष्ण लामिछाने

मञ्जु मग्राती बस्याल

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक :	नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

© पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पूरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

संस्करण :	वि.सं. २०७५

मुद्रण :

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक विकास तथा परिमार्जन गर्ने कार्यलाई निरन्तरता दिइँदै आएको छ । विद्यार्थीहरूमा राष्ट्र, राष्ट्रिय एकता र लोकतान्त्रिक संस्कारको भावना पैदा गराई नैतिकवान् अनुशासित र स्वावलम्बी, सिर्जनशील, चिन्तनशील भई समावेशी समाज निर्माणमा योगदान दिन सक्ने, भाषिक तथा गणितीय सिपका साथै विज्ञान, सूचना तथा सञ्चार प्रविधि, वातावरण, स्वास्थ्य र जनसङ्ख्या सम्बन्धी ज्ञान र जीवनोपयोगी सिपको विकास गराउनु जरुरी छ । उनीहरूमा कला र सौन्दर्य, मानवीय मूल्य मान्यता, आदर्श र वैशिष्ट्यहरूको संरक्षण, संवर्धनप्रतिको भाव जगाउन आवश्यक छ । समतामूलक समाजकको निर्माणमा सहयोग पुऱ्याउन उनीहरूमा विभिन्न जातजाति, लिङ्ग, अपाङ्गता, भाषा, धर्म, संस्कृति र क्षेत्रप्रति समभाव जगाउनु र मानव अधिकार तथा सामाजिक मूल्य मान्यताप्रति सचेत भई जिम्मेवारीपूर्ण आचरण विकास गराउनु पनि आजको आवश्यकता बनेको छ । विद्यार्थीको विशेष क्षमता उजागर गर्न ऐच्छिक विषयहरूको पनि व्यवस्था गरिन्छ । यही आवश्यकता पूर्तिका लागि माध्यमिक शिक्षा (कक्षा ९-१०) ऐच्छिक गणित विषयको पाठ्यक्रम, २०७३, शिक्षा सम्बन्धी विभिन्न आयोगका सुझाव, शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावकलगायत शिक्षासँग सम्बद्ध विभिन्न व्यक्ति सम्मिलित गोष्ठी र अन्तरक्रियाका निष्कर्षका साथै विभिन्न पृष्ठपोषणसमेतलाई आधारमानी यो पाठ्यपुस्तक तयार पारिएको हो ।

पाठ्यपुस्तकलाई यस स्वरूपमा ल्याउने कार्यमा केन्द्रका कार्यकारी निर्देशक श्री कृष्णप्रसाद काप्री, उपनिर्देशक रेणुका पाण्डे, प्रा.डा. राममान श्रेष्ठ, सहप्राध्यापक लक्ष्मीनारायण यादव, सहप्राध्यापक वैकुण्ठप्रसाद खनाल, कृष्णप्रसाद पोखरेल, गोमा श्रेष्ठ, राजकुमार माथेमा, अनिरुद्रप्रसाद न्यौपानेलगायतको विशेष योगदान रहेको छ । यस पाठ्यपुस्तकको विषयवस्तु सम्पादन हरीश पन्त, भाषा सम्पादन चिनाकुमारी निरौला, चित्राङ्कन, टाइप सेटिङ र लेआउट डिजाइन जयराम कुइँकेलबाट भएको हो । यस पाठ्यपुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ ।

पाठ्यपुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ। यसबाट विद्यार्थीले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मदत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ । यस पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी, रुचिकर र सिकारु केन्द्रित बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिस्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि.स. २०७५

विषयसूची

क्र.स.	एकाइ		पृष्ठ सङ्ख्या
1.	बीज गणित		1
	1.1	बिजीय फलन	1
	1.2	बहुपदीयहरू	22
	1.3	अनुक्रम र श्रेणी	38
	1.4	रेखीय योजना	80
	1.5	वर्ग समीकरण र लेखाचित्र	95
2.	निरन्तरता		112
3.	मेट्रिक्स		121
4.	निर्देशाङ्क ज्यामिति		137
5.	त्रिकोणमिति		168
6.	भेक्टर		218
7.	स्थानान्तरण		240
8.	तथ्याङ्कशास्त्र		262
	उत्तरमाला		289

एकाइ 1

बीज गणित (Algebra)

1.0 पुनरावलोकन (Review)

- तल दिइएका कुन कुन सम्बन्धहरू फलन हुन्, अध्ययन गरी कारण खोज्नुहोस् र छलफल गर्नुहोस् ।

  $R_1 = \{(-4, 3),(0, 3),(5, 3)\}$

  $R_2 = \{(-1, 4), (3, 7),(0, 1),(4, -3)\}$

  $R_3 = \{(8, -5), (8, 5),(1, 4)\}$

- $E(t) = 1000(100 - t) + 580(100 - t)^2$ दिइएको अवस्थामा $t_1 = 95$ र $t_2 = 100$ भए $E(t_1)$ र $E(t_2)$ को मान कति कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- N ले प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह जनाउँछ । $f: N \rightarrow N$ र $g: N \rightarrow N$ लाई $f(x) = x^3$ र $g(x) = 2x - 3$ सूत्रद्वारा परिभाषित गरिएको छ । के फलनहरू f र g, एक एक फलन *(one to one function)* हुन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- सम्पूर्ण फलन *(onto function)* र अपूर्ण फलन *(Into function)* प्रत्येकको एउटा उदाहरण लेख्नुहोस्

याद राख्नुहोस् : N, R, Q, Z ले क्रमशः प्राकृतिक सङ्ख्याहरू, वास्तविक सङ्ख्याहरू, आनुपातिक सङ्ख्याहरू र पूर्णाङ्कहरूको समूहलाई जनाउँछन् ।

माथि दिइएका मध्ये R_1 र R_2 फलनहरू हुन् । कक्षा ९ मा दिइएका फलनहरूका आधारमा हामी अन्य प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाउन सक्छौं ।

1.1 बिजीय फलन (Algebraic Function)

सिधा रेखाको समीकरण $y = 2x + 5$ मा 5 र 2 ले लेखाचित्रमा के केलाई जनाउँछन् ? लेखाचित्र खिची देखाउनुहोस् ।

सिधा रेखामा m र c को मान परिवर्तन गर्दै जाँदा $y = mx+c$ को ज्यामितीय स्वरूपमा के परिवर्तन हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

बीज गणितीय समीकरणलाई नै बिजीय फलन (Algebraic Fucntion) भनिन्छ, जसको क्षेत्र (Range) र प्रभाव क्षेत्र (Domain) परिभाषित हुन्छ ।

बीज गणितीय समीकरणहरू $f(x) = 3x + 5, g(x) = x^2 - x + 4; h(x) = x^3 + 6x + 7; p(x) = x; k(x) = 5$ आदि बीज गणितीय फलनका उदाहरणहरू हुन् । यिनीहरूको नाम सबभन्दा ठुलो घाताङ्क भएको पदका आधारमा राखिएको हुन्छ । यी फलनहरूका बारेमा निम्नअनुसार विस्तार गरिएको छ :

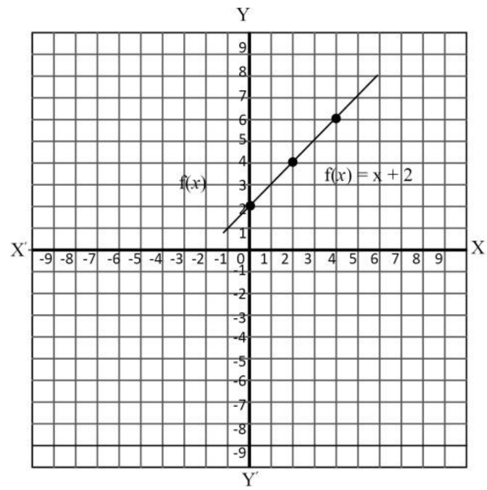
(a) **रेखीय फलन (Linear function)**

समीकरण $y = 4x + 5$ लाई लेखाचित्रमा देखाउँदा कस्तो रेखा बन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

मानौँ m र c दुई वास्तविक सङ्ख्याहरू *(Real Numbers)* छन् । $f:A \rightarrow B$ एउटा फलन छ जुन $f(x) = mx + c$ अथवा $y = mx + c$ छ । जहाँ $x \in A$ र $f(x) \in B$ अथवा $y \in B$ द्वारा परिभाषित छ ।

यसरी परिभाषित फलनलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा फलनलाई सिधा रेखाले जनाइन्छ । त्यसैले उक्त फलनको नाम रेखीय फलन राखिएको हो ।

पुन : $f(x) = mx+c$ मा $m=1$ र $c=2$ लिँदा f(x) $= x+2$ हुन जान्छ । उक्त फलनलाई लेखाचित्रमा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

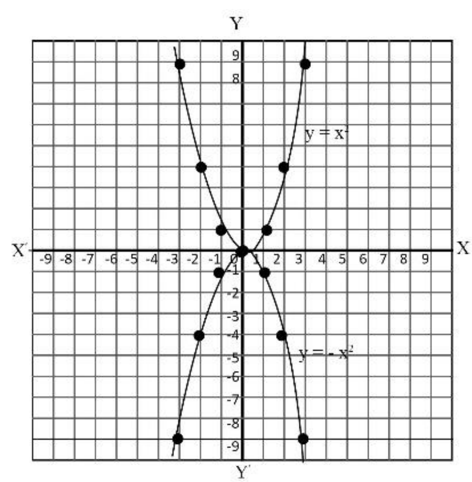


माथि दिइएको रेखीय फलन $f(x) = mx + c$ मा $m = 0$ भए $f(x) = c$ अथवा $y=c$ हुन्छ । यस्तो फलनलाई अचर फलन *(constant function)* भनिन्छ । त्यस्तै $m = 1$ र $c = 0$ भए $f(x) = x$ अथवा $y = x$ हुन्छ । यस्तो फलनलाई एकात्मक फलन *(Identity function)* भनिन्छ । यिनीहरूलाई पनि लेखाचित्रमा देखाउन सकिन्छ । उदाहरणका लागि $f(x) = 4$ एउटा अचर फलन हो भने $y - x = 0$ एकात्मक फलन हो ।

(b) **वर्गघातीय फलन (Quadratic function)**

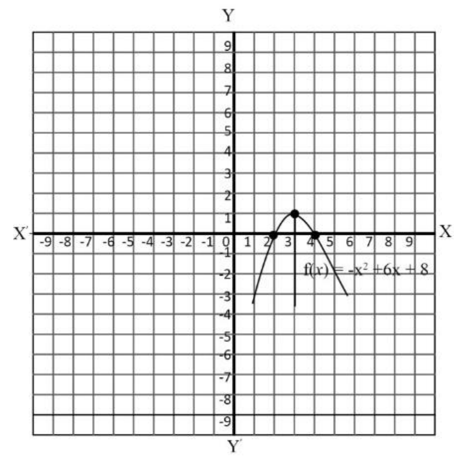
$f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ र $f(x) = 3x + 5$ मा के भिन्नता छ ? के x^2 को गुणाङ्क ऋणात्मक पनि हुन सक्छ ? छलफल गर्नुहोस् । त्यस्तै तल दिइएका चित्रहरू पनि अवलोकन गर्नुहोस् ।

मानौँ a, b र c वास्तविक सङ्ख्याहरू छन् $f : A \rightarrow B$ एउटा फलन हो जुन $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ स्वरूपमा परिभाषित छ । यसरी परिभाषित फलनलाई वर्गघातीय फलन भनिन्छ । वर्गघातीय फलनलाई स्तरीय स्वरूपमा $f(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ पनि लेख्न सकिन्छ । जहाँ $h, k \in R$ हुन्छ । यसरी परिभाषित फलनलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा बन्ने बाटोलाई पाराबोला *(parabola)* भनिन्छ जसको अक्ष ठाडो रेखा $x = h$ तथा शीर्षबिन्दु (h, k) हुन्छ । $a > 0$ दिइएको अवस्थामा वक्रको



मुख माथितिर *(upward)* र $a < 0$ दिइएको अवस्थामा वक्रको मुख तलतिर *(downward)* फर्किएको हुन्छ ।

उदाहरणका लागि $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ लाई लेखाचित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ :



यहाँ, $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ लाई स्तरीय स्वरूपमा $f(x) = -(x^2 - 6x) - 8$

$= -(x^2 - 6x + 9) + 9 - 8$

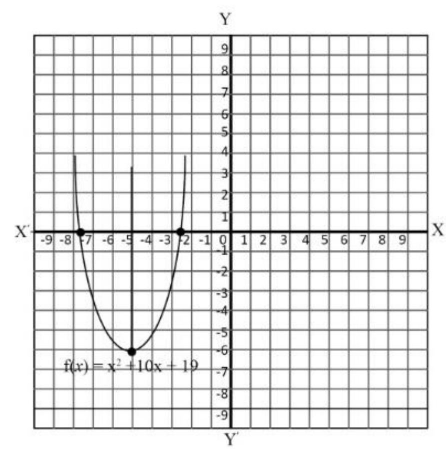
$= -(x - 3)^2 + 1$ लेख्न सकिन्छ ।

$f(x) = -x^2 + 6x - 8$ को शीर्षबिन्दु *= (3,1)* र अक्ष *x=3* हुन्छ । यहाँ वक्रको मुख तलतिर फर्किन्छ ।

त्यस्तै, $f(x) = x^2 + 10x + 19$ लाई स्तरीय स्वरूपमा लेख्दा,

$= (x^2 + 10x + 25) - 25 + 19$

$= (x + 5)^2 - 6$ हुन्छ । $f(x) = x^2 + 10x + 19$ को शीर्षबिन्दु *=(-5, -6)* र अक्ष *x = -5* हुन्छ । यहाँ वक्रको मुख शीर्षबिन्दुबाट माथितिर फर्किन्छ ।

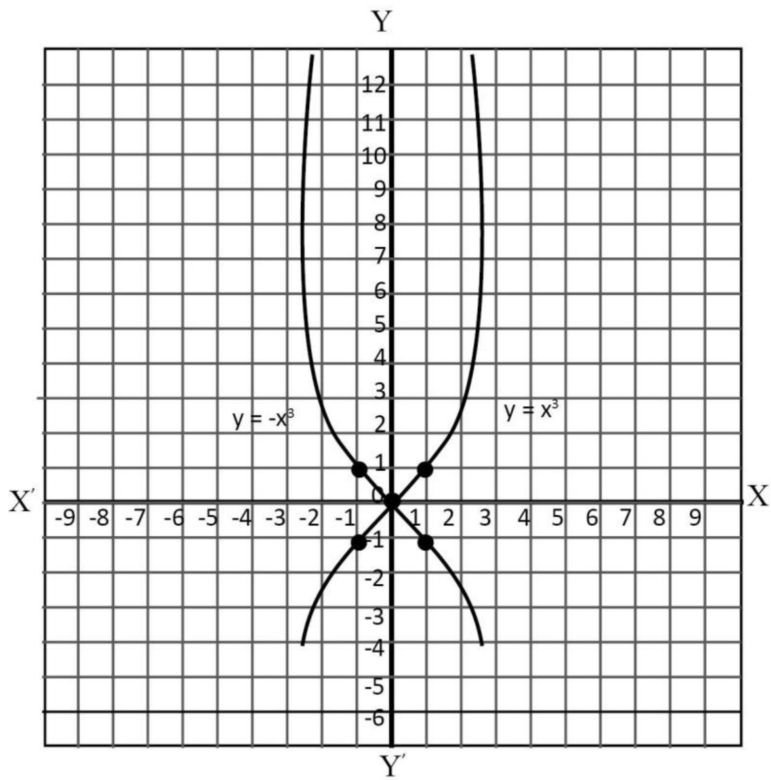


$f(x) = ax^2$ अथवा $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ को शीर्षबिन्दु सधैँ *(0,0)* र अक्ष *y-axix* हुन्छ ।

(c) घनघातीय फलन (cubic function)

फलन $y = x^3$ मा x को घात कति छ ? x^3 को गुणाङ्क कति छ ? के यसलाई लेखाचित्रमा देखाउन सकिन्छ होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

मानौँ *a, b, c* र *d* वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् । $(a \neq 0)$ का लागि परिभाषित फलन $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ लाई घनघातीय फलन भनिन्छ । यदि $b = c = d = 0$ भए उक्त फलनलाई $f(x) = ax^3$ अथवा $y = ax^3$ स्वरूपमा लेख्न सकिन्छ । यदि $f(x) = ax^3$ मा $a = 1$ र $a = -1$ लिँदा फलनहरू क्रमशः $f(x) = x^3$ र $f(x) = -x^3$ प्राप्त हुन्छन् । $f(x) = x^3$ को शीर्षबिन्दु (0,0) र उक्त शीर्षबिन्दुबाट लेखाचित्र सममितीय हुन्छ । यी फलनहरूलाई लेखाचित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ :



अभ्यास 1.1.1

1. तल दिइएका फलनहरूको उदाहरणसहित परिभाषा लेख्नुहोस् ।

(a) बीजीय फलन *(Algebraic Function)*

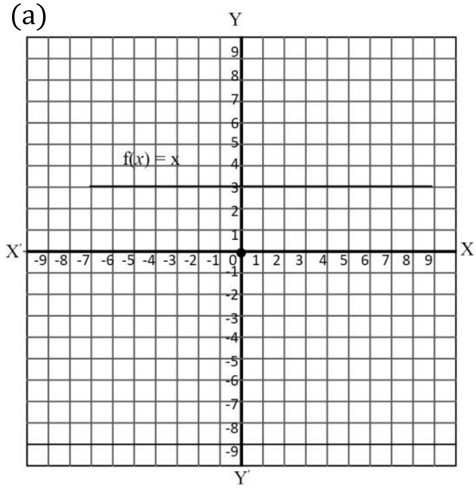
(b) रेखीय फलन *(Linear Function)*

(c) वर्गघातीय फलन *(Quadratic Function)*

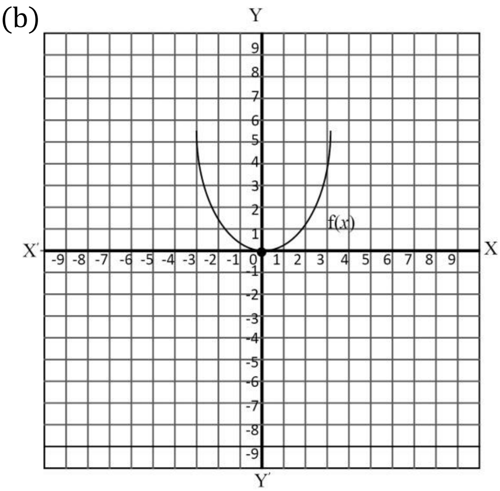
(d) घनघातीय फलन *(Cubic Function)*

2. तल दिइएका लेखाचित्रहरू रेखीय, वर्ग र घनघातीयमध्ये कुन प्रकारका फलनहरू हुन्, लेख्नुहोस् ।

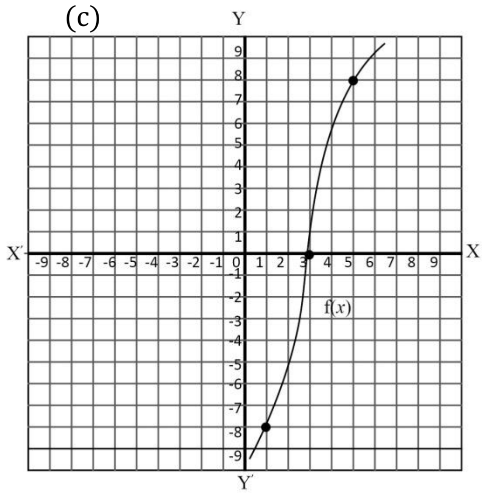
(a)



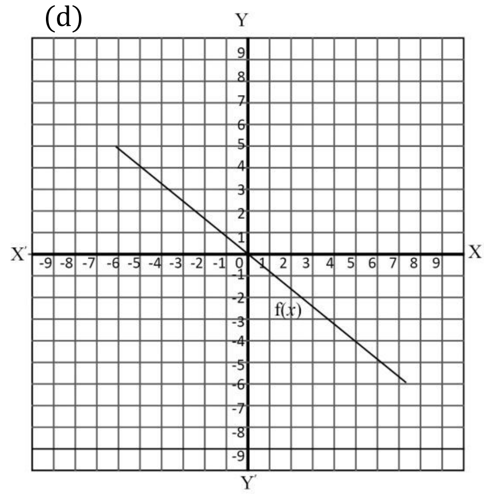
(b)



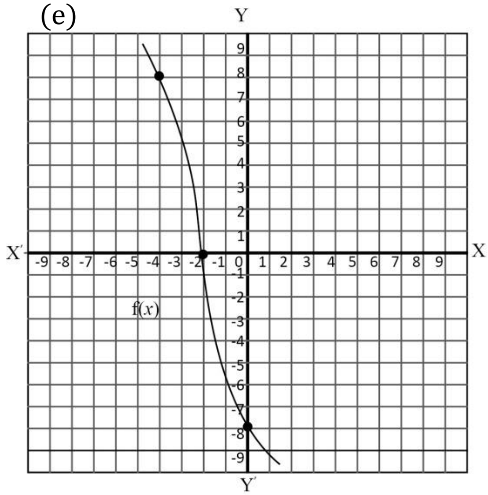
(c)



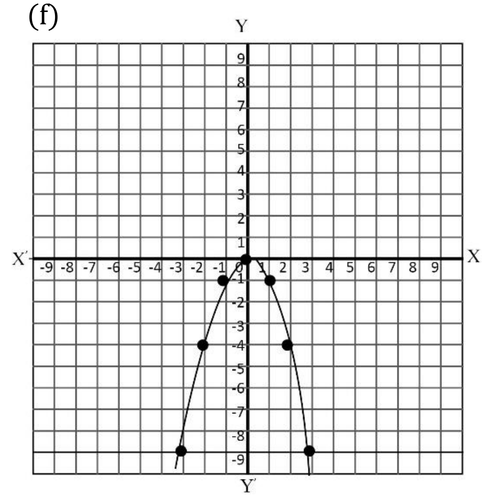
(d)



(e)



(f)



3. दुई ओटा नगरपालिकाहरूमा एक हप्तामा खपत हुने गुणस्तरीय खाना *(quality food)* को परिमाण मेट्रिक टन (x) र मूल्य रु. हजारमा *(y)* दिइएको छ ।

दुवै तथ्याङ्कहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् र कुन रेखीय फलन हो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) नगरपालिका 'क'

x	10	20	30	40	50	60	70
y	50	100	150	200	250	300	350

(b) नगरपालिका 'ख'

x	10	20	30	40	50	60	70
y	10	30	70	130	210	310	430

4. *(a)* *-5* देखि *5* सम्मका पूर्णाङ्कहरूलाई x र तिनीहरूको वर्गलाई y अथवा $f(x)$ मानी फलन $f(x) = x^2$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(b) *-4* देखि *4* सम्मका पूर्णाङ्कहरूलाई x र तिनीहरूका घन *(cube)* लाई y अथवा $g(x)$ मानी फलन $g(x) = x^3$ लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

5. आफ्नो शरीरको तापक्रम लगातार एक हप्तासम्म एउटै समयमा नाप्नुहोस् । दिनलाई $x -$ अक्षमा र तापक्रमलाई $y -$ अक्षमा देखाई प्राप्त विवरणलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी कस्तो लेखाचित्र बन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

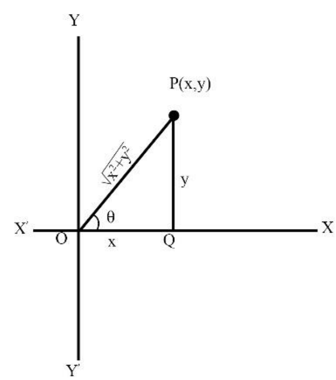
1.1.2. त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Function)

मानौँ $f(x) = 2x + 3$ र $g(x) = 4x^2 - 9$ कुनै दुई बीज गणितीय फलनहरू हुन् ।

अब, $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \times g(x), g(x) \div f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् । त्रिकोणमितीय अनुपातहरू $sin\theta, cos\theta$ र $tan\theta$ मा θको मान कतिदेखि कतिसम्म लिन सकिन्छ होला ? के $sinx$ र $siny$ लाई बीज गणितीय फलनहरू जस्तै : एकआपसमा जोड, घटाउ, गुणन र भाग गर्न सकिन्छ होला ? छलफल गर्नुहोस्, जस्तै : $sin30° = \frac{1}{2}$, $sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ र $sin90° = 1$ भए, के $sin90° = sin30° + sin60°$ हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

> त्रिकोणमितीय फलनहरूले, बीज गणितीय फलनको जस्तो जोड, घटाउ, गुणन र भागका गुणहरू सन्तुष्ट गर्दैनन् । त्यसैले यिनीहरूलाई अबिजीय फलन (Transcendental Function) भनिन्छ ।

मानौँ पहिलो चतुर्थांशमा $P(x, y)$ कुनै एउटा बिन्दु छ । $PQ \perp OX$ खिची OP लाई जोडौँ । समकोण त्रिभुज PQO मा $POQ = \theta$ मानौँ त्रिभुज PQO मा $OQ = x$, $PQ = y$ भए $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ (पाइथागोरस साध्यअनुसार) हुन्छ ।



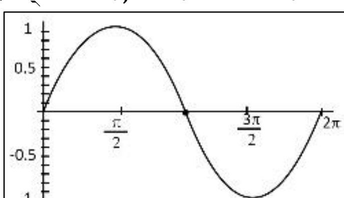
समकोण त्रिभुज PQO मा परिभाषित 6 ओटा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू $sin\theta$, $cos\theta$, $tan\theta$, $cosec\theta$, $sec\theta$ तथा $cot\theta$ लाई x र y का स्वरूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

$x = 0$ र $y = 0$ हुँदा कुन कुन त्रिकोणमितीय फलनहरू परिभाषित हुँदैनन् ? छलफल गर्नुहोस् । $sin\theta, cos\theta$ र $tan\theta$ को न्यूनतम र महत्तम मान कति कति होला, छलफल गर्नुहोस् ।

के $\sin(x+2\pi) = \sin x$ हुन्छ ?

के $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ हुन्छ ?

के $\tan(x + \pi) = \tan x$ हुन्छ ?



$f(x) = \sin x$ मा $x = 0$ देखि 2π सम्मको वक्र एक पूर्णकाल period) हुन्छ ।

> यदि k को सबैभन्दा सानो धनात्मक मानका लागि $f(x + k) = f(x)$ भए फलन f को पेरियड k हुन्छ । जहाँ $x \in$ domain f हुन्छ । $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ हुनाले $\tan x, \sin x$ र $\cos x$ को पेरियड क्रमशः $\pi, 2\pi$ र 2π हुन्छ ।

यहाँ हामी $y = sinA\ (-2\pi \leq A \leq 2\pi)$, $y = cosA\ (-2\pi \leq A \leq 2\pi)$ र $y = tanA\ (-2\pi \leq A \leq 2\pi)$ को लेखाचित्र सम्बन्धी अध्ययन गर्ने छौँ ।

(a) $\boldsymbol{y = sinx\ (-2\pi \leq x \leq 2\pi)}$ **को लेखाचित्र**

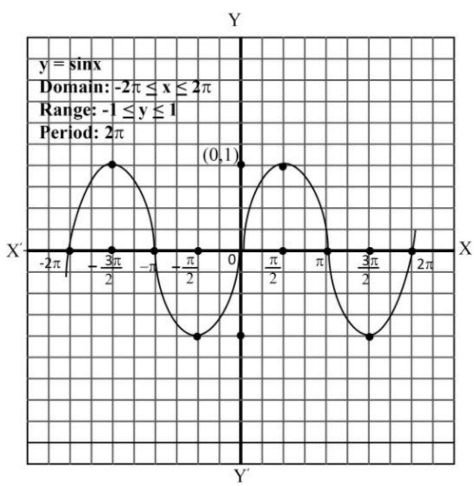
हामीले $y = sinx$ का लागि निम्न लिखित बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरौँ ।

$(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0), \left(\frac{-\pi}{2}, -1\right), (-\pi, 0), (-\frac{3\pi}{2}, 1)$ र $(-2\pi, 0)$

जहाँ x ले -2π देखि 2π सम्मका मानहरूलाई जनाउँछन् । माथिका बिन्दुहरूलाई तालिकामा निम्नअनुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = sinx$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

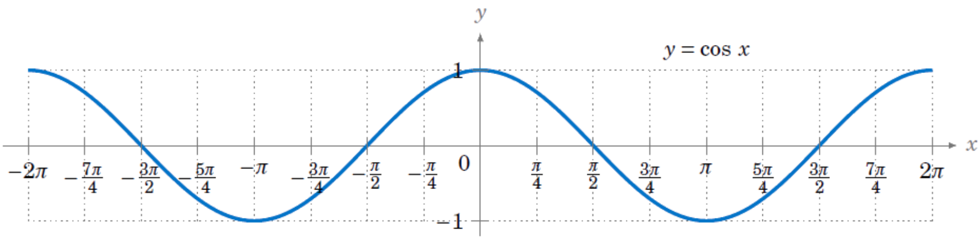
यी सबै बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी वक्र रेखा खिच्दा तल दिइए जस्तै चित्र बन्छ । उक्त लेखाचित्रमा *f(x) = sinx* को मान घटीमा कति र बढीमा कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् :



(b) $\boldsymbol{y = cosx\ (-2\pi \leq x \leq 2\pi)}$ **को लेखाचित्र**

$y = cosx$ का लागि पनि $y = sinx$ को जस्तै निम्न बिन्दुहरू (तालिकामा देखाएअनुरूप) लेखाचित्रमा अङ्कन (plot) गर्नुहोस् । अङ्कित बिन्दुहरूलाई वक्र रेखाले जोड्दा $y = cosx$ को लेखाचित्र प्राप्त हुन्छ । *f(x)* = *cosx* को न्यूनतम मान र अधिकतम मान कति कति हुन्छ, भन्नुहोस् ?

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = cosx$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



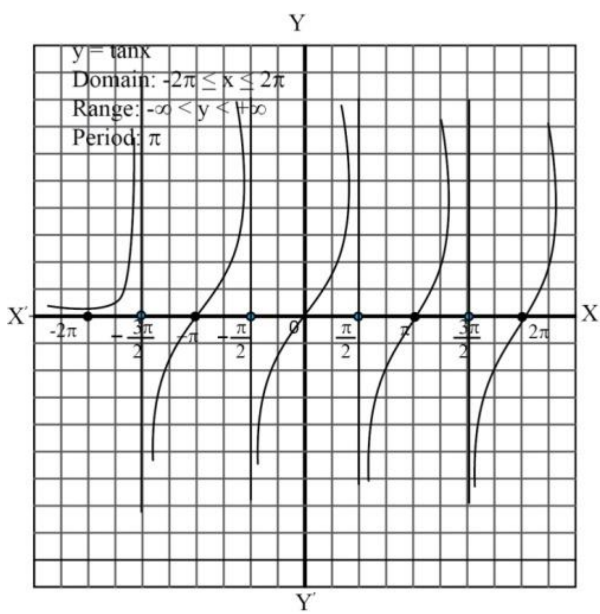
लेखाचित्र : $y = cosx\ (-2\pi \leq x \leq 2\pi)$

(c) $\boldsymbol{y = tanx(-2\,\pi \leq x \leq 2\pi)}$ **को लेखाचित्र,**

$y = tanx$ का लागि $x = \frac{\pi}{2}$, र $x = -\frac{\pi}{2}$ तथा $x = -\frac{3\pi}{2}$ र $x = \frac{3\pi}{2}$, मा फलनको मान परिभाषित हुँदैन । उक्त स्थानमा फलनको प्रतिबिम्बलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्न सकिँदैन । अपरिभाषित भन्नाले कुनै निश्चित बिन्दुमा दिइएको फलनको प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउन नसक्नु हो । त्यसैले $x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, र $\frac{3\pi}{2}$ भएर जाने रेखाले $y = tanx$ को वक्रलाई नजिकबाट छोएको जस्तो देखिन्छ । अथवा यी रेखाहरूलाई स्पर्श गर्ने गरी वक्र रेखा $y = tanx$ का मानहरू तल तालिकामा दिइएझैं अङ्कन गर्न सकिन्छ ।

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y = tan$x$	1	(अपरिभाषित)	-1	(अपरिभाषित)	1	(अपरिभाषित)	-1	(अपरिभाषित)	1

$y = tan\,x$ को लेखाचित्र तल ग्राफमा देखाइए जस्तै हुन्छ ।



लेखाचित्र : $y = tanx(-2\,\pi \leq x \leq 2\pi)$

अब, निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गरौँ :

(i) y = sinx का लागि x को मान कतिदेखि कतिसम्म लिन सकिन्छ ?

(ii) y = tanx का लागि x को मान कतिदेखि कतिसम्म लिन सकिन्छ ?

(iii) y = cosx का लागि x को मान कतिदेखि कतिसम्म लिन सकिन्छ ?

अभ्यास : 1.1.2

1. तल दिइएका फलनहरूको विस्तार क्षेत्र लेख्नुहोस् :

   (a) $f(x) = sinx$ (b) $f(x) = cosx$ (c) $f(x) = tanx$

2. तल दिइएका फलनहरूको पिरियड (period) लेख्नुहोस् :

   (a) $y = sinx$ (b) $y = cosx$ (c) $y = tanx$

3. लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् :

   $(a)\ f(x) = sinx\ (-\pi \le x \le \pi)$ $(b)\ f(x) = cosx\ (-\pi \le x \le \pi)$

   $(c)\ f(x) = tanx\ \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ $(d)\ g(x) = sinx\ (-2\pi \le x \le \pi)$

   $(e)\ g(x) = cosx\ (-2\pi \le x \le \pi)$ $(f)\ g(x) = tanx\ (-\pi < x < \pi)$

4. दैनिक जीवनमा $y = sinx$ र $y = cosx$ को लेखाचित्र कहाँ कहाँ प्रयोग भएको हुन्छ । खोजी गरी प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

1.1.3 संयुक्त फलन (The composition of functions)

मानौँ *f = {(1,2) , (3,5), (4,1)}* र *g = {(2,3), (5,1), (1,3)}* छन् ।

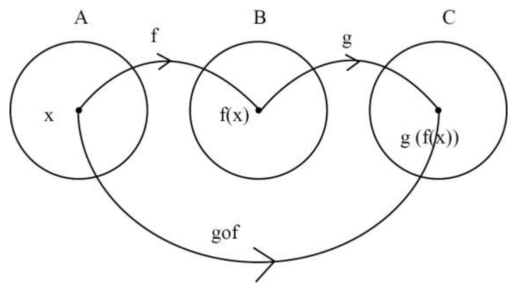
समूहमा छलफल गरी तल दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(i) *f(1)* कति हुन्छ ? (ii) *g(f(1))* कति हुन्छ ?

(iii) *g(1)* कति हुन्छ ? (iv) *f(g(1))* कति हुन्छ ?

(v) के *g(f(1))* र *f(g(1))* ले एउटै मान दिन्छन् ?

(vi) के *g(f(1))* लाई *g(1) x f(1)* लेख्न सकिन्छ ?

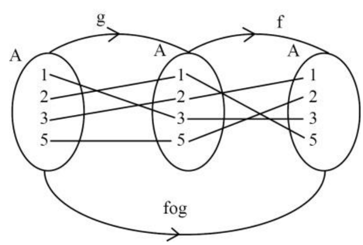


मानौँ प्रत्येक $x \in A$ का लागि $f: A \to B$ र प्रत्येक $f(x) \in B$ का लागि $g: B \to C$ छ। अब प्रत्येक $x \in A$ का लागि एउटा मात्र $g(f(x) \in C$ परिभाषित हुने फलनलाई $gof: A \to C$ भनिन्छ।

यसलाई g संयुक्त फलन f अथवा g कम्पोजिट f भनी पढ्न सकिन्छ। *"Combination of f and g* र *Composition of g and f"* दुई फरक फरक फलन हुन्। $fg(x) = f(x) \times g(x)$ लाई *Combinaiton of f and g* अथवा फलन f र g को गुणनफल भनी पढिन्छ। पुनः $(gof)(x) = g(f(x))$ लाई *"Composition of g and f"* अथवा f र g को संयुक्त फलन भनी पढिन्छ। यिनीहरूले दिने नतिजा पनि फरक फरक हुन्छ।

मानौँ, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ मा $f: A \to A$, लाई $f = \{(1, 5), (2, 1), (3, 3), (5, 2)\}$ र $g: A \to A$ लाई $g = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2), (5, 5)\}$ द्वारा परिभाषित गरिएको छ।

fog र gof लाई निम्नअनुसार पत्ता लगाउन सकिन्छ :



$\therefore fog = \{(1, 3), (2, 5), (3, 1), (5, 2)\}$

यसलाई यसरी पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ :

$(fog)(1) = f(g(1)) = f(3) = 3$

$(fog)(2) = f(g(2)) = f(1) = 5$

$(fog)(3) = f(g(3)) = f(2) = 1$

$(fog)(5) = f(g(5)) = f(5) = 2$

$\therefore fog = \{(1, 3), (2, 5), (3, 1), (5, 2)\}$

त्यस्तै gof का लागि

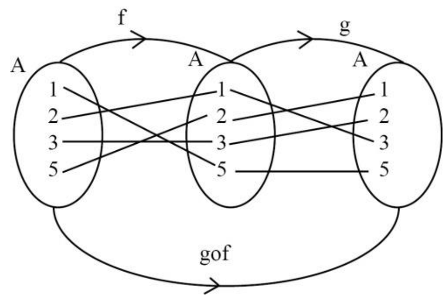
$(gof)(1) = g(f(1)) = g(5) = 5$

$(gof)(2) = g(f(2)) = g(1) = 3$

$(gof)(3) = g(f(3)) = g(3) = 2$

$(gof)(5) = g(f(5)) = g(2) = 1$

$\therefore\ gof = \{(1,5),(2,3),(3,2),(5,1)\}$



अत : gof र fog ल्याउने नतिजा फरक फरक छ ।

अब, f(x) = x + 1 ; $x \in R$

g(x) = 2x – 3 ; $x \in R$ लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

त्यस्तै (fog) (x) र (gof) (x) लाई पनि सोही लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् । प्राप्त नतिजाका बारेमा कक्षाकोठामा छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरणहरू

1. मानौं $f: R \to R: f(x) = 2x + 1$ र

   अतः $g: R \to R: g(x) = (x^2 - 2)$ दिइएको छ ।

   (a) *(fof) (x)* (b) *(gof) (x)* (c) *(fog) (x)* (d) *(gog)(x)* पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x + 1$ र $g(x) = x^2 - 2$ दिइएको छ ।

(a) $(fof)(x) = f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1$

$= 4x + 2 + 1$

$= 4x + 3$

(b) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2$

$= 4x^2 + 4x + 1 - 2$

$= 4x^2 + 4x - 1$

(c) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2)$

$= 2(x^2 - 2) + 1$

$= 2x^2 - 4 + 1$

$= 2x^2 - 3$

(d) $(gog)(x) = g(g(x)) = g(x^2 - 2)$

$= (x^2 - 2)^2 - 2$

$= x^4 - 4x^2 + 4 - 2$

$= x^4 - 4x^2 + 2$

2. यदि $f: N \to N: f(x) = 2x$ र $g: N \to R: g(x) = 3x + 4$ दिएको छ भने $(fog)(4)$ र (gof)(3) पत्ता लगाउनुहोस् । के $(gof)(-2)$ परिभाषित हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x;\ x \in N$ र

$g(x) = 3x + 4;\ x \in N$ छ ।

त्यसैले, $(fog)(4) = f(g(4))$

$= f(3 \times 4 + 4)$

$= f(12 + 4)$

$= f(16)$

$= 2 \times 16$

$= 32$

र $(gof)(3) = g(f(3))$

$= g(2 \times 3)$

$= g(6)$

$= 3 \times 6 + 4$

$= 18 + 4 = 22$

$(gof)(-2)$ परिभाषित हुँदैन किनकि -2 प्राकृतिक सङ्ख्या होइन ।

3. यदि $\boldsymbol{f(x) = 3x - 2}$, $\boldsymbol{(fog)(x) = 6x - 2}$ र $\boldsymbol{(gof)(x) = 8}$ भए $\boldsymbol{x}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् । जहाँ f र g वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूहमा परिभाषित फलनहरू हुन् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 3x - 2$ र $(gof)(x) = 8$

मानौँ, $g(x) = ax + b$ [g(f)(x) रेखीय फलन भएकाले]

अब, $(fog)(x) = 6x - 2$

अथवा, $f[g(x)] = 6x - 2$

अथवा, $f(ax + b) = 6x - 2$

अथवा, $3(ax + b) - 2 = 6x - 2$

अथवा, $3ax + 3b - 2 = 6x - 2$

अथवा, $3a = 6$ र $3b - 2 = -2$

अथवा, $a = 2$ र $3b = 0$

अथवा, $a = 2$ र $b = 0$

त्यसैले $g(x) = ax + b = 2x$

फेरि, $(gof)(x) = 8$

अथवा, $g(f(x)) = 8$

अथवा, $g(3x - 2) = 8$

अथवा, $2(3x - 2) = 8$

अथवा, $6x - 4 = 8$

अथवा, $6x = 12$

अथवा, $x = 2$

$\therefore x = 2$

4. यदि $f: R \rightarrow R$; $f(x) = 2 - x$ भए $(fof)(x) = x$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2 - x$

$(fof)(x) = f(f(x))$

$= f(2 - x) = 2 - (2 - x) = 2 - 2 + x$

$= x$ प्रमाणित भयो ।

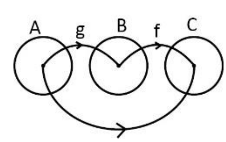
अभ्यास 1.1.3

1. (a) संयुक्त फलनको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

(b) $(fog)(x)$ फलनको क्षेत्र f र g मध्ये कुन फलनको क्षेत्रसँग बराबर हुन्छ ?

(c) चित्रमा $g: A \rightarrow B$ र $f: B \rightarrow C$ छ ।

A बाट C सम्म परिभाषित फलनको नाम के हो, लेख्नुहोस् ।



(d) यदि $f = \{(1,3), (2,1), (3,2)\}$ र $g = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ भए फलन (gof) को क्षेत्र कति हुन्छ ?

2. (a) यदि $f = \{(1,2), (3,5), (4,1)\}$ र $g = \{(2,3), (5,1), (1,3)\}$ भए (fog) र (gof) लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(b) यदि $f = \{(5,2), (6,3)\}$ र $g = \{(2,5), (3,6)\}$ भए (fog) र (gof) लाई मिलान चित्रमा देखाई क्रमजोडाहरूको समूह बनाउनुहोस् ।

(c) यदि $(fog) = \{(4, 2), (8, 4), (12, 6), (16, 8)\}$ र $g = \{(4, 8), (8, 16), (12, 24), (16, 32)\}$ भए (fog) लाई मिलान चित्रमा देखाउनुहोस् । f लाई क्रमजोडाहरूका रूपमा लेख्नुहोस् ।

3. (a) यदि $f: R \to R: f(x) = x + 2$ र $g: R \to R: g(x) = 4 - x^2$ भए $(fog)(x)$ र $(gof)(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $g: R \to R: g(x) = 2 + 3x$ र $h: R \to R: h(x) = x^2$ भए $(goh)(x)$ र $(hog)(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि R ले वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूहलाई जनाउँछ र फलनहरू $f: R \to R: f(x) = 5x - 3$ र $g: R \to R: g(x) = 2x + 5$ परिभाषित छन् । $(fog)(x)$ र $(gof)(x)$ के एक अर्कासँग बराबर हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) यदि $f: R \to R: f(x) = 2x + 3$ र $g: R \to R: g(x) = 2x - 1$ भए $(fog)(5)$ र $(gof)(-2)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $f: N \to R: f(x) = 4x - 2$ र $g: R \to R: g(x) = x^2$ भए $(fog)(1)$ र $(gof)(4)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि $f(x) = 3 - 4x,\ x \in R$ र $g(x) = 2x + 3,\ x \in R$ भए $(gof)(1)$ र $(fog)(4)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) यदि $f: R \to R: f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ र $(fog): R \to R: (fog(x) = x$ भए $g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $g: R \to R: g(x) = 4 - x$ र $(fog)(x) = 11 - 2x$ भए $f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि $f: N \to R: f(x) = x^2$ र $fog: R \to R: (fog)(x) = x^2 - 2x + 1$ भए $g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (a) यदि $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$ $x \neq -3$ र $h(x) = (fog)(x)$ भए फलन $f(x)$ र $g(x)$ का सम्भावित सूत्रहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $h(x) = (2x - 3)^5$, $h(x) = (fog)(x)$ भए $f(x)$ र $g(x)$ का कुनै दुई ओटा सम्भावित सूत्रहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (a) यदि $(x) = \frac{6}{x-2}(x \neq 2, x \in R)$, $g(x) = ax^2 - 1$ र $(gof)(5) = 7$ भए a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $f: R \to R: f(x) = (ax + 5)$, $g(x) = 8x + 13$ र $(gof)(5) = 93$ भए a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा रेफ्रिजेरेटरमा राखिएको खानामा ब्याक्टेरियाहरूको सङ्ख्या, $N(T) = 20T^2 - 80T + 500 (2 \leq T \leq 14)$को रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । जहाँ, T ले खानाको तापक्रमलाई जनाउँछ र $T(t) = 4t + 2 (0 \leq t \leq 3)$; जहाँ t ले घण्टामा हुने समयलाई जनाउँछ भने

(a) $(NoT)(t)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) फ्रिजमा राखेको 2 घण्टामा उक्त खानामा कति ब्याक्टेरिया हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) खानामा कति घण्टामा 3300 ओटा ब्याक्टेरिया हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

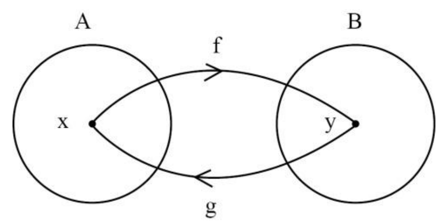
1.1.4 विपरीत फलन (Inverse of a Function)

यदि $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ र $g = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$ भए f र g को सम्बन्धका बारेमा छलफल गर्नुहोस् । (gof) लाई क्रमजोडाका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

यदि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 5, 7\}$ र $f: A \to B$ लाई $f = \{(2, 3) (4, 5), (6, 7)\}$ ले परिभाषित गरिएको छ । के $f: A \to B$ सम्पूर्ण एक एक फलन हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

त्यस्तै $(fog)(x)$ र $(gof)(x)$ ले के सधैँ एउटै नतिजा ल्याउछन् ? एउटै नतिजा ल्याउन f र g को सम्बन्ध कस्तो हुनुपर्ला ? छलफल गर्नुहोस् ।

मानौँ $f: A \to B$ एक एक र सम्पूर्ण फलन (One to one and onto function or bijective function) हो ।



$f(x) = y$; $x \in A$ परिभाषित छ ।
त्यस्तै $g: B \to A: g(y) = x$;
$y \in B$ पनि परिभाषित छ ।

g लाई f को विपरीत फलन पनि भनिन्छ ।

जहाँ, $(fog)(x) = x ; x \in domain\ g$

$(gof)(x) = x ; x \in domain\ f$ हुन्छ ।

यस्तो अवस्थामा $g = f^{-1}$ लेख्न सकिन्छ । $(fof^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ हुन्छ ।

मानौँ $x \in A$ का लागि एक समान सदस्य *(unique element)*, $y \in B$ छ । यदि $y = f(x)$ भए $x = f^{-1}(y)$ हुन फलन f एक एक *(one to one)* र सम्पूर्ण (onto) हुनुपर्दछ । f र f^{-1} एक अर्काका विपरीत फलन हुन्छन् ।

उदाहरणहरू

1. $f: A \to B$ एउटा एक एक सम्पूर्ण फलन हो । $f = \{(3,2),(1,5),(5,1),(7,4),(9,5)\}$ दिइएको छ । f^{-1} लाई क्रमजोडाका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f = \{(3,2),(1,5),(5,1)(7,4),(9,5)\}$ छ । दिइएका f का क्रमजोडा सदस्यहरूको स्थान परिवर्तन गर्दा प्राप्त हुने फलन f को विपरीत फलन हुन्छ ।

त्यसैले, $f^{-1} = \{(2,3),(5,1),(1,5)(4,7),(5,9)\}$ हुन्छ ।

2. Q ले आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूहलाई जनाउँछ । $f: Q \to Q: f(x) = 2x + 3, x \in Q$ कुनै एउटा फलन छ । के फलन f एक एक र सम्पूर्ण फलन हो ? यदि हो भने $f^{-1}(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x + 3$

मानौँ, $x_1, x_2 \in Q$ का लागि $f(x_1) = f(x_2)$ बराबर छन् ।

त्यसैले, $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

अथवा, $x_1 = x_2$

प्रत्येक प्रतिबिम्बको फरक फरक पूर्व प्रतिबिम्ब छ। अथवा दुई ओटा प्रतिबिम्बहरू एकआपसमा बराबर हुँदा पूर्व प्रतिबिम्ब पनि बराबर छन् ।

त्यसैले फलन f एउटा एक एक फलन हो ।

फेरि, मानौँ, $y = f(x)$

अथवा, $y = 2x + 3$

अथवा, $y - 3 = 2x$

अथवा, $x = \frac{1}{2}(y - 3)$

यहाँ, प्रत्येक $y \in Q$ का लागि $x \in Q$ हुन्छ, त्यसैले f एउटा सम्पूर्ण फलन हो ।

$f(x)$ एउटा एक एक र सम्पूर्ण फलन भएकाले $f^{-1}(x)$ परिभाषित हुन्छ ।

माथि दिइएअनुसार, $f(x) = 2x + 3$

अथवा, $y = 2x + 3$

अथवा, $y - 3 = 2x$

अथवा, $\frac{1}{2}(y - 3) = x$

अथवा, $\frac{1}{2}(y-3) = f^{-1}(y)$ [$f(x) = y$ हुँदा $x = f^{-1}(y)$ हुने हुनाले ।]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-3)$

3. यदि $f(x)$ एउटा एक एक सम्पूर्ण फलन भए $f^{-1}(x)$ र $f^{-1}(8)$ पत्ता लगाउनुहोस्, जहाँ $f(x) = \frac{3x+4}{5}$ छ ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = \frac{3x+4}{5}$

अथवा, $y = \frac{3x+4}{5}$

अथवा, $5y = 3x + 4$

अथवा, $5y - 4 = 3x$

अथवा, $\frac{1}{3}(5y-4) = f^{-1}(y)$ [*f(x) = y* अथवा $x = f^{-1}(y)$]

अथवा, $\frac{1}{3}(5x-4) = f^{-1}(x)$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(5x-4)$.

फेरि, $f^{-1}(8) = \frac{1}{3}(5 \times 8 - 4) = \frac{1}{3}(40-4) = 12$.

$f^{-1}(x)$ पत्ता लगाउने वैकल्पिक विधि

यहाँ, $f(x) = \frac{3x+4}{5}$

अथवा, $5f(x) = 3x + 4$

x लाई $f^{-1}(x)$ र $f(x)$ लाई x ले प्रतिस्थापन गर्दा,

$5x = 3f^{-1}(x) + 4$

अथवा, $5x - 4 = 3f^{-1}(x)$

अथवा, $\frac{1}{3}(5x-4) = f^{-1}(x)$.

4. यदि f र g दुई एक एक सम्पूर्ण फलन हुन्, जहाँ

$f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \frac{2x-7}{3}$ र $(fof)(x) = g^{-1}(x)$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x - 3$

$g(x) = \frac{2x-7}{3}$

$(fof)(x) \quad = f(f(x))$

$= f(2x-3)$

$= 2(2x-3) - 3$

$= 4x - 6 - 3$

$= 4x - 9$

पुनः $g^{-1}(x)$ का लागि

यहाँ, $g(x) = \frac{2x-7}{3}$

मानौँ, $y = \frac{2x-7}{3}$

$3y = 2x - 7$

अथवा, $3y + 7 = 2x$

अथवा, $\frac{1}{2}(3y + 7) = x$

अथवा, $\frac{1}{2}(3y + 7) = g^{-1}(y)$

अथवा, $\frac{1}{2}(3x + 7) = g^{-1}(x)$

$\therefore\ g^{-1}(x) = \frac{3x+7}{2}$.

प्रश्नानुसार $(fof)(x) = g^{-1}(x)$

अथवा, $4x - 9 = \frac{3x+7}{2}$

अथवा, $8x - 18 = 3x + 7$

अथवा, $8x - 3x = 7 + 18$

अथवा, $5x = 25$

अथवा, $x = \frac{25}{5}$

$= 5$

$\therefore x = 5$

5. $f: R \to R$ र $g: R \to R - \{0\}$ दुई एक एक सम्पूर्ण फलनहरू हुन् । यदि $f(x) = x + 1$ र $g(x) = \frac{3-x}{x}$ $(x \neq 0)$ दिइएको छ भने $(f^{-1}og^{-1})(2)$को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = x + 1$

मानौँ, $y_1 = x + 1$

y_1 र x को स्थान परिवर्तन गर्दा,

त्यसैले, $x = y_1 + 1$

अथवा, $x - 1 = y_1$

$\therefore f^{-1}(x) = x - 1$

फेरि, $g(x) = \frac{3-x}{x} (x \neq 0)$

मानौँ, $y_2 = \frac{3-x}{x}$

y_2 र x को स्थान परिवर्तन गर्दा,

$x = \frac{3-y_2}{y_2}$

अथवा, $y_2 x = 3 - y_2$

अथवा, $y_2 x + y_2 = 3$

$\therefore y_2(x + 1) = 3$

अथवा, $y_2 = \frac{3}{x+1} (x \neq -1)$

$\therefore g^{-1}(x) = \frac{3}{x+1}$

अब, $(f^{-1}og^{-1})(2)$

$= f^{-1}(g^{-1}(2))$

$= f^{-1}\left(\frac{3}{2+1}\right)$

$= f^{-1}(\frac{3}{3})$

$= f^{-1}(1)$

$= 1 - 1$

$= 0$

$\therefore f^{-1}(g^{-1}(2)) = 0$

अभ्यास : 1.1.4

1. परिभाषा लेख्नुहोस् :
   (a) एक एक फलन (One to one Function)
   (b) सम्पूर्ण फलन (Onto Function)
   (c) विपरीत फलन (Inverse of a function or inverse function)
2. (a) फलन $f: A \rightarrow B$ को कुन अवस्थामा विपरीत फलन f^{-1} परिभाषित हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
   (b) यदि $f: R \rightarrow R$ र $g: R \rightarrow R$ एक अर्काका विपरीत फलनहरू हुन् । प्रत्येक $x \in R$ का लागि $(fog)(x)$ र $(gof)(x)$ कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
3. तल दिइएका फलनहरू एक एक सम्पूर्ण फलनहरू हुन् । प्रत्येकको विपरीत फलन लेख्नुहोस् ।
   (a) $\mathrm{f} = \{(1,1), (2,4), (3,9)(4,16), (5,25)\}$
   (b) $\mathrm{g} = \{(1,4), (3,6), (4,7)(5,8)\}$
   (c) $\mathrm{h} = \{(8,2), (27,3), (64,4)(125,5), (216,6)\}$
4. तल दिइएका फलनहरू एक एक सम्पूर्ण फलनहरू हुन्/होइनन् पत्ता लगाउनुहोस् । एक एक सम्पूर्ण फलन भएमा तिनीहरूको विपरीत फलन पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (a) $f: \{1,2,3,4\} \rightarrow R: f(x) = x^2$ (b) $f: N \rightarrow N: f(x) = 3x + 1$
   (c) $g: R \rightarrow R: g(x) = \frac{x-1}{4}$ (d) $h: Q \rightarrow Q: h(x) = 5 + 2x$
   (e) $k: R \rightarrow R: k(x) = x^2$
5. (a) यदि एउटा एक एक सम्पूर्ण फलन, $f(x) = 3x - 5$ भए $f^{-1}(4)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (b) यदि एउटा एक एक सम्पूर्ण फलन, $g(x) = 4x - 3$ भए $g^{-1}(7)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (c) यदि एउटा एक एक सम्पूर्ण फलन, $h(x) = \frac{2x-3}{4}$ भए $h^{-1}(2)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. तल दिइएका फलनहरू एक एक सम्पूर्ण फलनहरू हुन् भने दिइएको समीकरण हल गरी x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (a) $f(x) = 2x - 7;\ g(x) = \frac{x+2}{3}$ र $(fog)(x) = g^{-1}(x)$
   (b) $f(x) = 2x + 7;\ g(x) = \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}$ र $(gof^{-1})(x) = 3$
   (c) $f(x) = x + 5\ ;\ g(x) = \frac{x-2}{3}$ र $(fof)(x) = g^{-1}(x)$
7. (a) यदि फलन $f: R \rightarrow R: f(x) = 4x - 3\ ; g: R \rightarrow R: g(x) = \frac{x+2}{5}$ भए $(f^{-1}og^{-1})(2)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $f: R \to R: f(x) = \frac{x+2}{3}$ र $g: R \to R: g(x) = x - 5$ भए $(f^{-1}og^{-1})(1)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. साँवालाई $'x'$, र साधारण ब्याजको मिश्रधनलाई $f(x)$ मानी आफ्नो घर नजिकको बैङ्क अथवा वित्तीय संस्थाले दिने ब्याजदरमा 5 वर्षका लागि मिश्रधन पत्ता लगाउने फलन $f(x)$ खोजी गर्नुहोस् । $(fof^{-1})(x)$ र $f^{-1}(400)$ को मान पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. आफ्नो कक्षा अथवा अगिल्लो कक्षाको विज्ञान विषयको अध्ययन गरी तापक्रम मापनमा डिग्री सेल्सियस र डिग्री फरेनहाइटको सम्बन्ध दर्साउने फलनको खोजी गर्नुहोस् । उक्त फलनको विपरीत फलन पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

1.2. बहुपदीयहरू (Polynomials)

1.2.0 पुनरावलोकन (Review)

- बहुपदीय र बीजीय अभिव्यञ्जकबिच के भिन्नता छ ? छलफल गर्नुहोस् ।
- यदि $f(x) = x^2 + 2x + 5$ र $g(x) = x^3 + 3x + 7$ भए $f(x) + g(x)$ र $g(x) - f(x)$ कति हुन्छ, भन्नुहोस् ।
- यदि $g(x) = (x - 1)$ र $h(x) = x^2 + x + 1$ भए $g(x).h(x)$ कति हुन्छ, भन्नुहोस् ।
- के दुई ओटा बहुपदीयहरूलाई एकआपसमा जोड्दा, घटाउदा र गुणन गर्दा प्राप्त हुने नतिजा पनि बहुपदीय नै हुन्छ ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

1.2.1 बहुपदीयहरूको भाग (Division of Polynomials)

बहुपदीय $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ मा गुणाङ्कहरू $a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$ ले वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई जनाउँछन् भने के a_n ले बहुपदीयको उच्च घात भएको पद (Leading term) लाई जनाउँछ ? के $a_n x^n + a_0$ लाई $a_n x^{n-1}$ ले भाग गर्न सकिन्छ होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

त्यस्तै, $(x + 2) \times (x - 2)$ कति हुन्छ ?

के $x^2 - 4$ लाई $x + 2$ ले भाग गर्न सकिन्छ ? सकिन्छ भने भागफल र शेष कति कति हुन्छन् लेख्नुहोस् ।

मानौँ, $f(x)$ र $d(x)$ दुई बहुपदीयहरू हुन्, जहाँ $d(x) \neq 0$ छ । यदि $d(x)$ को डिग्री $f(x)$ कोभन्दा कम अथवा बराबर छ भने एक समान बहुपदीयहरू (unique polynomials) $q(x)$ र $r(x)$ ले $f(x)$ र $d(x)$ सँग निम्नानुसार सम्बन्ध दर्शाउँछन् :

$f(x) = d(x) \times q(x) + r(x)$

अथवा, $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$

यदि $r(x)=0$ भए $\frac{f(x)}{d(x)}=q(x)$ हुन्छ । $r(x)$ को डिग्री $d(x)$ को भन्दा सधैँ कम हुन्छ ।

उदाहरणहरू

1. बहुपदीय $f(x)=x^4+x^3+x^2+2x+5$ लाई $d(x)=x^2$ ले भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष $r(x)$ कति कति हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\frac{f(x)}{d(x)}=\frac{x^4+x^3+x^2+2x+5}{x^2}$

$=\frac{x^2(x^2+x+1)}{x^2}+\frac{(2x+5)}{x^2}$

$=(x^2+x+1)+\frac{(2x+5)}{x^2}$

$\frac{f(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$ सँग तुलना गर्दा,

$q(x)=(x^2+x+1)$ र $r(x)=2x+5$ हुन्छ ।

$\therefore$ भागफल $q(x)=(x^2+x+1)$ र शेष $r(x)=2x+5$ प्राप्त हुन्छ ।

2. यदि $f(x)=x^5+2x^3+4x^2+5$ र $d(x)=x^2+2$ भए $q(x)$ र $r(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x)$ लाई $d(x)$ ले भाग गर्दा निम्नानुसार गर्न सकिन्छ ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \qquad + 4 \\
x^2+2) & \overline{x^5+2x^3+4x^2+5} \\
 & x^5+2x^3 \\
 & (-) \quad (-) \\ \hline
 & \qquad 4x^2+5 \\
 & \qquad 4x^2+8 \\
 & \qquad (-) \quad (-) \\ \hline
 & \qquad\qquad -3
\end{array}
$$

त्यसैले भागफल $(q(x))=x^3+4$ र शेःष, $r(x)=-3$ प्राप्त हन्छ ।

3. यदि भागफल $q(x)=2x+3$, शेष $r(x)=4-x$ र भाज्य $d(x)=x^2+1$ भए बहुपदीय $f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $q(x)=2x+3$

$r(x)=4-x$

$d(x) = x^2 + 1$

$f(x) = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$f(x) = q(x) \times d(x) + r(x)$

अथवा, $f(x) = (2x + 3) \times (x^2 + 1) + 4 - x$

अथवा, $f(x) = (2x^3 + 2x + 3x^2 + 3) + 4 - x$

अथवा, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 7$

अभ्यास : 1.2.1

1. (a) बहुपदीय $x^3 + x^2 + 2x + 5$ को डिग्री कति हुन्छ ?

(b) बहुपदीय $f(x)$ लाई $d(x)$ ले भाग गर्दा भागफल, $q(x)$ र शेष $r(x)$ भए $f(x)$ लाई $d(x), q(x)$ र $r(x)$ को पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(c) दुई ओटा बहुपदीयको भागफलबाट प्राप्त हुने भागफल र शेषमा कसको डिग्री बढी हुन्छ ?

2. भाग गर्नुहोस् (Divide):

(a) $(x^4 + 2x^2 + 3x + 5) \div x$

(b) $(2x^3 + 4x^2 + 6x + 7) \div x^2$

(c) $(x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 6x + 9) \div x^2$

3. भाग गर्नुहोस् (Divide):

(a) $(x^3 - 27) \div (x - 3)$ (b) $(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) \div (x + 2)$

(c) $x^4 - 16 \div x - 2$ (d) $(x^4 - 7x^2 + 1) \div (x^2 + 3x + 1)$

(e) $(x^4 + x^2 + 1) \div (x^2 - x + 1)$

4. भागफल $q(x)$, शेष $r(x)$, र भाजक $d(x)$ दिइएको अवस्थामा बहुपदीय $f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $d(x) = (x - 1);\ q(x) = 4x + 5;\ r(x) = 7$

(b) $d(x) = (2x - 3);\ q(x) = 2x + 3;\ r(x) = 5$

(c) $d(x) = (7 - x);\ q(x) = x^2 + x + 1;\ r(x) = 7$

(d) $d(x) = (x^2 + 3);\ q(x) = 3x - 5;\ r(x) = 1 - x$

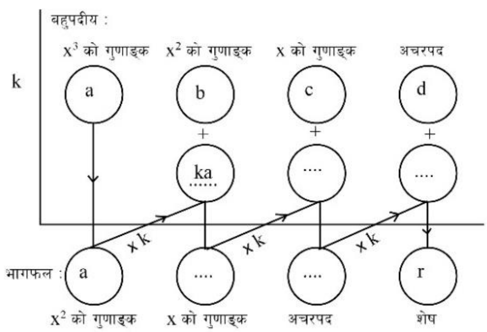
5. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ लाई क्रमशः $(x + 1)$ र $(x - 3)$ ले भाग गर्नुहोस् । दुवैले भाग गरेपछि प्राप्त हुने शेषका आधारमा दिइएको बहुपदीय $(x + 1)$ र $(x - 3)$ बिच के सम्बन्ध छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

1.2.2 सङ्क्षिप्त भाग विधि (Synthetic division)

$x^3 + 9$ लाई x को घट्दो क्रममा लेख्दा x^2 र x का गुणाङ्क कति कति हुन्छन् ? $x^3 - 27$ लाई x - 3 ले भाग गर्दा भागफल कति हुन्छ ? के $x^3 - 27$ लाई $x - 3$ ले भाग गर्ने कुनै सङ्क्षिप्त विधि पनि होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

$x^3 + 3x^2 - 9x + 27$ लाई $x + 3$ ले भाग गर्दा आउने भागफलको डिग्री कति हुन्छ ?

मानौँ, बहुपदीय $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ लाई रेखीय बहुपदीय (linear polynomial) अथवा पहिलो डिग्रीको बहुपदीय $(x - k)$ ले भाग गर्दा निम्नअनुसारको संरचनामा (pattern) भाग गर्न सकिन्छ ।



सङ्क्षिप्त भाग विधिमा भाजक $x - k$ को स्वरूपमा भएको अवस्थामा मात्र प्रयोग गर्न सकिन्छ । यदि भाजक $(px \pm q)$ को स्वरूपमा भए पहिले यसलाई $p(x \pm \frac{q}{p})$ मा लगी $k = \pm\frac{q}{b}$ बनाउन सकिन्छ ।

चरणहरू

(i) भाजकमा भएको अचरको चिह्न बदलेर वा भाजकलाई (हरलाई) शून्य बनाउँदा आउने मानलाई शुरुमा पहिलो लाइनको बायाँतिर लेख्ने ।

(ii) भाज्यका पदहरूलाई चलराशीको घाताङ्को घट्दो क्रममा राख्दा आउने गुणाङ्कलाई हराएका पदको गुणाङ्क 0 (शून्य) राखेर पहिलो लाइनमा दायाँतिर/अर्कोतिर राख्ने

(ii) Leading coefficient लाई सिधै तल लेख्ने

(iii) Leading coefficient लाई भाजक शून्य गर्दा आएको मानले गुणन गरी दोस्रो लाइनमा दोस्रो गुणाङ्कको तल लेख्ने र त्यसलाई दोस्रो गुणाङ्कसँग जोडेर तेस्रो लाइनमा लेख्ने

(v) माथिको प्रक्रियालाई भाज्यको अचरपदसँग जोड्दासम्म दोहोऱ्याउने

(vi) तेस्रो लाइनको अन्तिम जोडफल शेष हुन्छ । तेस्रो लाइनको पहिलो जोडफलबाट भाज्यको डिग्रीभन्दा एक कम गरी चलराशीको घाताङ्कलाई घट्दो क्रममा राखेर क्रमैसँग लेख्ने । जुन भागफल हुन्छ ।

माथि दिइएको ठाडो संरचनामा जोड्ने र विकर्ण संरचनामा k ले गुणन गर्ने भन्ने बुझाउँछ ।

उदाहरणहरू

1. सङ्क्षिप्त भाग विधि प्रयोग गरी भाग गर्नुहोस् :

$(2x^4 + 7x^3 + x - 12) \div (x + 3)$

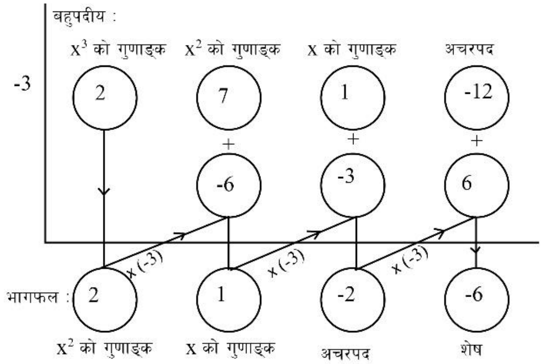
समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + x - 12$

$d(x) = (x + 3)$

$(x + 3)$ लाई $x - k$ सँग तुलना गर्दा $k = -3$ प्राप्त हुन्छ । अथवा $x + 3$ लाई शून्य बनाउँदा x को मान -3 हुन्छ ।

सङ्क्षिप्त भाग विधिको संरचनामा बहुपदीय र भाजक $x+3$ लाई राख्दा,



7+ (-6) = 1
1 + (-3) = -2
(-12) +6 = -6
त्यस्तै
(-3) x 2 = -6
(-3) x 1 = -3
(-3) x (-2) = 6

यहाँ, भागफल (quotient) $= 2x^2 + 1.x + (-2) = 2x^2 + x - 2$

र शेष (remainder) $= -6$ हुन्छ ।

[नोट : $x^4 - 16$ लाई $x - 2$ ले भाग गर्दा बहुपदीयलाई $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16$ लेख्न सकिन्छ । यस्ता गुणाङ्कहरू एउटै पङ्तिमा लेख्दा क्रमशः 1 0 0 -6 लेख्नुपर्छ ।]

2. सङ्क्षिप्त भाग विधि प्रयोग गरी भाग गर्नुहोस् :

$(8x^3 + 4x^2 + 6x - 7) \div (2x - 1)$

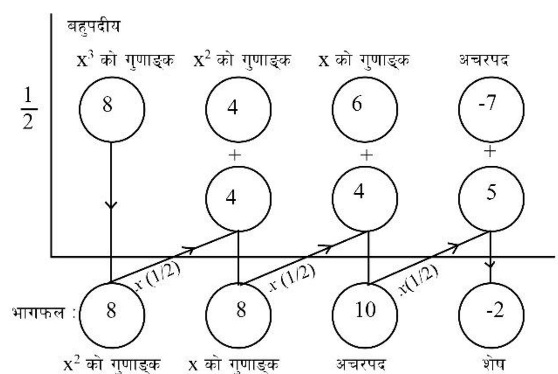
समाधान

यहाँ, $f(x) = (8x^3 + 4x^2 + 6x - 7)$

$d(x) = 2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$

$x - \frac{1}{2}$ लाई $x - k$ सँग तुलना गर्दा $k = \frac{1}{2}$ हुन्छ । अथवा $2x - 1 = 0$ लिँदा $x = \frac{1}{2}$

माथि दिएको प्रश्नलाई सङ्क्षिप्त भाग विधिको संरचनामा लेख्दा,



यहाँ, भागफल (quotient) = $8x^2 + 8x + 10$

शेष (remainder) $= -2$

अभ्यास 1.2.2

1. (a) सङ्क्षिप्त भाग विधिमा भाजक (diviser) को डिग्री कति हुन्छ ?

   (b) सङ्क्षिप्त भाग विधिमा भाज्य (dividend) र भागफल (quotient) को डिग्रीको फरक कति हुन्छ ?

2. सङ्क्षिप्त भाग विधिबाट भागफल र शेष पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $(x^3 - 7x^2 + 13x + 3) \div (x - 2)$

   (b) $(x^3 - 3x + 10) \div (x + 1)$

   (c) $(5x^4 - 2x + 5) \div (x + 3)$

   (d) $(x^7 + x^6 - x^5 - 2x^4 + 2) \div (x + 1)$

3. सङ्क्षिप्त भाग विधिबाट भागफल र शेष पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $(2x^4 - 3x^2 - 1) \div (2x - 1)$

   (b) $(4x^4 - 3x^2 + 2) \div (4x - 1)$

   (c) $(3x^4 - 7x^2 + 6x - 2) \div (3x + 2)$

   (d) $(4x^4 - 3x^2 + 7x + 8) \div (2x + 3)$

1.2.3 शेष साध्य (Remainder Theorem):

यदि $f(x) = x^3 + 7x^2 - 12x - 3$ भए $f(-3), f(-2)$ र $f(3)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् । के f(-1) को मान शून्य हुन्छ ? भाजक $2x - 3$ लाई $x - k$ को स्वरूपमा लेख्दा k को मान कति हुन्छ ?

$f(3)$ र $f(1)$ को मान बिच कति फरक हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

> शेष साध्य (remainder Theorem) : यदि n डिग्री भएको बहुपदीय $f(x)$, (जहाँ $n \geq 0$ छ ।) लाई $x - k$ ले भाग गर्दा शेष $f(k)$ हुन्छ र भागफलको डिग्री $(n - 1)$ हन्छ ।

उदाहरणका लागि $f(x) = x^3 + 2x + 5$ लाई $x - 2$ ले भाग गर्दा शेष $f(2) = 2^3 + 2 \times 2 + 5 = 8 + 4 + 5 = 17$ हुन्छ । यसलाई सङ्क्षिप्त भाग विधिको तरिकाबाट पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ । भाजक र भाज्यको निम्न लिखित अवस्थामा शेषः प्राप्त गर्न सकिन्छ । उक्त शेष कसरी प्राप्त भयो होला ? कक्षाकोठामा छलफल गर्नुहोस् ।

भाजक	भाज्य	शेष
$x-k$	$f(x)$	$f(k)$
$x+k$	$f(x)$	$f(-k)$
$ax+b(a \neq 0)$	$f(x)$	$f(-\frac{b}{a})$
$ax-b(a \neq 0)$	$f(x)$	$f(\frac{b}{a})$

उदाहरणहरू

1. शेष साध्यको प्रयोग गरी $4x^3+7x^2-3x+2$ लाई $(x+2)$ ले भाग गर्दा आउने शेष पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x)=4x^3+7x^2-3x+2$ (मानौँ)

$d(x)=x+2$ लाई $x-k$ सँग तुलना गर्दा, $k=-2$ हुन्छ ।

शेष साध्यको कथनअनुसार,

शेष $=f(k)$

$=f(-2)$

$=4\times(-2)^3+7\times(-2)^2-3\times(-2)+2$

$=4\times(-8)+7\times4+6+2$

$=-32+28+8$

$=-32+36$

$=4$

2. शेष साध्यको प्रयोग गरी $4x^5+x^3+20$ लाई $(2x-1)$ ले भाग गर्दा आउने शेष पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x)=4x^5+x^3+20$ (मानौँ)

$d(x)=2x-1$

$=2(x-\frac{1}{2})$

शेष साध्यको कथनअनुसार,

शेष $=f(\frac{1}{2})$

$=4(\frac{1}{2})^5+(\frac{1}{2})^3+20$

$= \frac{4}{32} + \frac{1}{8} + 20$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 20$

$= \frac{1 + 1 + 160}{8} = \frac{162}{8} = \frac{81}{4}$

3. यदि $x^3 + 3x^2 + ax + 4$ लाई $(x-2)$ ले भाग गर्दा शेष *4* रहन्छ भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 4$ (मानौँ)

$d(x) = x - 2$

शेष साध्यको कथनअनुसार,

शेष $= f(2)$

$= 2^3 + 3 \times 2^2 - a \times 2 + 4$

$= 8 + 12 - 2a + 4$

$= 24 - 2a$

तर, $f(2) = 4$

अथवा, $24 - 2a = 4$

अथवा, $2a = 20$

अथवा, $a = 10$

$\therefore a = 10$

अभ्यास 1.2.3

1. (a) शेष साध्यको कथन लेख्नुहोस् ।

   (b) बहुपदीय, $f(x)$ लाई $cx + d$ ले भाग गर्दा शेष कति हुन्छ ?

2. (a) यदि $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ र $g(x) = x + 1$ भए $f(x)$ लाई $g(x)$ ले भाग गर्दा आउने शेष पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) शेष साध्य प्रयोग गरी $x^3 - x^2 + 1$ लाई $x - 2$ ले भाग गर्दा आउने शेष पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. तल दिइएको अवस्थामा शेष साध्य प्रयोग गरी शेष पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $(4x^2 + 6x + 8) \div (2x - 1)$

$(b)\ (6x^3+4x^2+3x+4)\div(3x-4)$

$(c)\ 8x^4+5x^3-2x^2+7x-1)\div(2x+6)$

$(d)\ (5x^4-6x^3+8x^2-10x+12)\div(3x+9)$

4. (a) यदि बहुपदीय $2x^3+3x^2-kx+4$ लाई $(x+2)$ ले भाग गर्दा शेष 16 रहन्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि बहुपदीय $x^4+5x^3-kx^2+7x+10$ लाई $(x+1)$ ले भाग गर्दा शेष 12 रहन्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि $4x^3-3mx+5$ लाई $(x-1)$ ले भाग गर्दा शेष 10 रहन्छ भने m को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि $x^3-9x^2+(k+1)x-7$ को एउटा गुणनखण्ड $(x-7)$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) यदि $2x^2-5x+a$ र x^3-x^2+ax+5 दुवैलाई $(x+2)$ ले भाग गर्दा बराबर शेष आउँछ भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $x^3-ax^2+8x+11$ र $2x^3-ax^2+7ax+13$ दुवैलाई $(x-1)$ ले भाग गर्दा बराबर शेष आउँछ भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

1.2.4: गुणनखण्ड साध्य (Factor Theorem)

यदि $f(x)=x^2-4$ भए $f(2)$ र $f(-2)$ को मान कति कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् । x को मान कति हुँदा $f(x)$ को मान 0 हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । के $x^2 - 4$ को एउटा गुणनखण्ड $x-2$ हो । गुणनखण्डको कथनलाई निम्नअनुसार परिभाषित गरिन्छ ।

> कुनै n डिग्रीको बहुपदीय $f(x)$ का लागि यदि $f(c)=0$ हुन्छ भने $(x-c)$ उक्त बहुपदीयको गुणनखण्ड हुन्छ ।

भागको विधि (division algorithm) अनुसार यदि $f(x)$ लाई $(x-c)$ ले भाग गर्ने हो भने हामीले भागफल, $Q(x)$ र शेष $R(x)$ अथवा $f(x)$ बिच निम्न लिखित सम्बन्ध पाउँछौं । [$x=c$ राख्दा $f(c)=(x-c)Q(x)+R(x)$ अथवा $R(x)=f(c)$ हुन्छ ।]

$f(x)=(x-c).Q(x)+R(x)$

यदि, $f(c)=0$ भए $R(x)=0$ हुन्छ ।

$f(x)=(x-c).Q(x)$

त्यसैले $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड *(x-c)* हुन्छ ।

> उदाहरणका लागि $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$ मा $f(3)=0$ हुन्छ । त्यसैले x^3-27 को एउटा गुणनखण्ड (x-3) हुन्छ ।

गुणनखण्ड साध्यको बिलोम

यदि n डिग्रीको बहुपदीय $f(x)$ को गुणनखण्ड $(x-c)$ भए $f(c)=0$ हुन्छ ।

यहाँ, $f(x)=Q(x).(x-c)$

$x=c$ राख्दा, $f(c)=Q(c)\times(c-c)$

अथवा, $f(c)=Q(c)\times 0$

$=0$

उदाहरणहरू

1. गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग गरी $(x-1)$, बहुपदीय $3x^3+2x-5$ को गुणनखण्ड हो वा होइन यकिन गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ, $f(x)=3x^3+2x-5$

मानौँ,$(x-c)=x-1$

अथवा, $c=1$

गुणनखण्ड साध्यको कथनअनुसार,

$f(c)=0$

अथवा, $f(1)=0$

अथवा, $3\times1+2\times1-5$

$=3+2-5$

$=0$

$\therefore$ बहुपदीय $3x^3+2x-5$ को गुणनखण्ड $(x-1)$ हुन्छ ।

2. यदि x^3-kx^2+3x+6 को गुणनखण्ड $(x+1)$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $f(x)=x^3-kx^2+3x+6$ (मानौँ)

अब, $x+1$ लाई $x-\mathrm{c}$ सँग तुलना गर्दा

$c=-1$ हुन्छ ।

गुणनखण्ड साध्यको कथनअनुसार

$f(c)=0$

अथवा, $(-1)^3-k\times(-1)^2+3\times(-1)+6=0$

अथवा, $-1-k-3+6=0$

अथवा, $k = 4$

3. बहुपदीय $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ मा कति जोड्दा $(x-3)$ उक्त बहुपदीयको गुणनखण्ड हुन्छ ?

समाधान

मानौँ, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ मा k जोड्दा $(x-3)$ उक्त बहुपदीयको गुणनखण्ड हुन्छ ।

अब, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 + k$

यहाँ, (x-3) लाई (x-c) सँग तुलना गर्दा

c = 3 हुन्छ ।

गुणनखण्ड साध्यको कथनअनुसार

$f(c) = 0$

अथवा, $f(3) = 0$

अथवा, $3^3 - 6 \times 3^2 + 12 \times 3 - 7 + k = 0$

अथवा, $27 - 54 + 36 - 7 + k = 0$

अथवा, $k + 2 = 0$

अथवा, $k = -2$

$\therefore k = -2$

अतः आवश्यक जोड्नुपर्ने पद -2 हो ।

अभ्यास 1.2.4

1. (a) गुणनखण्ड साध्यको कथन लेख्नुहोस् ।

(b) $f(x) = (x-c) \times q(x) + r(x)$ मा $x - c$, $f(x)$को एउटा गुणनखण्ड भए शेष $r(x)$ कति हुन्छ ?

(c) $f(x), d(x)$ र $q(x)$ मा $f(x)$ ले n डिग्रीको बहुपदीय, $d(x)$ ले भाजक र $q(x)$ ले भागफललाई जनाउँछ भने यिनीहरूबिचको सम्बन्ध लेख्नुहोस्, जहाँ $d(x)$ ले $f(x)$ को गुणनखण्डलाई जनाउँछ ।

2. (a) $f(x) = x^3 - 27$ को एउटा गुणनखण्ड $(x-3)$ हुन्छ भनी गुणन साध्यको प्रयोग गरी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(b) गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग गरी $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ को गुणनखण्ड $x - 2$ हो/होइन भनी यकिन गर्नुहोस् ।

(c) गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग गरी $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 26x - 15$ का गुणनखण्डहरू $(x + 3)$, $(2x + 1)$, $(3x - 5)$ मध्ये कुन कुन हुन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (a) यदि बहुपदीय $4x^2 + mx + 8$ को एउटा गुणनखण्ड $(x + 2)$ भए m को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि बहुपदीय $x^3 - kx^2 + 3x + 6$ को एउटा गुणनखण्ड $(x + 1)$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि बहुपदीय, $f(x) = 2x^3 - ax^2 - 8x + 5$ को एउटा गुणनखण्ड $(x + 1)$ भए a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) बहुपदीय $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 5$ मा कति जोड्दा $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $(x + 3)$ हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) बहुपदीय $g(x) = x^3 + 28$ बाट कति घटाउँदा $g(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $x + 4$ हुन्छ ?

(c) बहुपदीय $3x^3 + 5x^2 - 5x + 7$ बाट कति घटाउँदा उक्त बहुपदीयको एउटा गुणन खण्ड $(x + 2)$ हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. गुणनखण्ड साध्य र खण्डीकरण सम्बन्धी एउटा छोटो रिपोर्ट तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

1.2.5 शेष साध्य र गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग (Use of the remainder theorem and factor theorem)

- $x^4 - 4$ का गुणनखण्ड के के होलान ?
- $x^3 - 19x + 30$ का गुणनखण्ड कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ होला ?
- शेष: साध्य र गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग खण्डीकरण र बहुपदीय समीकरण हल गर्दा हुन्छ कि हुँदैन ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

शेष साध्यको प्रयोगले भागका क्रियाहरू सजिलो र छिटो गर्न सकिन्छ । त्यस्तै शेष साध्यको प्रयोग गरी गुणनखण्ड साध्यसँग सम्बन्धित समस्याहरूलाई हल गर्न सकिन्छ । गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग गरी बहुपदीय समीकरणहरू हल गर्न सकिन्छ ।

यहाँ हामी गुणनखण्ड साध्य र शेष साध्यको प्रयोग गरी बहुपदीय समीकरणलाई हल गर्ने सम्बन्धी विषयमा छलफल गर्ने छौँ ।

उदाहरणहरू

1. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

समाधान

मानौँ, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

अचर पद, (-2) का सम्भावित गुणनखण्डहरू ± 1 र ± 2 हुन्छन् ।

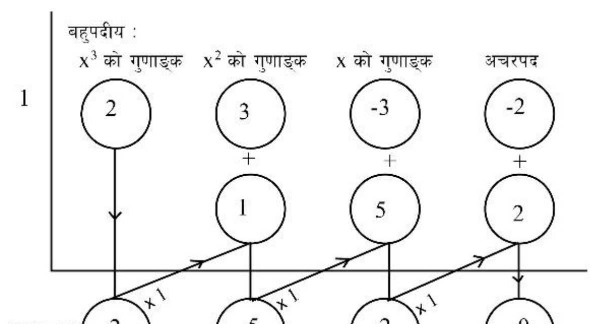
$x = 1$ राख्दा, $f(1) = 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2$

$= 2 + 3 - 3 - 2$

$= 0$ हुन्छ ।

त्यसैले शेष $f(1) = 0$ भएकाले गुणनखण्ड साध्यको कथनअनुसार $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $(x - 1)$ हो ।

सङ्क्षिप्त भाग विधि प्रयोग गर्दा,



त्यसैले,

भागफल $Q(x) = 2x^2 + 5x + 2$

$= 2x^2 + 4x + x + 2$

$= 2x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(2x + 1)$

$\therefore\ f(x) = (x-1) \times Q(x)$

$= (x-1)(x+2)(2x+1)$

2. **खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

$(x-1)(2x^2+15x+15)-21$

समाधान

मानौँ, $f(x) = (x-1)(2x^2+15x+15)-21$

$= 2x^3+15x^2+15x-2x^2-15x-15-21$

$= 2x^3+13x^2-36$

अचर पद, (-36) का सम्भावित गुणनखण्डहरू $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18$ र ±36 हुन्छन् ।

$f(x)$ मा $x=-2$ राख्दा $f(-2) = 2\times(-2)^3+13\times(-2)^2-36$

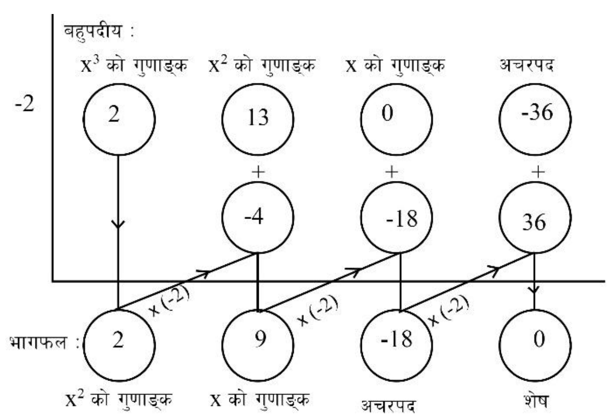
$= 2\times(-8)+13\times4-36$

$= -16+52-36$

$= 0$ हुन्छ ।

त्यसैले $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $(x+2)$ हो ।

सङ्क्षिप्त भाग विधिअनुसार



भागफल $= 2x^2+9x-18$

$= 2x^2+12x-3x-18$

$= 2x(x+6)-3(x+6)$

$= (x+6)(2x-3)$

त्यसैले, $2x^3+13x^2-36 = (x+2)(x+6)(2x-3)$.

3. **हल गर्नुहोस् :**

$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

समाधान

मानौँ, $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

यहाँ, +10 का सम्भावित गुणनखण्डहरू $\pm 1,\ \pm 2, \pm 5, \pm 10$ हुन्छन् ।

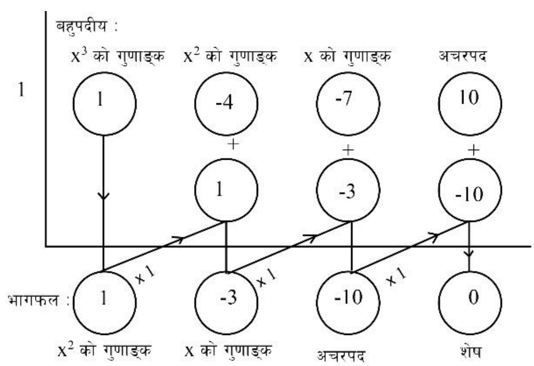
$f(x)$ मा $x = 1$ राख्दा, $f(1) = 1^3 - 4 \times 1^2 - 7 \times 1 + 10$

$= 1 - 4 - 7 + 10 = 0$ हुन्छ ।

गुणनखण्ड साध्यको कथनअनुसार

$f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $(x - 1)$ हुन्छ ।

फेरि, सङ्क्षिप्त भाग विधिबाट



यहाँ, भागफल $(Q(x) = x^2 - 3x - 10$

$= x^2 - 5x + 2x - 10$

$= x(x - 5) + 2(x - 5)$

$= (x - 5)(x + 2)$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

$= (x - 1)(x - 5)(x + 2)$

तर, $f(x) = 0$

अथवा, $(x - 1)(x - 5)(x + 2) = 0$

अथवा, $x - 1 = 0; x = 1$

$x - 5 = 0; x = 5$

$x + 2 = 0; x = -2$

$\therefore$ समाधान समूह $\{-2, 1, 5\}$ हुन्छ ।

अभ्यास 1.2.5

1. (a) यदि $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड a भए $f(a)$ को मान कति हुन्छ ?

   (b) बहुपदीय $f(x)$ को समाधान पत्ता लगाउनु भन्नाले के बुझिन्छ ?

2. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

   (a) $3x^3 - 19x^2 + 32x - 16$

   (b) $x^3 - 19x - 30$

   (c) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

3. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

   (a) $(x+1)(x^2 - 5x + 10) - 12$

   (b) $(x-1)(2x^2 + 15x + 15) - 21$

   (c) $(x-3)(x^2 - 5x + 8) - 4x + 12$

4. हल गर्नुहोस् :

   (a) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

   (b) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$

   (c) $2y^3 + 6 = 3y^2 + 11y$

   (d) $y^3 + 11y = 6y^2 + 6$

5. दुई ओटा साझा गुणनखण्डहरू भएका र डिग्री 4 भएका बहुपदीयहरू $f(x)$ र $g(x)$ लाई फलनको स्वरूपमा लेख्नुहोस् । $f(x)$ र $g(x)$ का अन्य गुणनखण्डहरू पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

1.3 अनुक्रम र श्रेणी (Squence and Series)

1.3.0 पुनरावलोकन (Review)

दिइएका सङ्ख्याको ढाँचा वा क्रम (pattern) अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(i) *5, 10, 15, 20, ...*

(ii) *4, 8, 16, 32, ...*

(iii) *1, 2, 4, 7, 11, ...*

(क) माथिको ढाँचा वा क्रमका सदस्यहरू कुन कुन नियमअनुसार बनेका छन् ?

(ख) के तीन ओटा ढाँचा वा क्रमका सदस्यहरू एउटै नियममा बनेका छन् ?

(ग) ती सङ्ख्याका ढाँचा वा क्रमको n औँ पद कति कति हुन्छ ?

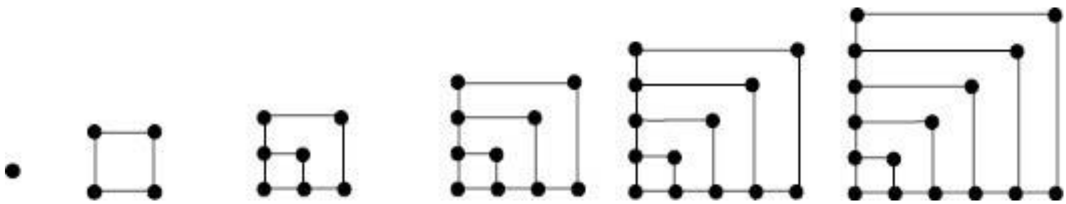
(घ) के माथिका सङ्ख्या ढाँचा वा क्रमहरू अनुक्रमहरू हुन् ?

(ङ) माथिको अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणी के के हुन्छ ?

माथि दिइएका सङ्ख्याका ढाँचा वा क्रमहरू कुनै न कुनै नियमअनुसार बनेका छन् । पहिलो समूहका सदस्यहरू अगिल्लो सङ्ख्याभन्दा क्रमशः *5* ले बढ्दै गएका छन् । दोस्रो ढाँचाका सदस्यहरू पहिलोभन्दा क्रमशः *2* गुणाले बढ्दै गएका छन् भने तेस्रो ढाँचामा सदस्य वा सङ्ख्याहरू क्रमशः *1, 2, 3...* ले बढ्दै गएका छन् । तसर्थ माथिका प्रत्येक सङ्ख्याको ढाँचा कुनै न कुनै नियममा आधारित भएर बनेकाले तीन ओटै समूह अनुक्रमहरू हुन् । यदि कुनै दिइएको अनुक्रम सीमित अनुक्रम *(finite sequence)* अनुरूप भएमा अनुक्रमका अगिल्ला पदहरूका आधारमा n औँ पद वा साधारण पद पत्ता लगाउन सकिन्छ । यदि अनुक्रमका सदस्य वा पदहरूलाई योगफल *(+)* वा घटाउ *(-)* चिह्नले जोडेमा त्यो श्रेणी हुन्छ, जस्तैः माथिका अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणीहरू $5 + 10 + 15 + 20 + ...$, $4 + 8 + 16 + ...$ र $1 + 2 + 4 + 7 + ...$ हुन्छन् । सामान्यतया यदि अनुक्रमका पदहरूलाई $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$ ले जनाइन्छ भने उक्त अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणी $S_n = t_1 + t_2 + t_3, ..., + t_n$ हुन्छ । जहाँ S_n भनेको पहिलो पद (t_1) देखि n औँ पद (t_n) सम्मको योगफल *(sum of first n^{th} term)* हो ।

समानान्तरीय अनुक्रम र श्रेणी *(Arithmetic Sequence and series)*

दिइएका चित्रहरूको ढाँचा अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

(क) माथिका चित्रहरूको ढाँचामा भएका थोप्लाहरू (dots) लाई अनुक्रममा कसरी लेख्न सकिन्छ ?

(ख) अनुक्रमको रूपमा लेख्दा सङ्ख्या वा पदहरूबिचको अन्तर के कति छ ?

(ग) चित्र नखिची दशौँ पद (t_{10}) कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(घ) के यो अनुक्रमको नियम पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ङ) यो अनुक्रमको साधारण पद वा n औँ पद (t_n) कति हुन्छ ?

माथिका *6* ओटा चित्रहरूमा भएका थोप्लाहरू *(Dots)* क्रमशः *1, 4, 7, 10, 13* र *16* ओटा छन् । यिनीहरूलाई अनुक्रमको रूपमा लेख्दा,

1, 4 , 7, 10, 13, 16 हुन्छ । यस अनुक्रममा भएका सङ्ख्या वा पदहरू क्रमशः *3* ले बढ्दै गएका छन् वा अन्तर *3* छ समान अन्तर $= 16 - 13 = 13 - 10 = 10 - 7 = 7 - 4 = 4 - 1 = 3$ हुन्छ ।

त्यसैगरी, अनुक्रमहरू *15, 25, 35, 45, 55* र *100, 90, 70, 60, 50* का समान अन्तर के कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

तसर्थ कुनै अनुक्रमको प्रत्येक पद अगिल्लो पदभन्दा निश्चित सङ्ख्या *(fixed number)* ले बढ्दै वा घट्दै गएमा त्यस्तो अनुक्रमलाई समानान्तरीय वा अङ्क गणितीय अनुक्रम *(arithmetic sequence)* भनिन्छ । यस अनुक्रममा अघिल्लो पदभन्दा बढी वा घटी हुने निश्चित सङ्ख्यालाई समान अन्तर *(common difference)* भनिन्छ, जस्तै : समानान्तरीय अनुक्रम *15, 25, 35, 45, 55* मा समान अन्तर $25 - 15 = 35 - 25 = 45 - 35 = 55 - 45 = 10$ हुन्छ । अनुक्रम *100, 90, 80, 70, 60, 50* मा समान अन्तर $90 - 100 = 80 - 90 = 70 - 80 = 60 - 70 = 50 - 60 = -10$ हुन्छ ।

समानान्तर अनुक्रममा समान अन्तरलाई d पहिलो पद, दोस्रो पद, तेस्रो पद .... n औँ पद लाई क्रमशः $t_1, t_2, t_3,...,t_n$ ले जनाइन्छ । त्यसैले, यदि $t_1, t_2, t_3,...,t_{n-1}, t_n$ एउटा समानान्तरीय अनुक्रम भए समान अन्तर $(d) = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 ..., t_n - t_{n-1}$ हुन्छ । माथिको समानान्तरीय अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणी $S_n = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$ हुन्छ ।

सामान्यतया समानान्तरीय. अनुक्रम समान अन्तर (d) = दोस्रो पद (t_2) - पहिलो पद (t_1) गरी निकालिन्छ ।

समानान्तर श्रेणीको साधारण पद (General Term of Arthmetic Sequence)

एक जना धावक जसका प्रत्येक पाइलाले पार गरेको जम्मा दुरी (फिटमा) यस प्रकार छ : *4, 8, 12, 16, 20, 24, ...*

उसले अन्तिम पाइलामा जम्मा कति दुरी पार गर्ला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, अनुक्रम *4, 8, 12, 16, 20, 24,....* छ । यो समानान्तरीय अनुक्रम हो । पहिलो पद $(t_1) = a = 4$

समान अन्तर $(d) =$ दोस्रो पद (t_2) –पहिलो पद $(t_1) = 8\text{-}4=4$

अब, पहिलो पद $(t_1)= 4 = 4+(1\text{-}1).4=a+(1\text{-}1).d$

दोस्रो पद $(t_2)=8 = 4+(2\text{-}1).4 = a+(2\text{-}1).d$

तेस्रो पद $(t_3)=12 = 4+(3\text{-}1).4 = a+(3\text{-}1).d$

चौथो पद $(t_4)=16 = 4+(4\text{-}1).4 = a+(4\text{-}1).d$

अन्त्यबाट दोस्रो पद $(t_n\text{-}1) = 4+[(n\text{-}1)\text{-}1].4 = a+[(n\text{-}1)\text{-}1].d$

अन्तिम पद (t_n) $= 4+(n\text{-}1)4=a+(n\text{-}1).d$

$= 4 + 4n - 4$

$= 4n$

तसर्थ उक्त धावकले अन्तिम पाइलामा जम्मा *4n* फिट दुरी पार गर्दछ । यहाँ *4n* लाई अनुक्रम *4, 8, 12, 16, 20, ...* को साधारण पद भनिन्छ । यसलाई t_n ले जनाइन्छ ।

$\therefore$ साधारण पद $(t_n) = a+(n\text{-}1). d$ हुन्छ ।

अनुक्रमहरू *20, 30, 40, 50, 60* र *55, 45, 35, 25, 15, 5* को साधारण पद (t_n) कति कति हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।

उदाहरणहरू

1. समानान्तरीय अनुक्रम *7, 11, 15, 19, 23, 27, 31* को समान अन्तर र दसौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(t_1) = a =7$

दोस्रो पद $(t_2)=11$

समान अन्तर $(d) = ?$

दसौँ पद $(t_{10}) = ?$

अब, समान अन्तर $(d) = t_2 - t_1$

$= 11\text{-}7 = 4$

सूत्रअनुसार $t_n = a+(n-1).d$

$\therefore\ t_{10} = 7+(10-1).4$

$t_{10} = 7+9\times4$

$= 7+36$

$= 43$

तसर्थ, उक्त अनुक्रमको समान अन्तर 4 र दसौँ पद 43 हुन्छ ।

2. समानान्तरीय श्रेणी $2+5+8+....$को कुन पद 50 हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, दिइएको श्रेणी $2+5+8......$

पहिलो पद $(a) = 2$

समान अन्तर $(d) = 5-2 = 3$

अन्तिम पद $(t_n) = 50$

पद सङ्ख्या $(n) = ?$

अब सूत्रअनुसार,

$t_n = a+(n-1)\,.\,d$

अथवा, $50 = a+(n-1)\,.d$

अथवा, $50 = 2+(n-1)\,.3$

अथवा, $50 = 2 + 3n-3$

अथवा, $50 = 3n-1$

अथवा, $50+1=3n$

अथवा, $\frac{51}{3} = n$

$\therefore n = 17$

अतः उक्त श्रेणीको 17 औँ पद 50 हुन्छ ।

3. एउटा समनान्तरीय अनुक्रमको तेस्रो र नवौँ पदहरू क्रमशः 20 र 5 भए,

(क) पहिलो पद र समान अन्तर निकाल्नुहोस् ।

(ख) पन्ध्रौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(क) यहाँ, पहिलो पद $= a$ र समान अन्तर $= d$ भए,

n औँ पद $(t_n) = a+(n-1).d$ ...... (i)

तेस्रो पद $(t_3) = 20$

नवौँ पद $(t_9) = 5$

पन्ध्रौँ पद $(t_{15}) = ?$

अब, $t_3 = a+ (3-1).d$ $[\because t_n = a + (n-1).d]$

अथवा, $20= a+2d$ .... (ii)

$t_9 = a+ (9-1).d$

अथवा, $5 = a+8d$ .... (iii)

समीकरण *(ii)* र *(iii)* बाट,

$$\begin{array}{l} 20=a+2d \\ \underline{5\ = a + 8d} \\ 15 = -6d \end{array}$$

अथवा $d = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$

d को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$20 = a +2 \times -\frac{5}{2}$

अथवा $20= a-5$

अथवा $a = 20+5$

$\therefore a = 25$

तसर्थ पहिलो पद *25* र समान अन्तर $-\frac{5}{2}$ हुन्छ ।

(ख) सूत्रअनुसार,

$t_n = a + (n-1) .d$

$t_{15} = 25 + (15-1) \times -\frac{5}{2}$

$= 25 + 14 \times -\frac{5}{2}$

$=25-35$

$= -10$

तसर्थ उक्त अनुक्रमको पन्ध्रौँ पद *-10* हुन्छ ।

4. यदि समानान्तरीय अनुक्रमको सातौँ पद दोस्रो पदको चार गुणा छ र दसौँ पद *29* छ भने उक्त अनुक्रम पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, पहिलो पद $= a$ र समान अन्तर $= d$ छ ।

यहाँ, सातौँ पद $(t_7) = 4 \times$ दोस्रो पद (t_2)

दसौँ पद $(t_{10}) = 29$

सूत्रअनुसार,

$t_n = a + (n-1).d$

$n = 7$ राख्दा, $t_7 = a + (7-1).d$

$\therefore t_7 = a + 6d$ .... (i)

$n = 2$ राख्दा $t_2 = a + (2-1).d$

$\therefore t_2 = a + d$ .... (ii)

प्रश्नअनुसार, $t_7 = 4\, t_2$

अथवा, $a+6d = 4(a+d)$

अथवा, $a+6d = 4a + 4d$

अथवा, $4a - a = 6d - 4d$

अथवा, $3a = 2d$

$\therefore a = \frac{2}{3}d$

फेरि, $t_{10} = a + (10-1).d$

$29 = a + 9d$ ....(iii)

समीकरण (iii) मा a को मान राख्दा,

$29 = \frac{2}{3}d + 9d$

अथवा, $29 = \frac{2d+27d}{3}$

अथवा, $87 = 29d$

अथवा, $d = \frac{87}{29} = 3$

$\therefore d = 3$

अब, पहिलो पद $(t_1) = a = 2$

दोस्रो पद $(t_2) = a+d = 2+3 = 5$

तेस्रो पद $(t_3) = a+2d = 2+2\times3 = 8$

चौथो पद $(t_4) = a+3d = 2+3\times3 = 11$

अतः माथिका पदहरूलाई अनुक्रमको रूपमा राख्दा *2, 5, 8, 11 ....* हुन्छ ।

अङ्कगणितीय मध्यमा (Arithmetic mean)

दिइएका समानान्तरीय अनुक्रम अध्ययन गर्नुहोस् :

(क) $10, \underbrace{20}_{\text{मध्यमा}}, 30,$ (ख) $6, \underbrace{10, 14}_{\text{मध्यमाहरू}}, 18$ (ग) $-30, \underbrace{-25, -20, -15}_{\text{मध्यमाहरू}}, -10$

माथिको अनुक्रमका आधारमा मध्यमा भनेको के हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

माथिको पहिला अनुक्रममा पहिलो पद *(10)* र अन्तिम पद *(30)* का बिचमा *20* छ । त्यसैले यहाँ *20* समानान्तरीय मध्यमा हो । दोस्रो अनुक्रममा पहिलो पद *(6)* र अन्तिम पद *(18)* बिचका पदहरू *10* र *14* समानान्तरीय मध्यमाहरू हुन् । त्यसै गरी तेस्रो अनुक्रममा पहिलो पद *(-30)* र अन्तिम पद *(-10)* बिचमा पर्ने पदहरू *-25, -20, -15* समानान्तरीय मध्यमाहरू हुन् ।

तसर्थ, समानान्तरीय अनुक्रमका दुवै पदहरू (पहिलो र अन्तिम) बिचको पद वा पदहरूलाई समानान्तरीय मध्यमा *(arithmetic mean)* भनिन्छ । समानान्तरीय मध्यमाहरूलाई m ले सङ्केत गरिन्छ ।

तलको समानान्तरीय अनुक्रममा मध्यमाहरू कुन कुन हुन् ? छलफल गर्नुहोस् :

(i) *100, 200, 300, 400*

(ii) *2, 8, 12, 20, 26, 32*

दुई ओटा पदहरू a र b का बिचमा एउटा समानान्तरीय मध्यमा (m)

मानौँ, समानान्तरीय अनुक्रमका पदहरू a, m, b छन् ।

यहाँ, पहिलो पद $(t_1) = a$

दोस्रो पद $(t_2) = m$

तेस्रो पद $(t_3) = b$

उक्त अनुक्रमको अन्तर समान हुने भएकाले $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

अथवा, $m-a = b-m$

अथवा, $2m = a+b$

$\therefore m = \frac{a+b}{2}$

तसर्थ, a र b बिचको एउटा मध्यमा $\frac{a+b}{2}$ हुन्छ ।

5. दुई सङ्ख्याहरू 16 र 32 बिचको एउटा समानान्तरीय मध्यमा निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 16$

अन्तिम पद $(b) = 32$

मध्यमा $(m) = ?$

सूत्रअनुसार, समानान्तरीय मध्यमा $(m) = \frac{a+b}{2}$

$$= \frac{16+32}{2}$$

$$= \frac{48}{2}$$

$$= 24$$

तसर्थ, *16* र *32* बिचको मध्यमा *24* हुन्छ ।

दुई ओटा पदहरूको बिचमा n ओटा समानान्तरीय मध्यमाहरू

मानौँ, दुई पदहरू a र b का बिचमा पर्ने n ओटा मध्यमाहरू $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ छन् ।

यहाँ, $a, m_1, m_2, m_3, ...m_n, b$ समानान्तरीय अनुक्रम हुन्छ ।

पहिलो पद $(t_1) = a$

अन्तिम पद $(t_2) = b$

मध्यमा सङ्ख्या $= n$ र जम्मा पद सङ्ख्या $= n+2$

सूत्रअनुसार, $t_n = a+(n-1).d$

अथवा, $b = a+(n+2-1).d$

अथवा, $b-a = (n+1).d$

$$\therefore d = \frac{b-a}{n+1}$$

अब, पहिलो मध्यमा $(m_1) =$ दोस्रो पद $(t_2) = a+d = a+\frac{b-a}{n+1}$

दोस्रो मध्यमा $(m_2) =$ तेस्रो पद $(t_3) = a+2d = a+2\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

तेस्रो मध्यमा $(m_3) =$ चौथो पद $(t_4) = a+3d = a+3\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

....

$\therefore$ अन्तिम मध्यमा $(m_n) = (n+1)$ औँ पद $(t_n+1) = a+n\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

तसर्थ, a र b को बिचको n औँ मध्यमा $m_n = a + nd$ हुन्छ ।

6. दुई ओटा पदहरू -3 र 17 का बिचमा 3 ओटा समानान्तरीय मध्यमा भर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = -3$

अन्तिम पद $(b) = 17$

मध्यमा सङ्ख्या $(n) = 3$

अब, समान अन्तर $(d) = \frac{b-a}{n+1} = \frac{17-(-3)}{3+1} = \frac{20}{4} = 5$

तीन ओटा मध्यमाहरू m_1, m_2 र m_3 मान्दा,

$m_1 = a + d = -3 + 5 = 2$

$m_2 = a + 2d = -3 + 2 \times 5 = 7$

$m_3 = a + 3d = -3 + 3 \times 5 = 12$

अतः -3 र 17 को बिचका 3 मध्यमाहरू $2, 7$ र 12 हुन् ।

7. दुई ओटा पदहरू 2 र 37 का बिचमा भरिएका समानान्तरीय मध्यमाहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् जहाँ, दोस्रो र अन्तिम मध्यमाको अनुपात $3:8$ छ ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 2$

अन्तिम पद $(b) = 37$

दोस्रो मध्यमा (m_2) र अन्तिम मध्यमा (m_n) को अनुपात $= 3:8$

अथवा, $\frac{m_2}{m_n} = \frac{3}{8}$

मानौँ, मध्यमा सङ्ख्या $= n$

अब, समान अन्तर $(d) = \frac{b-a}{n+1} = \frac{37-2}{n+1} = \frac{35}{n+1}$

दोस्रो मध्यमा $(m_2) = a+2d$

$= 2+2.\frac{35}{n+1}$

$= \frac{2n+2+70}{n+1}$

$= \frac{2n+72}{n+1}$

अन्तिम मध्यमा $(m_n) = b - d = 37 - \frac{35}{n+1}$

$= \frac{37n+37-35}{n+1}$

$$= \frac{37n+2}{n+1}$$

प्रश्नअनुसार,

$m_2{:}m_n = 3{:}8$

अथवा, $\frac{\frac{2n+72}{n+1}}{\frac{37n+2}{n+1}} = \frac{3}{8}$

अथवा, $\frac{2n+72}{37n+2} = \frac{3}{8}$

अथवा, $111n + 6 = 16n + 576$

अथवा, $95\,n = 570$

अथवा, $n = \frac{570}{95} = 6$

तसर्थ उक्त अनुक्रममा मध्यमा 6 ओटा छन् ।

अभ्यास 1.3.1

1. (a) अनुक्रम भनेको के हो ? उदाहरणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

   (b) अनुक्रम र श्रेणीमा के भिन्नता छ ?

   (c) समानान्तरीय अनुक्रमलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।

   (d) समानान्तरीय अनुक्रमका विशेषताहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।

   (e) समानान्तरीय मध्यममा भनेको के हो ? समानान्तरीय मध्यमा निकाल्ने सूत्रहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।

2. तल दिइएका मध्ये कुन कुन समानान्तरीय अनुक्रम हुन् र कुन कुन होइनन् ? कारण पनि उल्लेख गर्नुहोस् ।

   (a) $8, 13, 18, 23, \ldots$

   (b) $6, 3, 0, -3, -6, \ldots$

   (c) $7, 6\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}, \ldots$

   (d) $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2$

   (e) $18, 15, 12, 9, 6, 3$

3. दिइएका समानान्तरीय अनुक्रमको समान अन्तर, साधारण पद (t_n), र दसौँ पद निकाल्नुहोस् :

   (a) $20, 26, 32, 38, \ldots$

(b) $1, -2, -5, -8, \ldots$

(c) $1, 5, 9, 13, \ldots$

(d) $\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{17}{3}, \ldots$

4. दिइएको अवस्थामा समानान्तरीय अनुक्रमको समान अन्तर *(d)* अथवा पहिलो पद *(a)* पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) समान अन्तर $(d) = 2$ र सातौँ पद $(t_7) = 14$

   (b) समान अन्तर $(d) = 3$ र दसौँ पद $(t_{10}) = 29$

   (c) पहिलो पद $(a) = 6$ र छैटौँ पद $(t_6) = 21$

   (d) पहिलो पद $(a) = -2$ र बिसौँ पद $(t_{20}) = 74$

   (e) पहिलो पद $(a) = \frac{4}{5}$ र पन्ध्रौँ पद $(t_{15}) = 8\frac{4}{5}$

5. तल दिइएका श्रेणीहरूको पद सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $5 + 8 + 11 + \ldots\ldots\ldots + 320$

   (b) $7 + 5\frac{1}{2} + 4 + 2\frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots -23$

   (c) $4 + 11 + 18 + \ldots\ldots\ldots + 74$

   (d) $2 + 8 + 14 + 20 + \ldots\ldots\ldots + 80$

   (e) $\frac{4}{5} + \frac{38}{35} + \frac{48}{35} \ldots\ldots\ldots + 8\frac{4}{5}$

6. निम्न लिखित अवस्थामा समानान्तरीय अनुक्रमको पहिलो पद (a) र समान अन्तर (d) पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) पाँचौँ पद $(t_5) = 22$ र आठौँ पद $(t_8) = 34$

   (b) चौथो पद $(t_4) = 13$ र छैटौँ पद $(t_6) = 7$

   (c) पाँचौँ पद $(t_5) = 13$ र दसौँ पद $(t_{10}) = 28$

   (d) दसौँ पद $(t_{10}) = 23$ र बत्तिसौँ पद $(t_{32}) = 67$

7. (a) समानान्तरीय अनुक्रमको तेस्रो र तेरौँ पद क्रमशः *40* र *0* भए कुन पदको मान *28* हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) समानान्तरीय अनुक्रमको तेस्रो र बयालिसौँ पद क्रमशः *10* र *88* भए कुन पदको मान *24* हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) समानान्तरीय अनुक्रमको छैटौँ र सत्रौँ पद क्रमशः *19* र *41* भए सयौँ पदको मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) समानान्तरीय अनुक्रमको सातौ र एकाउन्नौँ पद क्रमशः *-3* र *-355* भए बिसौँ पदको मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. (a) कुनै समानान्तरीय अनुक्रममा $5t_5 = 9t_9$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $t_{14} = 0$

(b) कुनै समानान्तरीय अनुक्रममा $\frac{t_7}{t_{11}} = \frac{11}{7}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $t_{18} = 0$

9. यदि समानान्तरीय श्रेणीको दसौँ पदको दस गुणासँग पन्ध्रौँ पदको पन्ध्र गुणा बराबर छ र पहिलो पद *48* छ भने उक्त अनुक्रमको समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. (a) एउटा समानान्तरीय श्रेणीमा रहेका तीन ओटा पदहरूको योगफल *36* छ र तिनीहरूको गुणनफल *140* छ भने ती पदहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एउटा समानान्तरीय श्रेणीमा रहेका तीन ओटा सङ्ख्याहरूको योगफल *45* छ र तिनीहरूको गुणनफल *1875* छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. (a) श्रेणी $14 + 12 + 10 + \ldots$ को n औँ पदसँग श्रेणी $20 + 17 + 14 + \ldots$ को n औँ पद बराबर छ भने n को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) श्रेणी $-9 - 6 - 3 - \ldots$ को n औँ पदसँग श्रेणी $16 + 14 + 12 + \ldots$ को n औँ पद बराबर छ भने n को मान पत्ता लगाउनुहोस्

12. दिइएको अवस्थामा दोस्रो पदको मान निकाल्नुहोस् :

(a) पहिलो पद $= 7$ र तेस्रो पद $= 17$

(b) पहिलो पद $= -20$ र तेस्रो पद $= 60$

(c) पहिलो पद $= \frac{4}{5}$ र तेस्रो पद $= \frac{11}{5}$

13. तलको अवस्थामा तोकिएको समानान्तरीय मध्यमा निकाल्नुहोस् :

(a) छैटौँ पद $= -3$ र आठौँ पद $= 9$, सातौँ पद $= ?$

(b) चौधौँ पद $= 30$ र सोरौँ पद $= 40$, पन्ध्रौँ पद $= ?$

(c) नवौँ पद $= 28$ र एघारौँ पद $= 36$, दसौँ पद $= ?$

14. निम्नअनुसार समानान्तरीय मध्यमा निकाल्नुहोस्:

(a) *2* र *20* का बिचमा *5* ओटा

(b) *-18* र *2* का बिचमा *4* ओटा

(c) *1* र *16* का बिचमा *2* ओटा

(d) $\frac{1}{2}$ र $\frac{7}{2}$ का बिचमा *5* ओटा

15. दिइएको समानान्तर अनुक्रमबाट, x को मान निकाल्नुहोस् :

(a) $7, x, 11$

(b) $2x+1, 2x-1, 3x+4$

(c) $x+1, x+5, 3x+1$

16. (a) पदहरू 2 र 11 का बिचमा पर्ने मध्यमाहरूको सङ्ख्या निकाल्नुहोस्, जहाँ पहिलो र अन्तिम मध्यमाको अनुपात $7:19$ छ ।

(b) पदहरू 5 र 35 का बिचमा n ओटा मध्यमाहरू छन् । दोस्रो र अन्तिम मध्यमाको अनुपात $1:4$ छ भने n को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

17. (a) एउटा मिटर ट्याक्सीमा सुरुमा रु. 5 र त्यसपछि प्रत्येक $1\,km$ मा रु. 9 दरले भाडा उठ्छ भने $10\,km$ यात्रा गर्दा जम्मा कति रुपियाँ तिर्नुपर्ला ?

(b) एक जना कर्मचारीको मासिक तलब रु. $40,000$ छ । वार्षिक रु. $2,000$ का दरले उसको तलबमा वृद्धि हुँदै जान्छ भने एघारौँ वर्षमा उसको. मासिक तलब कति पुग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

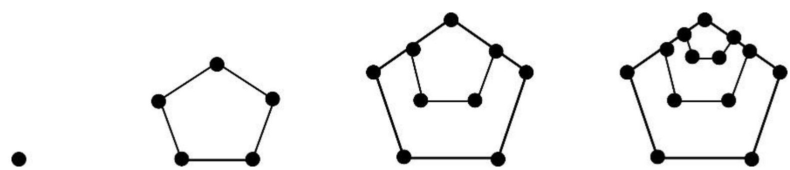
18. यदि कुनै समानान्तरीय अनुक्रमको p औँ, q औँ र r औँ पदहरू क्रमशः a, b र c भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $p(b-c)+q(c-a)+r(a-b)=0$

19. दिइएको सङ्ख्याहरूको ढाँचामा

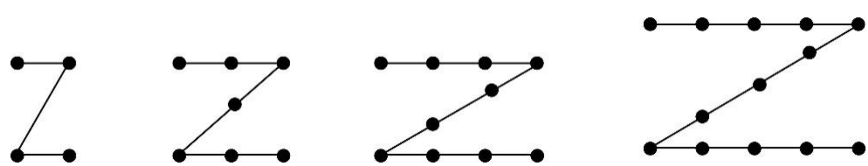
(a) n औँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) दसौँ पद निकाल्नुहोस् ।

(i)



(ii)



1.3.2 समानान्तरीय श्रेणीको योगफल (sum of arithemetic series)

एउटा जुत्ता कारखानाले 8 वर्षमा उत्पादन गरेको जुत्ता सङ्ख्या निम्नअनुसार छ :

वर्ष (वि.स.)	2066	2067	2068	2069	2070	2071	2072	2073
जुत्ता सङ्ख्या	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400

माथिको तथ्याङ्कका आधारमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) आठ वर्षमा उक्त कारखानाले जम्मा कति जुत्ता उत्पादन गरेछ ?

(b) यही दरमा पन्ध्र वर्षमा जम्मा कति जुत्ता उत्पादन गर्ला ?

यहाँ 8 वर्षको उत्पादित जुत्ता सङ्ख्यालाई श्रेणीमा राख्दा, $1000 + 1200 + ... + 2400,$

8 वर्षमा उत्पादन भएका जम्मा जुत्ता सङ्ख्यालाई S_8 ले जनाउँदा,

$S_8 = 1000+1200+1400+1600+1800+2000+2200+2400=13600.....$ (i)

अथवा,

$S_8 = 2400+2200+2000+1800+1600+1400+1200+1000 =13,600.....$ (ii)

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$2s_8 = 3400 + 3400 + 3400 + 3400 + 3400 + 3400 + 3400 + 3400$

अथवा, $2. s_8 = 8 \times 3400$

अथवा, $2. s_8 = 8 \times 3400 = \frac{8}{2}(1000 + 2400)$

$\therefore\ s_8 = \frac{8}{2}(a+1)$ जहाँ a = पहिलो वर्ष उत्पादन भएका जुत्ता सङ्ख्या l = अन्तिम (आठौँ) वर्ष उत्पादन भएका जुत्ताको सङ्ख्या हो ।

तसर्थ, यदि कुनै पनि स्थानान्तरीय अनुक्रमको पहिलो पद $= a,$ समान अन्तर $= (d),$ अन्तिम पद $= l$ र पद सङ्ख्या $= n$ भए,

पहिलो n ओटा पदहरूको योगफल

$(S_n)= a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+....(l-d)+l....$ (i)

समीकरण (i) लाई विपरीत क्रममा राख्दा,

$S_n= l+(a-d)+.........+(a+2d)+(a+d)+a....$ (ii)

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा,

$2S_n= (a+l)+(a+l)+(a+l)+....(a+l)$

अथवा, $2s_n=n(a+l)$

$\therefore s_n = \frac{n}{2} (a+l)$........... (iii)

हामीलाई थाहा छ,

अन्तिम पद $(t_n) = l = a+(n-1).d$ .... (iv)

समीकरण *(iii)* र *(iv)* बाट,

$s_n = \frac{n}{2} [a+a + (n-1).d]$

$= \frac{n}{2} [2a+(n-1).d]$

$\therefore s_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1).d]$

माथिको विवरणमा सुरु वर्ष उत्पादन गरेका जुत्ता सङ्ख्या $= 1000$ प्रति वर्ष थप उत्पादन जुत्ता सङ्ख्या $(d) = 200$ भएकाले *15* वर्षमा उत्पादन हुने जम्मा जुत्ता सङ्ख्या $s_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1).d]$ सूत्र प्रयोग गरी निकालिन्छ ।

$s_n = \frac{15}{2} [2\times 1000 + (15-1).200]$

$= \frac{15}{2} [2000 + 2800]$

$= \frac{15}{2} \times 4800$

$= 36,000$

अतः *15* वर्षमा उत्पादन गर्ने जुत्ता *36,000* हुने छ ।

पहिलो n ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको योगफल (Sum of the first n natural numbers)

पदहरू *1, 2, 3, 4, ..., n* पहिलो *n* ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरू हुन् । यो एउटा समानान्तरीय अनुक्रम हो । उक्त अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणी $1+2+3+.....+n$ हुन्छ । उक्त योगफललाई s_n ले जनाउँदा,

$s_n = 1+2+3+ ....+n$

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 1$, समान अन्तर $(d) = 2-1 = 1$

पद सङ्ख्या $(n) = n$

अब, सूत्रअनुसार,

$s_n = \frac{n}{2} [2a+(n-1).d]$

$= \frac{n}{2} [2\times 1+(n-1).1]$

$= \frac{n}{2} (2+ n-1)$

$= \frac{n}{2} (n+1)$

अतः पहला *n* ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको योगफल $s_n = \frac{n}{2} (n+1)$ हुन्छ ।

पहिलो n ओटा जोर/बिजोर सङ्ख्याहरूको योगफल (sum of the first n even/ odd numbers)

2, 4, 6, ... 2n पहिलो *n* ओटा जोर सङ्ख्याहरू हुन्, मानौँ, $S_n = 2 + 4 + 6 + ... +2n = n(n+1)$ कसरी ? छलफल गर्नुहोस् ।

त्यसै गरी पहिलो *n* ओटा बिजोर सङ्ख्याहरू *3,5,7 ....,* *(2n-1)* उक्त सङ्ख्याहरूको योगफल $s_n=1+3+5+7+.....+(2n-1)$

$\therefore s_n = n^2$ (कसरी ?) छलफल गर्नुहोस् ।

विद्यार्थीहरूलाई बिजोर र जोर सङ्ख्याहरूको श्रेणी बनाउन लगाई योगफलसमेत निकाल्न लगाउन सकिन्छ ।

उदाहरणहरू

1. श्रेणी *2+4+6+.........* का *20* ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद (a) = 2

समान अन्तर (d) = 4–2 = 2

पद सङ्ख्या (n) = 20

20 पदहरूको योगफल (s_{20}) = ?

सूत्रअनुसार,

$$s_n = \frac{n}{2}[2a+ (n-1).d]$$

$$= \frac{20}{2}[2\times2 + (20-1)\times2]$$

$$= 10 [4+38]$$

$$= 420$$

तसर्थ, *20* ओटा पदहरूको योगफल *420* हुन्छ ।

2. पहिलो *60* ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मानौँ, पहिलो *60* ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याको योगफल $= S_n$ छ ।

$s_n = 1+2+3+ ....+60$

जम्मा पद सङ्ख्या $(N) = 60$

सूत्रअनुसार,

$$s_n=\frac{n}{2}(n+1)$$

$$s_{60}=\frac{60}{2}(60+1) = 30\times 61=1830$$

3. श्रेणी $2+4+6+.....30$ ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो 30 ओटा जोर सङ्ख्याहरूको योगफल (s_n) भए

$S_n = 2+4+6+....30$ ओटा पदहरू

पद सङ्ख्या $(n) = 30$

अब, सूत्रअनुसार,

$S_n = n(n+1)$

$= 30\,(30+1)$

$= 30 \times 31$

$= 930$

अर्को तरिका

पहिलो पद $(a) = 2$

समान अन्तर $(d) = 4-2 = 2$

पद सङ्ख्या $(n) = 30$

जम्मा योगफल $(s_{30}) = ?$

सूत्रअनुसार,

$s_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1).d\,]$

$\therefore s_{30} = \frac{n}{2}\,[2\times 2+(30-1)\times 2\,]$

$= 15\,(4+58)$

$= 930$

4. पहिलो पद 16 र समान अन्तर 4 भएको समानान्तर श्रेणीको योगफल 120 छ भने उक्त श्रेणीमा पद सङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 16$

समान अन्तर $(d) = 4$

पदहरूको योगफल $(s_n) = 120$

पद सङ्ख्या $(n) = ?$

सूत्रअनुसार,

$s_n = \frac{n}{2} [2a+(n-1).d]$

अथवा, $120 = \frac{n}{2} [2\times 16+(n-1).4]$

अथवा, $240 = n [32+4n-4]$

अथवा, $240 = n [28+4n]$

अथवा, $240 = 28n+4n^2$

अथवा, $60 = 7n+n^2$

अथवा, $n^2+7n-60 = 0$

अथवा, $n^2+12n-5n-60 = 0$

अथवा, $n^2+(n+12)-5(n+12) = 0$

अथवा, $(n+12)(n-5) = 0$

अथवा, $n = -12, 5$

पद सङ्ख्या n ऋणात्मक नहुने भएकाले, $n = 5$ हुन्छ ।

अतः पद सङ्ख्या $(n) = 5$ हुन्छ ।

5. यदि कुनै समानान्तरीय श्रेणीको पाँचौं पद र बारौँ पद क्रमशः 17 र 45 छन् भने पहिलो 15 पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

मानौँ, अनुक्रमको पहिलो पद र समान अन्तर क्रमशः a र d छन् ।

यहाँ, पाँचौँ पद $(t_5) = 17$ र

बारौँ पद $(t_{12}) = 45$

पहिलो 15 पदको योगफल $(s_{15}) = ?$

अब, सूत्रअनुसार,

$t_5 = a+(n-1).d$

अथवा, $t_5 = a+(5-1).d$

अथवा, $17 = a+4d$

अथवा, $a = 17-4d$ ....(i)

फेरि, $t_{12} = a+(12-1).d$

अथवा, $45 = a+11d$

$\therefore a = 45 - 11d$ ....(ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$45 - 11d = 17 - 4d$

अथवा, $45 - 17 = 11d - 4d$

अथवा, $28 = 7d$

अथवा, $d = \frac{28}{7}$

$\therefore d = 4$

d को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$a = 17 - 4\times 4$

$= 17 - 16$

$\therefore a = 1$

अब,

$s_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$s_{15} = \frac{15}{2}\{2\times 1 + (15-1)\times 4\}$

$= \frac{15}{2}(2\times 56)$

$= \frac{15}{2}\times 58$

$= 435$

अतः उक्त अनुक्रमको पहिलो 15 ओटा पदहरूको योगफल 435 हुन्छ ।

6. एउटा समानान्तर श्रेणीका पहिला 10 ओटा पदहरूको योगफल 520 छ । यदि उक्त श्रेणीको सातौँ पद तेस्रो पदको दोब्बर छ भने पहिलो पद र समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, अनुक्रमको पहिलो पद $= a$ र समान अन्तर $= d$ छ ।

यहाँ, पहिला दस पदहरूको योगफल $(s_{10}) = 520$

सूत्रअनुसार,

$s_{10} = \frac{10}{2}\{2a + (10-1).d\}$

अथवा, $520 = 5(2a + 9d)$

अथवा, $104 = 2a + 9d$..........(i)

फेरि, सातौँ पद = 2 x तेस्रो पद

अथवा, $t_7 = 2t_3$

अथवा, $a + 6d = 2(a+2d)$

अथवा, $a + 6d = 2a+4d$

अथवा, $a = 2d$ ....(ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट,

$2 \times 2d + 9d = 104$

अथवा, $13d = 104$

अथवा, $d = \frac{104}{13}$

$\therefore d = 8$

d को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$a = 2d$

$= 2\times8 = 16$

अतः पहिलो पद $(a) = 16$ र समान अन्तर $(d) = 8$ हुन्छ ।

अभ्यास 1.3.2

1. निम्न श्रेणीहरूको योगफल निकाल्नुहोस् :
   (a) $4+7+10+.......10$ ओटा पदहरू
   (b) $8+5+2+.......17$ ओटा पदहरू
   (c) $12+9+6+.......32$ ओटा पदहरू
   (d) $1+4+7+.......+34$
   (e) $2.01+2.02+2.03+.......+3.00$
   (f) $7+ 8\frac{1}{4} + 9\frac{1}{2} +.......+17$

2. (a) पहिलो पद 4 र समान अन्तर 5 भएको समानान्तरीय श्रेणीका पहिला 20 पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।
   (b) यदि कुनै समानान्तरीय श्रेणीको पहिलो पद 3 र अन्तिम पद 98 छ भने पहिलो 20 ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।
   (c) पहिलो पद 3 र 10 ओटा पदहरूको योगफल 210 भएको समानान्तरीय श्रेणीको समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (a) चौथो पद *7* र बारौँ पद *39* भएको एउटा समानान्तरीय श्रेणीको

(i) पहिलो पद र समान अन्तर निकाल्नुहोस् ।

(ii) पहिला *15* पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

(b) पाँचौँ पद र दसौँ पद क्रमशः *17* र *42* भएको समानान्तरीय श्रेणीको,

(i) समान अन्तर र पहिलो पद निकाल्नुहोस् ।

(ii) पहिलो *20* ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

4. (a) यदि कुनै समानान्तरीय अनुक्रमको छैटौँ पद *64* छ भने पहिला *11* ओटा पदहरूको योगफल कति हुन्छ ?

(b) यदि कुनै समानान्तरीय अनुक्रमको सोरौँ पद *59* छ भने पहिलो *31* ओटा पदहरूको योगफल कति हुन्छ ?

5. एउटा समानान्तरीय श्रेणीको पहिलो र अन्तिम पद क्रमशः *2* र *29* छ यदि त्यो श्रेणीको योगफल *155* भए,

(a) पद सङ्ख्या र समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि सो श्रेणीमा थप *3* ओटा पदहरू भएका भए अन्तिम पद र योगफल निकाल्नुहोस् ।

6. (a) एउटा समानान्तरीय अनुक्रमको पहिलो *6* ओटा पदहरूको योगफल *42* छ । दसौँ पद र तिसौँ पदको अनुपात *1:3* छ भने पहिलो पद र तेरौँ पद निकाल्नुहोस् ।

(b) एउटा समानान्तरीय श्रेणीको पहिलो दस पदहरूको योगफल *50* छ र पाँचौँ पद दोस्रो पदको तेब्बर भए पहिलो पद र पहिलो *20* पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

7. योगफल निकाल्नुहोस् :

(a) सुरुका *50* ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको

(b) *1* देखि *100* सम्मका *5* ले निशेष भाग जाने सङ्ख्याहरूको

(c) सुरु *40* ओटा जोर सङ्ख्याहरूको

8. मान निकाल्नुहोस् :

(a) $\sum_{n=2}^{11}(n+7)$ (b) $\sum_{k=3}^{8}(4k-1)$ (c) $\sum_{n=1}^{6}(5n^2+2)$

9. (a) एउटा समानान्तरीय श्रेणीका सुरुका तीन पदहरू $p+2, 2p-1$ र $p+6$ भए p को मान र सुरुका *5* ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

(b) $2(k-1), k+2$ र $3k$ एउटा समानान्तरीय श्रेणीका तीन ओटा क्रमगत पदहरू भए k को मान निकाल्नुहोस् । उक्त श्रेणीका पहिला *10* ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

10. (a) एक जना महिलाले पहिलो महिनामा रु. 32 बचत गर्छिन । अर्को महिनामा रु. 36 र तेस्रो महिनामा रु. 40 बचत गर्छिन । यदि उनले यही क्रममा बचत गर्दै जाँदा कति महिनामा जम्मा रु. 2000 बचत गर्छिन् ?

(b) कृषि कार्यका लागि एउटा फाइनान्स कम्पनीबाट लिएको ऋणको साँवा र ब्याज गरेर जम्मा रु. 29000 तिर्नुपर्नेमा मासिक किस्ताबन्दीका दरले तिर्दै जाँदा यो रकम 20 महिनामा चुक्ता हुने रहेछ । यदि प्रत्येक किस्तामा रु. 100 बढी रकम तिर्दै जानुपर्ने सर्त भए पहिलो किस्ताको रकम कति होला ?

1.3.3. गुणोत्तर अनुक्रम र श्रेणी (Geometric sequence and series)

तल दिइएका अनुक्रमहरू हेरौँ ।

(i) *1,2, 4, 8, 16, 32, ...*

(ii) *27, 9, 3, 1,* $\frac{1}{3}$*, ...*

(iii) *2, 6, 18, 54, ...*

माथिका अनुक्रमहरूका आधारमा निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) अनुक्रमहरूमा सङ्ख्याहरूको ढाँचा कसरी बनेको छ ?

(ख) के प्रत्येक अनुक्रममा क्रमागत पदहरूको अन्तर बराबर छ ?

(ग) प्रत्येक अनुक्रममा क्रमागत पदहरूको अनुपात कति कति हुन्छ ?

(घ) प्रत्येक अनुक्रममा एक पदबाट अर्को पद आउने नियम के होला ?

माथिका अनुक्रममा क्रमागत रूपमा आउने पदहरूको अन्तर बराबर वा समान छैन । अब, क्रमागत पदहरूको अनुपात निकालौँ ।

$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} =$ 2

$\frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{1} =$ ....$= \frac{1}{3}$

$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} =$ ....$= 3$

यहाँ, प्रत्येक अनुक्रमको क्रमागत पदहरूको अनुपात समान छ । त्यसैले माथिका अनुक्रमहरू गुणोत्तर अनुक्रम हुन् ।

यसरी कुनै पनि अनुक्रमको क्रमिक पदहरूको अनुपात एउटै वा बराबर हुन्छ भने त्यस्तो अनुक्रमलाई गुणोत्तर अनुक्रम *(geometirc sequence)* भनिन्छ, जस्तै *3, 6, 12, 24, ...* र $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ गुणोत्तर अनुक्रमहरू हुन् । गुणोत्तर अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणीहरूलाई

गुणोत्तर श्रेणी *(geometric series)* भनिन्छ । माथिका अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणीहरू $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$ र $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ हुन् ।

यदि गुणोत्तर अनुक्रमको n औँ पद (t_n) र $(n\text{-}1)$ औँ पद $(t_n\text{-}1)$ भए ,

समान अनुपात *(common ration)* $(r) = \frac{t_n}{t_{n-1}}$ हुन्छ ।

यदि $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots\ldots\ldots t_n$ एउटा गुणोत्तर अनुक्रममा भएमा उक्त अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणी $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots\ldots + t_n$ हुन्छ ।

गुणोत्तर अनुक्रमको साधारण पद (General term of geometric sequence):

मानौँ, सबिनाले रु. 10,000 बैङ्कको बचत खातामा जम्मा गर्छिन् । बैङ्कले उनलाई वार्षिक 10% ब्याज दिन्छ भने 10 वर्षमा ब्याजसहित उनले जम्मा गरेको रकम कति पुग्ला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, सबिनाको जम्मा गरेको सुरुको रकम = रु. 10,000

10% वार्षिक ब्याजदरले 1 वर्षको ब्याज = रु. $10{,}000 \times 10\%$

= रु. $10{,}000 \times \frac{10}{100} = 1000$

दोस्रो वर्षमा हुन आउने रकम = रु. 10,000 + रु. 1000 = रु. 11,000

दोस्रो वर्षको ब्याज = रु. $11{,}000 \times 10\%$

= रु. $11{,}000 \times \frac{10}{100}$ = रु. 1100

तेस्रो वर्षमा हुन आउने रकम = रु. 11,000 + रु. 1100 = रु. 12,100

तेस्रो वर्षको ब्याज = रु. $12{,}100 \times 10\%$

= रु. $12{,}100 \times \frac{10}{100}$ = रु. 1210

चौथो वर्षमा हुन आउने रकम = रु. 12,100 + रु. 1210 = रु. 13,310

यहाँ प्रत्येक वर्षको अन्त्यमा हुन आउने रकमलाई अनुक्रममा राख्दा,

10000, 11000, 12100, 13310, ... हुन्छ ।

यो गुणोत्तर अनुक्रम हो, किन, छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, समान अनुपात $(r) = \frac{11000}{10000} = \frac{11}{10} \left[r = \frac{t_2}{t_1}\right]$

अब,

पहिलो पद $(t_1) = 10,000 = 10000\left(\frac{11}{10}\right)^{1-1} = a\, r^{1-1}$

दोस्रो पद $(t_2) = 11,000 = 10000\left(\frac{11}{10}\right)^{2-1} = a\, r^{2-1}$

तेस्रो पद $(t_3) = 12,100 = 10000\left(\frac{11}{10}\right)^{3-1} = a\, r^{3-1}$

…………………………………………………

…………………………………………………

अन्तिम दोस्रो पद $(t_n\text{-}1) = 10,000\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1-1} = a\, r^{n-2}$

अन्तिम पद $(t_n) = 10,000\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} = a\, r^{n-1}$

तसर्थ,

सबिनाको *10* वर्ष पछि हुन आउने रकम

$(t_{10}) = 10,000\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1}$

$= 10,000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^{9}$

$= 10,000 \times (1.1)^9$

$=$ रु. *23,579.48* हुन्छ ।

यसैगरी उनको *15* वर्षपछि हुने रकम कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

तसर्थ गुणोत्तर अनुक्रम *10000, 11000, 12100, 13310, …* को n औँ पदलाई (t_n) ले सङ्केत गर्दछ ।

$(t_n) = 10,000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1}$ हुन्छ ।

यदि $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots t_n$ गुणोत्तर अनुक्रममा भए यस अनुक्रमको साधारण पद वा n औँ पद $(t_n)=ar^{n-1}$ हुन्छ । जहाँ, $a =$ पहलो पद, $r =$ समान अनुपात, $n =$ पदसङ्ख्या हो ।

उदाहरणहरू

1. एउटा गुणोत्तर अनुक्रम *3, 6, 12, 24, ….* को छैटौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् :

   समाधान

   यहाँ, पहिलो पद $(a) = 3$

   समान अनुपात $(r) = \frac{6}{3} = 2$

छैटौँ पद $(t_6) = ?$

सूत्रअनुसार,

$t_n = a\, r^{n-1}$

$t_6 = 3.(2)^{6-1}$

$= 3 \times 2^5$

$= 3 \times 32$

$= 96$

अत : छैटौँ पद $(t_6) = 96$ हुन्छ ।

2. गुणोत्तर अनुक्रम $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, ..., 128$ मा भएका जम्मा पदसङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = \frac{1}{4}$

समान अनुपात $(r) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2$

अन्तिम पद $(t_n) = 128$

पद सङ्ख्या $(n) = ?$

सूत्रअनुसार,

$t_n = a\, r^{n-1}$

अथवा, $128 = \frac{1}{4} \times (2)^{n-1}$

अथवा, $512 = 2^{n-1}$

अथवा, $2^8 = 2^{n-1}$

अथवा, $8 = n - 1$

$\therefore\ n = 9$

अत: उक्त अनुक्रममा 9 ओटा पदहरू रहेछन् ।

3. एउटा गुणोत्तर अनुक्रमको तेस्रो र छैटौँ पद क्रमशः 12 र 96 छन् भने उक्त अनुक्रम निकाल्नुहोस् ।

समाधान

मानौँ, पहिलो पद $= a$ र समान अनुपात $= r$

यहाँ, तेस्रो पद $(t_3) = 12$

छैटौँ पद $(t_6) = 96$

अब, सूत्रअनुसार,

$t_n = a\, r^{n-1}$

$n = 3$ राख्दा, $t_3 = a\, r^{3-1}$

$\therefore\ 12 = a\, r^2$ ……….. (i)

फेरि,

$n = 6$ राख्दा $t_6 = a\, r^{6-1}$

$\therefore\ 96 = a\, r^5$…………..(ii)

समीकरण (ii) लाई (i) ले भाग गर्दा

$$\frac{96}{12} = \frac{a\,r^5}{a\,r^2}$$

अथवा, $8 = r^3$

अथवा, $2^3 = r^3$

$\therefore\ r = 2$

r को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$12 = a \times 2^2$

अथवा, $12 = 4a$

अथवा, $\frac{12}{4} = a$

$\therefore\ a = 3$

अब, पहिलो पद $(t_1) = a = 3$

दोस्रो पद $(t_2) = a\,r = 3\times 2 = 6$

तेस्रो पद $(t_3) = a\,r^2 = 3\times 2^2 = 12$

चौथो पद $(t_4) = a\,r^3 = 3\times 2^3 = 24$

माथिका पदहरूलाई अनुक्रममा राख्दा 3, 6, 12, 24, ……..हुन्छ ।

4. एउटा गुणोत्तर अनुक्रमको पाँचौ र दसौँ पदहरू क्रमशः 256 र 8 छन् भने कुन पदको मान 2 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, दिइएको अनुक्रमको पहिलो पद र समान अनुपात क्रमशः a र r छन् ।

यहाँ, पाँचौँ पद $(t_5) = 256$

दसौँ पद $(t_{10}) = 8$

n औँ पद $(t_n) = 2$

सूत्रअनुसार,

$t_n = a\,r^{n-1}$

$n = 5$ राख्दा, $t_5 = a\,r^{5-1}$

$\therefore 256 = a\,r^4$..........(i)

n =10 राख्दा, $t_{10} = a\,r^{10-1}$

$\therefore 8 = a\,r^9$..........(ii)

समीकरण (ii) लाई (i) ले भाग गर्दा,

$$\frac{8}{256} = \frac{a\,r^9}{a\,r^4}$$

अथवा, $\frac{1}{32} = r^5$

अथवा, $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = r^5$

$\therefore\ r = \frac{1}{2}$

अब r को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$a \times (\frac{1}{2})^4 = 256$$

अथवा, $a = 256 \times 2^4$

अथवा, $a = 4096$

$\therefore\ a = 4096$

अब, $t_n = a\,r^{n-1}$

अथवा, $2 = 4096 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$

अथवा, $\frac{1}{2048} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

अथवा, $\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

अथवा, $n-1 = 11$

$\therefore n = 12$

अतः बारौँ पदको मान 2 हुन्छ ।

5. एउटा गुणोत्तर श्रेणीको सातौँ पद तेस्रो पदको एकासी गुणा छ र पाँचौँ पद *243* छ भने नवौँ पद कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, पहिलो पद (a) र समान अनुपात $= r$ छ ।

यहाँ, सातौँ पद $(t_7) = 81 \times t_3$ ....

अथवा, $ar^6 = 81 \times ar^2$

अथवा, $r^4 = 81$

अथवा, $r^4 = 3^4$

$\therefore r = 3$

फेरि, पाँचौँ पद $(t_5) = 243$

अथवा, $a r^4 = 243$

अथवा, $a \times 3^4 = 243$

अथवा, $a \times 81 = 243$

$\therefore a = 3$

अब, नवौँ पद $(t_9) = a r^{9-1}$

$= 3 \times 3^8$

$= 19683$

अतः उक्त अनुक्रमको नवौँ पद $(t_9) = 19683$ हुन्छ ।

गुणोत्तर मध्यमा (Geometric mean)

दिइएका गुणोत्तर अनुक्रम अध्ययन गर्नुहोस् :

(क) *5, 10, 20,* — 10 : मध्यमा

(ख) *2, 6, 18, 54* — 6, 18 : मध्यमाहरू

(ग) *-16, -8, -4, -2, -1* — -8, -4, -2 : मध्यमाहरू

माथिका अनुक्रमका आधारमा मध्यमा भनेको के हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

माथिको गुणोत्तर अनुक्रमहरूमध्ये पहिलो अनुक्रममा पहिलो पद *(5)* र अन्तिम पद *(20)* हो । यो अनुक्रममा *10; 5* र *20* का बिचमा पर्छ । त्यसैले यो अनुक्रममा *10* गुणोत्तर मध्यमा हो । दोस्रो अनुक्रमको पहिलो पद *(2)* र अन्तिम पद *(54)* बिचका सङ्ख्या वा पदहरू *6* र *18* पनि गुणोत्तर

मध्यमाहरू हुन् । त्यस्तै गरी तेस्रो अनुक्रमका -16 र -1 बिचका पदहरू -8, -4 र -2 गुणोत्तर मध्यमाहरू हुन् ।

तसर्थ, गुणोत्तर अनुक्रमका दुई पदहरू (पहिलो र अन्तिम) बिचको पद वा पदहरूलाई गुणोत्तर मध्यमा *(geometric mean)* भनिन्छ । गुणोत्तर मध्यमालाई G ले जनाइन्छ ।

तलको गुणोत्तर अनुक्रममा गुणोत्तर मध्यमाहरू कुन कुन हुन् छलफल गर्नुहोस् :

(i) $2, 4, 8, 16,$

(ii) x, x^2, x^3, x^4

दुई पदहरू *(a* र *b)* का बिचमा एउटा मध्यमा पत्ता लगाउने :

मानौँ, दुई पदहरू a र b को बिचमा एउटा गुणोत्तर मध्यमा G छ भने

a, G, b एउटा गुणोत्तर अनुक्रम हुन्छ ।

अब, पहिलो पद $(t_1) = a$

दोस्रो पद $(t_2) = G$

तेस्रो पद $(t_3) = b$

उक्त अनुक्रमका क्रमिक पदहरूको अनुपात बराबर हुने भएकाले,

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$

अथवा, $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$

अथवा, $G = \sqrt{ab}$

तसर्थ a र b बिचको गुणोत्तर मध्यमा $G = \sqrt{ab}$ हुन्छ ।

6. एउटा गुणोत्तर अनुक्रमका दुई पदहरू क्रमशः 6 र 54 बिचमा पर्ने मध्यमा निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 6$

अन्तिम पद $(b) = 54$

मध्यमा $(G) = ?$

सूत्रअनुसार, $G = \sqrt{ab}$

$= \sqrt{6 \times 54} = \sqrt{324} = 18$

$\therefore G = 18$

अतः गुणोत्तर मध्यमा $(G) = 18$ हुन्छ ।

दुई ओटा पदहरू a र b बिचमा n ओटा गुणोत्तर मध्यमाहरू पत्ता लगाउने

मानौँ, दुई ओटा पदहरू a र b बिचमा पर्ने गणितीय मध्यमाहरू $G_1, G_2, G_3, ...G_n$ छन् ।

$a, G_1, G_2, G_3, ... G_n, b$ गुणोत्तर अनुक्रम हो ।

यहाँ, पहिलो पद $= a$

अन्तिम पद $= b$

मध्यमा सङ्ख्या $= n$

पद सङ्ख्या $= n+2$

समान अनुपात $= r$ भए

सूत्रअनुसार, $t_n = a \,.\, r^{n-1}$

अथवा, $b = a.\, r^{(n+2)-1}$

अथवा, $\frac{b}{a} = r^{n+1}$

अथवा, $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore$ उक्त अनुक्रमको समान अनुपात $(r) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$, जहाँ $n =$ मध्यमा सङ्ख्या हो ।

अब, पहिलो मध्यमा $(G_1) =$ दोस्रो पद $(t_2) = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

दोस्रो मध्यमा $(G_2) =$ तेस्रो पद $(t_3) = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$

तेस्रो मध्यमा $(G_3) =$ चौथो पद $(t_4) = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$

....

....

n औँ मध्यमा $(G_n) = (n+1)$ औँ पद $(t_{n+1}) = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

तसर्थ : a र b का बिचको n औँ गुणोत्तर मध्यममा $a\, r^n$ हुन्छ ।

7. पदहरू 81 र 3 को बिचमा 5 ओटा गुणोत्तर मध्यमाहरू भर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 81$

अन्तिम पद $(b) = 3$

मध्यमा सङ्ख्या $(n) = 5$

सूत्रअनुसार,

समान अनुपात $(r) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$= \left(\frac{3}{81}\right)^{\frac{1}{5+1}}$

$= \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{6}}$

$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अब, आवश्यक मध्यमाहरू $g_1, g_2, g_3, g_4,$ र g_5 भए,

$g_1 = ar = 81 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}$

$g_2 = ar^2 = 81 \times \frac{1}{3} = 27$

$g_3 = ar^3 = 81 \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}$

$g_4 = ar^4 = 81 \times \frac{1}{9} = 9$

$g_5 = ar^4 = 81 \times \frac{1}{9\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

अत: चाहिएका मध्यमाहरू क्रमश: $27\sqrt{3}, 27. 9\sqrt{3}, 9$ र $9\sqrt{3}$ हुन् ।

8. यदि $4, x, y, -\frac{1}{16}$ एउटा गुणोत्तर अनुक्रम हो भने x र y को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 4$

अन्तिम पद $(b) = -\frac{1}{16}$

मध्यमा सङ्ख्या $(n) = 2$

अब सूत्रअनुसार,

समान अनुपात $(r) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$= \left(\frac{-\frac{1}{16}}{4}\right)^{\frac{1}{2+1}}$

$= \left(-\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \left(-\frac{1}{4}\right)^{3\times\frac{1}{3}} \quad = -\frac{1}{4}$

दोस्रो पद $(t_2) = x = ar = 4\times -\frac{1}{4} = -1$

तेस्रो पद $(t_3) = y = ar^2 = 4\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

अतः $x = -1, y = \frac{1}{4}$

9. पदहरू 4 र 128 का बिचमा भएका मध्यमाहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् जहाँ पहिलो र अन्तिम मध्यमाको अनुपात $1:8$ छ ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 4$

अन्तिम पद $(b) = 128$

मानौँ, मध्यमा सङ्ख्या $= n$ भए,

समान अनुपात $(r) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{128}{4}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore r = (32)^{\frac{1}{n+1}}$

प्रश्नअनुसार,

पहिलो मध्यमा : अन्तिम मध्यमा $= 1:8$

अथवा, $\frac{g_1}{g_n} = \frac{1}{8}$

अथवा, $\frac{ar}{a\,r^n} = \frac{1}{8}$

अथवा, $r^{1-n} = \frac{1}{8}$

अथवा, $\left(32^{\frac{1}{n+1}}\right)^{1-n} = \frac{1}{8}$ $\quad [\therefore r = (32)^{\frac{1}{n+1}}]$

अथवा, $32^{\frac{1-n}{n+1}} = \frac{1}{2^3}$

अथवा, $2^{\frac{5(1-n)}{n+1}} = 2^{-3}$

अथवा, $\frac{5(1-n)}{n+1} = -3$

अथवा, $5 - 5n = -3n - 3$

अथवा, $-5n - 3n = -3 - 5$

अथवा, $-2n = -8$

$\therefore n = 4$

अतः *4* र *128* का बिचमा *4* ओटा गुणोत्तर मध्यमा छन् ।

समानान्तरीय मध्यमा र गुणोत्तर मध्यमाबिचको सम्बन्ध (Relation between Arithmetic mean and Geometric mean)

मानौँ, *a* र *b* दुई ओटा धनात्मक सङ्ख्याहरू छन् भने,

a र *b* को समानान्तरीय मध्यममा $(A.M.) = \frac{a+b}{2}$

र गुणोत्तर मध्यमा $(G.M.) = \sqrt{ab}$ हुन्छ ।

अब, $A.M - G.M = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

$$= \frac{a+b-2.\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 - 2.\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$$

$A.M - G.M \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ (किन ?)

$A.M - G.M \geq 0$

$\therefore A.M \geq G.M$

दुई धनात्मक सङ्ख्याहरूको समानान्तरीय मध्यमा ती दुई सङ्ख्याको गुणोत्तर मध्यमाभन्दा ठुलो वा बराबर हुन्छ ।

10. कुनै दुई सङ्ख्याहरूको समानान्तरीय मध्यमा *10* र गुणोत्तर मध्यमा *8* भए ती दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ ती दुई सङ्ख्याहरू *a* र *b* छन् ।

यहाँ, समानान्तरीय मध्यमा $(A.M) = 10$

गुणोत्तर मध्यममा $(G.M) = 8$

सूत्रअनुसार,

$A.M. = \frac{a+b}{2}$ र $G.M. = \sqrt{ab}$

अथवा, $10 = \frac{a+b}{2}$ अथवा $8 = \sqrt{ab}$

अथवा, $a + b = 20$ ....(i) अथवा, $64 = ab$ ....(ii)

अब, $a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$

$= \sqrt{20^2 - 4 \times 64}$

$= \sqrt{400 - 256}$

$= \sqrt{144}$

$= 12$

$a - b = 12$ .... (iii)

समीकरण (i) र (iii) हल गर्दा,

$a = 4$ र $b = 16$

अतः चाहिएका दुई सङ्ख्याहरू 4 र 16 हुन् ।

अभ्यास 1.3.3

1. (a) गुणोत्तर अनुक्रम भनेको के हो ? उदाहरणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।
   (b) गुणोत्तर अनुक्रमका विशेषताहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।
   (c) गुणोत्तर अनुक्रम र गुणोत्तर श्रेणीबिचको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।
   (d) गुणोत्तर मध्यमा भनेको के हो ? गुणोत्तर मध्ययमा पत्ता लगाउने तरिका लेख्नुहोस् ।
2. दिइएका अनुक्रमहरूमध्ये कुन कुन गुणोत्तर अनुक्रम हुन् र कुन कुन होइनन् छुट्याई कारण पनि लेख्नुहोस् ।
   (a) 7, 14, 28 (b) a, a^2, a^3
   (c) 25, 5, 1.......... (d) $7, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}$,..........
3. दिइएका गुणोत्तर अनुक्रमको पहिलो पद (a) र समान अनुपात (r) का आधारमा छैटौँ पद र बारौँ पद निकाल्नुहोस् ।
   (a) पहिलो पद $(a) = 120$ र समान अनुपात $(r) = \frac{1}{2}$
   (b) पहिलो पद $(a) = -3$ र समान अनुपात $(r) = 2$
   (c) पहिलो पद $(a) = \frac{1}{3}$ र समान अनुपात $(r) = 3$
4. निम्न लिखित गुणोत्तर अनुक्रमका पद सङ्ख्या निकाल्नुहोस् :
   (a) 7, -15, 45,.............,-10935
   (b) 1, 3, 9, ..., 243
   (c) $4, 6, 9, \ldots\ldots, \frac{243}{8}$

(d) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, 128$

5. दिइएका अवस्थामा गुणोत्तर अनुक्रमको पहिलो पद (a) र समान अनुपात (r) निकाल्नुहोस् ?

(a) समान अनुपात $(r) = 2$, दसौँ पद $(t_{10}) = 1536$

(b) समान अनुपात $(r) = \frac{1}{3}$, आठौँ पद $(t_8) = \frac{1}{729}$

(c) पहिलो पद $(a) = 7$ र एघारौँ पद $(t_{11}) = 11$

(d) पहिलो पद $(a) = 2$ र आठौँ पद $(t_8) = 4374$

6. (a) यदि $2k+2, 2k+6$ र $7k+10$ गुणोत्तर अनुक्रममा भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) $5x-2, x+2$ र x गुणोत्तर अनुक्रममा भए x को मान निकाल्नुहोस् ।

(c) यदि $6, x, y, 162$ गुणोत्तर अनुक्रममा भए x र y को मान निकाल्नुहोस् ।

7. (a) एउटा गुणोत्तर अनुक्रमको पाँचौ पद र आठौँ पद क्रमशः 162 र 4374 भए दसौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. (a) गुणोत्तर अनुक्रमको चौथो पद पहिलो पदको 8 गुणासँग बराबर छ र छैटौँ पद 64 छ भने दसौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि गुणोत्तर अनुक्रमको पहिलो पदको 128 गुणा सातौँ पदको 2 गुणासँग बराबर छ र तेस्रो पद 8 छ भने आठौँ पद निकाल्नुहोस् ।

9. (a) गुणोत्तर श्रेणीका तीन ओटा पदहरूको योगफल 114 र गुणनफल 46656 छ भने ती पदहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) गुणोत्तर श्रेणीका तीन ओटा पदहरूको योगफल 38 र गुणनफल 1728 छ भने ती पदहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. दिइएका दुई पदहरूबिच पर्ने गुणोत्तर मध्यमा निकाल्नुहोस् :

(a) 9 र 16 (b) 54 र 6 (c) $\frac{1}{64}$ र $\frac{1}{16}$ (d) 8 र $\frac{32}{3}$

11. निम्नअनुसारका गुणोत्तर मध्यमाहरू भर्नुहोस् :

(a) 3 र 243 का बिचमा 3 ओटा मध्यमाहरू

(b) 2 र 64 का बिचमा 4 ओटा मध्यमाहरू

(c) 8 र $\frac{1}{8}$ का बिचमा 5 ओटा मध्यमाहरू

12. (a) पदहरू 10 र 1280 का बिचमा पर्ने गुणोत्तर मध्यमा सङ्ख्या निकाल्नुहोस्, जहाँ पहिलो मध्यममा र अन्तिम मध्यमाको अनुपात $1:32$ छ ।

(b) पदहरू *3* र *192* को बिचमा केही गुणोत्तर मध्यमाहरू छन् । यदि पाँचौँ गुणोत्तर मध्यमा *96* छ भने मध्यमा सङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।

13. (a) समानान्तरीय मध्यमा *34* र गुणोत्तर मध्यमा *16* हुने दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) समानान्तरीय मध्यमा *25* र गुणोत्तर मध्यमा *20* हुने दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. (a) कुनै दुई सङ्ख्याहरूको अनुपात *2:1* छ । तिनीहरूको गुणोत्तर मध्यमा *4* छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) कुनै दुई सङ्ख्याहरूको अनुपात *1:16* छ । तिनीहरूको गुणोत्तर मध्यमा $\frac{1}{4}$ छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

13.4 गुणोत्तर श्रेणीको योगफल (Sum of Geometric series)

मानौँ, एउटा मोबाइल पसलको मासिक नाफा रु. *20,000* छ । यदि प्रति महिना त्यसको नाफा *10%* ले ह्रास हुँदै जान्छ भने छ महिनामा उसको जम्मा नाफा कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, मोबाइल पसलको सुरुको महिनाको नाफा = रू *20,000*

दोस्रो महिनाको नाफा रकम = रू $20,000 - 20,000 \times 10\%$

= रू $20000 - 2000$

= रू $18,000$

तेस्रो महिनाको नाफा रकम = रू $18000 - 18,000 \times 10\%$

= रू $16,200$

चौथो महिनाको नाफा रकम = रू $16,200 - 16,200 \times 10\%$

= रू $14,580$

पाँचौँ महिनाको नाफा रकम = रू $14,580 - 14,580 \times 10\%$

= रू $13,122$

अब, पाँच महिनाको नाफालाई श्रेणीमा राख्दा,

$s_5 = 20,000 + 18,000 + 16,200 + 14,580 + 13,122$ ....(i)

समान अनुपात $(r) = \frac{18,000}{20,000} = \frac{9}{10}$

समीकरण *(i)* लाई $\frac{9}{10}$ ले गुणन गर्दा,

$\frac{9}{10}s_5 = 18,000 + 16,200 + 14,580 + 13,122 + 11,809.8$ ....(ii)

समीकरण *(i)* बाट *(ii)* घटाउँदा

$s_5 (1-\frac{9}{10}) = 20,000 - 11,809.8$

$s_5 (1-\frac{9}{10}) = 20,000 - 20,000\times (\frac{9}{10})^5$

$s_5 (1-\frac{9}{10}) = 20,000 - 20,000\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^5\right]$

$s_5 = \frac{20,000\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^5\right]}{(1-\frac{9}{10})} = 81,902$

$\therefore \frac{(1-r^5)}{(1-r)}$ [$\because a = 20,000$ र $r = \frac{9}{10}$]

अत: उक्त मोबाइल पसलको *5* महिनाको जम्मा नाफा रु. *81,902* हुन्छ ।

यदि गुणोत्तर अनुक्रमको पहिलो पद $= a$, समान अनुपात $= r$, पद सङ्ख्या $= n$ छ र योगफललाई *Sn* ले जनाएको छ भने $S_n = a+ar+ar^2+......+ar^{n-1}$.....(i)

समीकरण *(i)* लाई *r* ले गुणन गर्दा,

$r S_n= ar + ar^2 + ar^3 +......+ar^n$.....(ii)

अब, समीकरण *(ii)* बाट *(i)* घटाउँदा,

$r S_n - S_n = (ar+ar^2+ar^3+......+ar^n) - (a+ar+ar^2+......+ar^{n-1})$

$S_n (r-1) = (ar+ar^2+ar^3+ar^{n-1} +ar^n...- a-ar-ar^2-....ar^{n-1})$

$S_n(r-1)= ar^n-a$

$\therefore S_n= \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}, r\neq 1$

फेरि, $S_n= \frac{ar^n-a}{r-1}$

$= \frac{ar^{n-1}.r-a}{r-1}$

$= \frac{t_n.r-a}{r-1}$ [$\because ar^{n-1} = t_n$]

$\therefore S_n = \frac{l.r-a}{r-1}$ [$\because t_n = l$]

उदाहरणहरू

1. गुणोत्तर श्रेणी *4+8+16+....5* ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 4$

समान अनुपात $(r) = \frac{8}{4} = 2$

पद सङ्ख्या $(n) = 5$

योगफल $(s_5) = ?$

सूत्रअनुसार,

$S_5 \quad = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$= \frac{4(2^5 - 1)}{2 - 1}$

$= \frac{4(32 - 1)}{1}$

$= 4 \times 31 = 124$

2. योगफल निकाल्नुहोस् :*7+14+28+....+ 1792*

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 7$

समान अनुपात $(r) = \frac{14}{7} = 2$

अन्तिम पद $(l) = 1792$

योगफल $(s_5) = ?$

सूत्रअनुसार,

$S_5 \quad = \frac{lr - a}{r - 1}$

$= \frac{1792 \times 2 - 7}{2 - 1}$

$= 3584 - 7$

$= 3577$

3. यदि कुनै गुणोत्तर श्रेणीका तेस्रो र सातौँ पदहरू क्रमशः *8* र *128* छन् भने पहिलो *10* पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, तेस्रो पद $(t_3) = 8$

सातौँ पद $(t_7) = 128$

10 पदहरूको योगफल $(s_{10}) = ?$

सूत्रअनुसार,

$t_n = ar^{n-1}$

$n = 3$ राख्दा, $t_3 = ar^{3-1}$

$\therefore 8 = ar^2$............(i)

$n = 7$ राख्दा, $t_7 = ar^{7-1}$

$\therefore 128 = ar^6$............(ii)

समीकरण (ii) लाई (i) ले भाग गर्दा,

अथवा, $\frac{128}{8} = \frac{ar^6}{ar^2}$

अथवा, $16 = r^4$

अथवा, $2^4 = r^4$

$\therefore r = 2$

r को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$8 = a.2^2$

अथवा, $8 = a \times 4$

अथवा, $a = \frac{8}{4} = 2$

अब, $s_{10} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$

$= \frac{4(2^5 - 1)}{2-1}$

$= \frac{2(2^{10} - 1)}{2-1}$

$= 2 \times 1023$

$= 2046$

4. एउटा गुणोत्तर श्रेणीका पहिलो 4 पदहरूको योगफल 40 छ र पहिलो दुई पदहरूको योगफल 4 छ । यसको समान अनुपात धनात्मक छ भने पहिलो 8 पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो 4 पदहरूको योगफल $(s_4) = 40$

पहिलो 2 पदहरूको योगफल $(s_2) = 4$

पहिलो 8 पदहरूको योगफल $(s_8) = ?$

सूत्रअनुसार,

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$n = 4$ राख्दा $S_4 = \frac{a(r^4-1)}{r-1}$

$\therefore\ 40 = \frac{a(r^4-1)}{r-1}$............$(i)$

$n = 2$ राख्दा, $S_2 = \frac{a(r^2-1)}{r-1}$

$\therefore 4 = \frac{a(r^2-1)}{r-1}$............$(ii)$

समीकरण (i) लाई (ii) ले भाग गर्दा,

अथवा, $\frac{a(r^4-1)}{r-1} \times \frac{r-1}{a(r^2-1)} = \frac{40}{4}$

अथवा, $\frac{(r^2+1)(r^2-1)}{(r^2-1)} = 10$

अथवा, $r^2 + 1 = 10$

अथवा, $r^2 = 10-1$

अथवा, $r^2 = 9$

अथवा, $r^2 = 3^3$

$r = \pm 3$

r को धनात्मक मान $+3$ हो ।

अब, r को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$\frac{a(3^2 - 1)}{3 - 1} = 4$

अथवा, $a \times 8 = 4 \times 2$

अथवा, $a = \frac{8}{8}$

$\therefore a = 1$

अब, $\frac{1(3^8-1)}{3-1} = \frac{6560}{2} = 3280$

अतः पहिलो 8 पदहरूको योगफल 3280 हुन्छ ।

अभ्यास 1.3.4

1. निम्न लिखित श्रेणीहरूको योगफल निकाल्नुहोस् :

   (a) $1+3+9+....7$ ओटा पदहरू

   (b) $128+64+32+....10$ ओटा पदहरू

   (c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....8$ ओटा पदहरू

   (d) $3+6+12+....+1536$

   (e) $\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}-\cdots.+64\sqrt{2}$

   (f) $\frac{1}{9}+\frac{2}{3}+4+......+24$

2. मान निकाल्नुहोस् :

   (a) $\sum_{n=2}^{6} 2^{3n}$

   (b) $\sum_{k=2}^{6} 2(-2)^{k}$

   (c) $\sum_{m=1}^{5}(3^{m}+2)$

3. एउटा गुणोत्तर श्रेणी $3+6+12+.....+768$ भए

   (a) उक्त श्रेणीमा भएका पद सङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।

   (b) उक्त श्रेणीको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) श्रेणी $64+96+144+......$मा कति ओटा पदहरूको योगफल 1330 हुन्छ ?

   (b) श्रेणी $9+3+1+......$मा कति ओटा पदहरूको योगफल $\frac{121}{9}$ हुन्छ ?

5. (a) पहिलो पद 1 र समान अनुपात 2 भएका गुणोत्तर श्रेणीका पहिला पाँच पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

   (b) पहिलो पद 3 र समान अनुपात $\frac{3}{5}$ भएको गुणोत्तर श्रेणीको आठौँ पदसम्मको योगफल निकाल्नुहोस् ।

6. एउटा गुणोत्तर श्रेणीको पहिलो पद 3, अन्तिम पद 384 र तिनीहरूको योगफल 765 छ भने पद सङ्ख्या र समान अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (a) पहिलो पद 5 र अन्तिम पद 160 भएको गुणोत्तर श्रेणीका योगफल 315 भए समान अनुपात निकाल्नुहोस् ।

   (b) समान अनुपात 3 र अन्तिम पद 189 भएको गुणोत्तर श्रेणीका योगफल 280 भए पहिलो पद निकाल्नुहोस् ।

8. (a) दोस्रो पद 3 र पाँचौँ पद 81 भएको एउटा गुणोत्तर श्रेणीको पहिलो 7 ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

(b) तेस्रो पद $\frac{1}{3}$ र छैटौँ पद $\frac{1}{81}$ भएको गुणोत्तर श्रेणीका पहिला *6* ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

9. (a) पहिलो दुई ओटा पदहरूको योगफल *3* र पहिलो चार ओटा पदहरूको योगफल *15* छ यदि समान अनुपात धनात्मक भए पहिलो *6* ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

(b) एउटा धनात्मक समान अनुपात भएको गुणोत्तर श्रेणीका पहिला चार पदहरूको योगफल *40* र पहिला दुई पदहरूको योगफल *4* छ भने सो श्रेणीका पहिला आठ पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

1.4 रेखीय योजना (Linear Programming)

1.4.1 रेखीय असमानताहरू (Linear Inequalities)

तलका वाक्यहरू अध्ययन गर्नुहोस् :

(क) दाजुको उमेर भाइको भन्दा जहिले पनि बढी हुन्छ ।

(ख) बढुवा हुन कर्मचारीको अनुभव कम्तीमा 5 वर्षको चाहिन्छ ।

(ग) 20 देखि 40 वर्षका युवाहरू उर्जाशील हुन्छन् ।

(घ) आदर्श विद्यालयका विद्यार्थीहरूले गणित विषयमा कम्तीमा B ग्रेड ल्याएका छन् ।

माथिका वाक्यहरूलाई गणितीय भाषामा कसरी लेखिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

सङ्ख्या वा वस्तुहरू सधैं बराबर पाइँदैनन् । ठुला वा साना पनि हुन्छन् उदाहरणका लागि सङ्ख्या रेखामा दायाँतिरका वा (माथितिर) को सङ्ख्या बायाँतिर वा (तलतिर) को सङ्ख्या भन्दा जहिले पनि ठुलो हुन्छ । दिदीको उमेर बहिनीको उमेरभन्दा जहिले पनि बढी हुन्छ । यस प्रकारका थुप्रै उदाहरणहरू पाइन्छन् । घटी वा बढी (ठुलो वा सानो) जनाउन गणितीय सङ्केत $\geq$, $\leq$, $<$ वा $>$ प्रयोग गरिन्छ । यस्ता सङ्केत वा चिह्नहरू प्रयोग भएको गणितीय वाक्यलाई नै असमानता भनिन्छ । यदि घाताङ्क एक मात्र भएको चल वा चलहरू प्रयोग भएको असमानता छ भने त्यो रेखीय असमानता हुन्छ ।

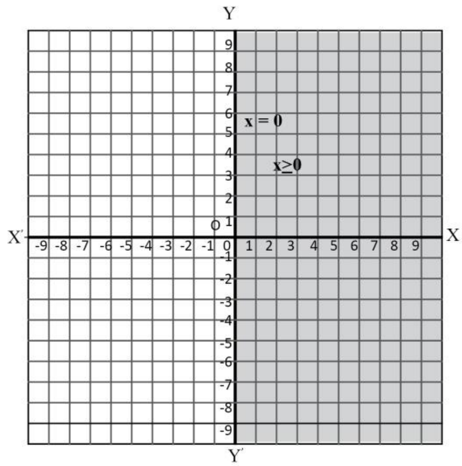
माथिको पहिलो वाक्यमा दाजु र भाइको उमेरलाई क्रमशः x र y मानेर असमानतामा जनाउँदा $x > y$ हुन्छ । दोस्रो वाक्यमा कर्मचारीलाई x ले जनाउँदा असमानता $x \geq 5$ हुन्छ । तेस्रो वाक्यमा युवाहरूलाई उमेरमा x ले जनाउँदा असमानता $20 \leq x \leq 40$ हुन्छ भने चौथो वाक्यमा विद्यार्थी सङ्ख्यालाई y ले जनाउँदा, गणितीय वाक्य $y \geq B$ हुन्छ ।

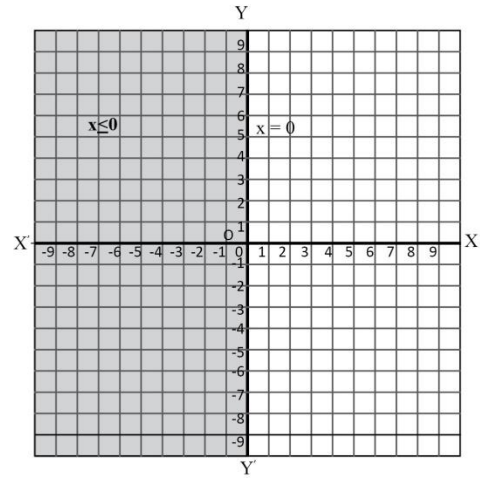
अतः $x > y$, $x \geq 5$, $20 \leq x \leq 40$ र $y \geq B$ रेखीय असमानताहरू हुन् ।

एक चलयुक्त रेखीय असमानताको ग्राफ *(Graph of linear Inequalitiies of one variable)*

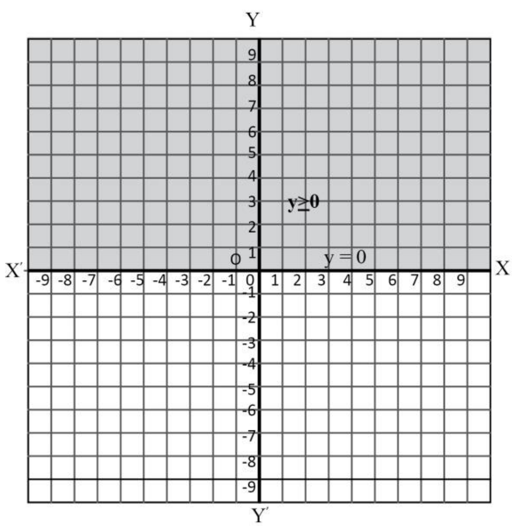
मानौँ, एक चलयुक्त रेखीय असमानताहरू, $x \geq 0, x \leq 0, y \geq 0, y \leq 0, x \geq 2, x \leq 2, y \geq 2, y \leq 2$ छन् । यी असमानताहरूलाई कसरी ग्राफमा देखाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । माथिका असमानताहरूलाई ग्राफमा देखाउनका लागि प्रत्येक असमानतासँग सम्बन्धित सिधा रेखा (*Boundary line*) छुट्याउनुपर्छ । यसका लागि असमानता चिह्न हटाई बराबर चिह्न (=) राख्नुपर्छ । उक्त सिधा रेखाले xy समतलीय सतहलाई दुई भागमा विभाजन गर्दछ । दुई क्षेत्रमध्ये एउटा क्षेत्र जसलाई दिइएको असमानताले जनाउँछ, त्यसलाई उक्त असमानताको हल समूह *(solution set)* वा हल क्षेत्र *(solution region)* भनिन्छ । तलका असमानताहरूको ग्राफ निम्नअनुसार छ ।

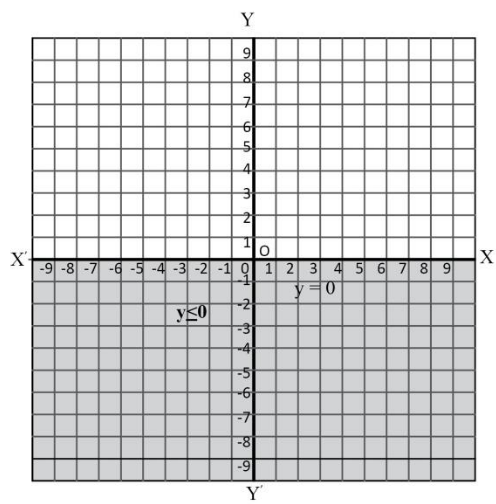
$x \geq 0$ र $x \leq 0$ को ग्राफ



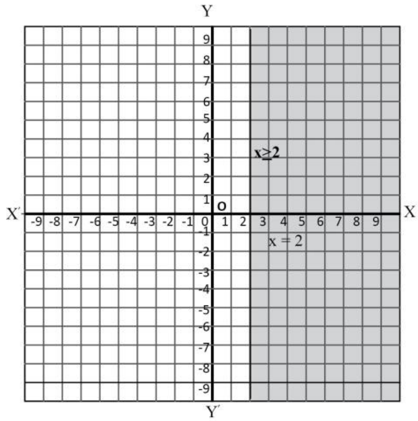


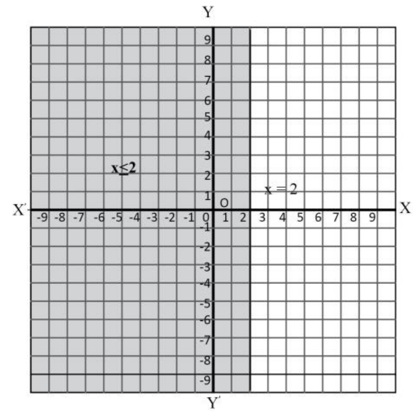
$y \geq 0$ र $y \leq 0$ को ग्राफ



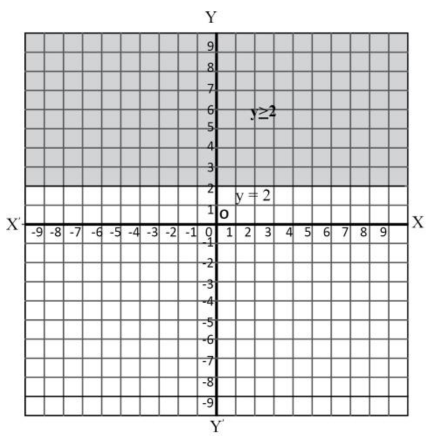


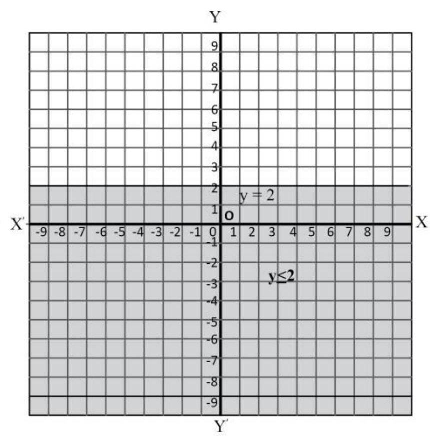
x≥2 र *x≤2* को ग्राफ





y≥2 र *y≤2* को ग्राफ





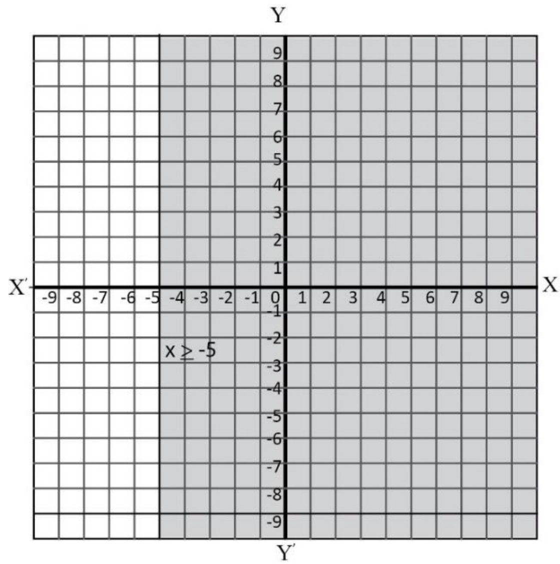
उदाहरणहरू

1. $x \geq -5$ लाई लेखाचित्रमा खिच्नुहोस् :

समाधान

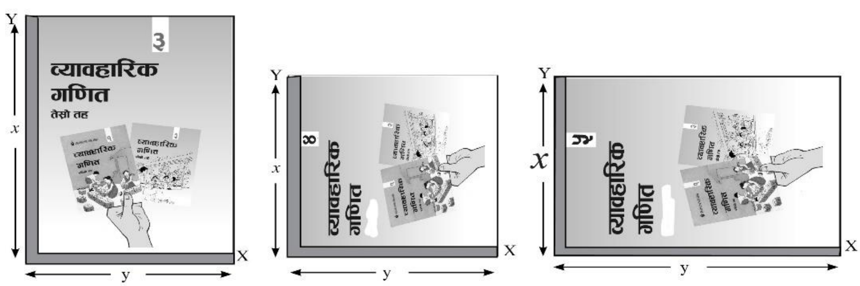
यहाँ, असमानता $x \geq -5$ सँग सम्बन्धित समीकरण $x = -5$ हो । $x = -5$ रेखा $x \geq -5$ को विभाजक रेखा *(boundry line)* हो । तसर्थ, $x \geq -5$ को हल क्षेत्र *(solution Region)* रेखा $x = -5$ रेखाको दायाँतिर पर्दछ ।

$x \geq -5$ को लेखाचित्र निम्नअनुसार हुन्छ :



दुई चलयुक्त रेखीय असमानताको ग्राफ ***(Graph of linear inequalities with two variables)***

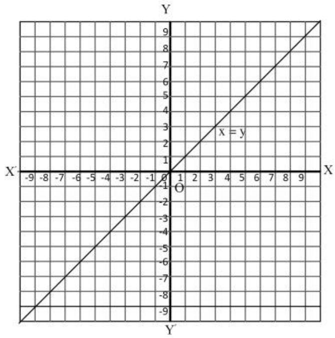
मानौँ, विपरित किनारका लम्बाइ *x cm* र *y cm* भएका तीन प्रकार किताबहरू तल दिइएको छ :



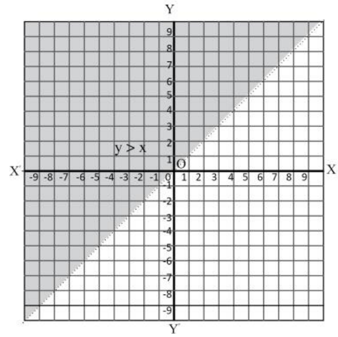
(i) *(ii)* *(iii)*

पहिलो किताबमा y भन्दा x बढी वा $x > y$ भएकाले यो किताब ठाडो आधार *(portrait base)* को किताब हो । दोस्रोमा x र y बराबर वा $x = y$ भएकाले यो वर्ग आकार *(square base)* को किताब हो भने तेस्रोमा x भन्दा y बढी वा $x < y$ भएकाले यो तेर्सो आकार *(landscape base)* को किताब हो । यी तीन ओटै अवस्थाहरू $x > y$, $x = y$ र $x < y$ मध्ये $x = y$ एउटा एक चलयुक्त रेखीय समीकरण हो । भने $x<y$ र $x>y$ असमानताहरू हुन् । x र y लाई वास्तविक सङ्ख्या मानेर $x = y$ लाई ग्राफमा देखाउँदा उद्गम बिन्दुबाट जाने रेखा प्राप्त हुन्छ । अब, $x > y$ र $x < y$ का ग्राफहरू कस्ता होलान् ? छलफल गर्नुहोस् ।

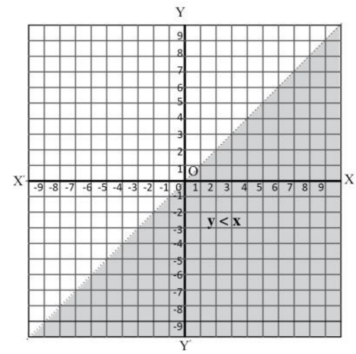
अब, x र y का निर्देशाङ्क बराबर हुने सबै बिन्दुहरू सिधा रेखा $x = y$ मा पर्दछन् । x निर्देशाङ्क भन्दा y निर्देशाङ्क ठुलो भएका सबै बिन्दुहरू रेखा $x = y$ भन्दा माथि वा $y > x$ क्षेत्रमा पर्दछन् भने x निर्देशाङ्कभन्दा y निर्देशाङ्क सानो भएका सबै बिन्दुहरू रेखा $x = y$ भन्दा तल वा y र x क्षेत्रमा पर्दछन् । माथिका सम्बन्धहरू $x = y$, $y > x$ र $y < x$ लाई ग्राफमा देखाउँदा,



$x = y$



$y > x$



$y > x$

तसर्थ $x = y$ ले सिधा रेखालाई, $y > x$ ले माथिल्लो अर्धसमतलीय सतहलाई र $y < x$ ले तल्लो अर्धसमतलीय सहतलाई देखाउँछ । माथिका सम्बन्धहरूमा *(1, 1), (3, 7), (-4, -4), (-6, 5), (3, 4), (5, -4)* जस्ता बिन्दुहरू लिएर ग्राफ खिच्नुहोस् र माथि खिचिएको ग्राफसँग तुलना गर्नुहोस् । के फरक पाउनु हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

दुई चलयुक्त रेखीय असमानताको साधारण स्वरूप $ax + by + c > 0$ (वा $\geq, \leq, <$ वा $\neq$) हुन्छ, जहाँ $a \neq 0$ वा $b \neq 0$ हुन्छ । समीकरण $ax + by + c = 0$ लाई उक्त असमानतासँग सम्बन्धित समीकरण भनिन्छ । यो एउटा सिधा रेखाको समीकरण हो ।

रेखीय असमानताहरूले लेखाचित्रमा देखाएको क्षेत्रभित्र सो असमानताको हल सम्भव हुन्छ । असमानताले देखाएको क्षेत्रलाई हल समूह वा हल क्षेत्र भनिन्छ । एकभन्दा बढी असमानताको हल क्षेत्र साझा हल क्षेत्र हो ।

दुई चलयुक्त रेखीय असमानता

मानौं, दुई चलयुक्त रेखीय असमानता $ax + by + c > 0$ वा < 0 वा ≥ 0 वा ≤ 0 छ भने उक्त असमानतालाई ग्राफमा खिच्दा निम्न चरणहरू अपनाउनुपर्छ ।

चरण *1* : दिइएको असमानतासँग सम्बन्धित समीकरण लेख्ने । *i.e.* $ax + by + c = 0$

चरण *2* : रेखा $ax + by + c = 0$ लाई ग्राफमा देखाउने यदि असमानता $\geq$ वा $\leq$ चिह्न प्रयोग भएमा पूर्ण रेखाले जनाउने यदि असमानतामा $>$ वा $<$ चिह्न प्रयोग भएमा विच्छेदित रेखा *(dot or broken line)* ले जनाउने

चरण *3* : दिइएको असमानता हल क्षेत्र छुट्याउन रेखा $ax + by + c = 0$ मा नपर्ने एउटा बिन्दु *(a, b)* परीक्षण बिन्दु *(test point)* लिई दिइएको असमानतामा राख्ने

चरण *4* : परीक्षण बिन्दु *(a, b)* दिइएको असमानतामा राख्दा गणितीय वाक्य ठिक *(true)* भएमा उक्त असमानताको हल क्षेत्र *(solution region)* बिन्दु *(a, b)* भएको क्षेत्रतिर पर्दछ भने बेठिक *(false)* भएमा हल क्षेत्र बिन्दु *(a, b)* भएको क्षेत्रको विपरीत क्षेत्रमा पर्दछ ।

चरण *5* : ग्राफमा परीक्षण बिन्दुको ठिक अवस्था *(true condition)* ले नै दिइएको असमानताको ग्राफलाई जनाउने भएकाले हल क्षेत्रलाई छाया पारेर देखाउने

2. $2x + 3y \leq 6$ को लेखाचित्र खिच्नुहोस् :

समाधान

$2x + 3y \leq 6$ लाई लेखाचित्रमा देखाउँदा निम्नअनुसार प्रक्रिया अपनाउनुपर्दछ :

- असमानता $2x + 3y \leq 6$ सँग सम्बन्धित रेखा $2x + 3y = 6$..... *(i)* हो ।
- रेखा $2x + 3y = 6$ लाई ग्राफमा खिच्न उक्त रेखालाई मान्य हुने कुनै दुई बिन्दुहरू पत्ता लगाऔँ ।

रेखा *(i)* बाट,

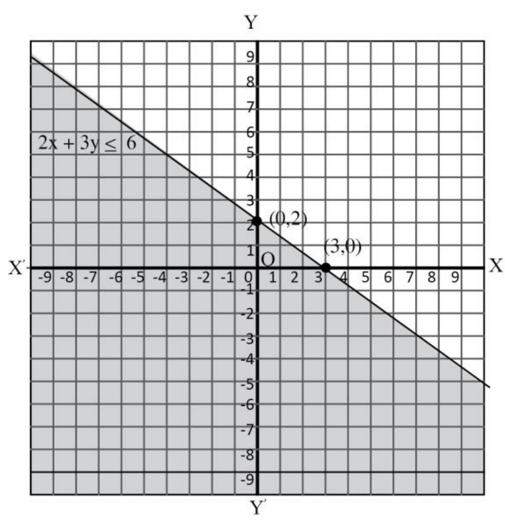
x	0	3
y	2	0

बिन्दुहरू $(0, 2)$ र $(3, 0)$ जोड्ने रेखा $2x + 3y = 6$ हो ।

- असमानतामा $\geq$ चिह्न भएकाले रेखा $2x + 3y = 6$ लाई ठोस रेखा *(solid line)* खिचौँ ।
- $2x + 3y \leq 6$ ले दिने क्षेत्र रेखा *(i)* को कतापट्टि पर्दछ भनी छुट्याउन परीक्षण बिन्दु $(0,0)$ लिई $2x + 3y \leq 6$ मा प्रतिस्थापन गर्दा,

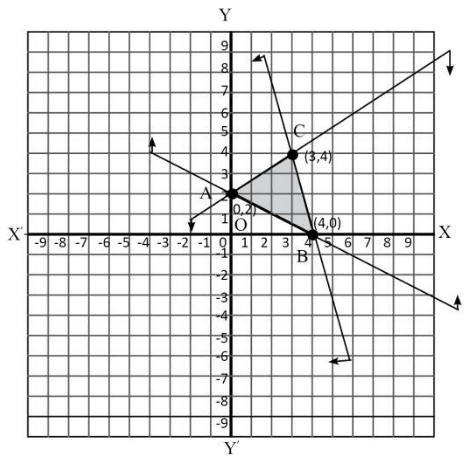
$2 \times 0 + 3 \times 0 \leq 6$ अथवा, $0 \leq 6$ (ठिक)

- यहाँ, परीक्षण बिन्दु $(0, 0)$ लिई असमानतामा राख्दा गणितीय वाक्य मान्य ठिक) भएकाले उक्त असमानताको हल क्षेत्र उद्गम बिन्दु $(0, 0)$ भएको क्षेत्रतिर पर्दछ ।
- अब, $2x + 3y = 6$ सहित त्यसभन्दा तल (बायाँ) तिरको क्षेत्रलाई छाया पारौँ । छाया पारिएको असमानता $2x+3y\leq6$ को लेखाचित्र वा ग्राफ हो, जसलाई निम्नअनुसार देखाऔँ :



1.4.2 रेखीय असमानता प्रणाली (System of linear inequalities)

दुई वा दुईभन्दा बढी रेखीय असमानताहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउँदा साझा हल क्षेत्र प्राप्त भएमा त्यसलाई रेखीय असमानता प्रणाली *(system of linear inequality)* भनिन्छ जस्तै : तलको ग्राफमा छाया पारिएको भागद्वारा विभिन्न तीन ओटा रेखीय प्रणालीका हल समूहहरू देखाइएका छन् ।



3. असमानताहरू $x + y \le 4$ र $2x - y \ge 2$ को लेखाचित्र खिची साझा हल क्षेत्र देखाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $x + y \le 4$ …………………*(i)*

$2x - y \ge 2$ ………………..*(ii)*

असमानता *(i)* सँग सम्बन्धित रेखाको समीकरण $x + y = 4$ *(ii)* हुन्छ ।

x	*0*	*4*
y	*4*	*0*

रेखा *(i)* बिन्दु *(0, 4)* र *(4, 0)* भएर जान्छ ।

अब, परीक्षण बिन्दु *(0, 0)* लिँदा, $x + y \le 4$

अथवा, $0 + 0 \le 4$

अथवा, $0 \le 4$ (ठिक)

असमानता $x + y \le 4$ को हल क्षेत्र उद्गम बिन्दु *(0, 0)* तिर वा रेखा $x + y = 4$ को तल (बायाँ) तिर पर्दछ ।

फेरि, असमानता $2x - y \ge 2$ सँग सम्बन्धित रेखा $2x - y = 2$ हो ।

x	*1*	*0*
y	*0*	*-2*

रेखा $2x - y = 2$ बिन्दु $(1, 0)$ र $(0, -2)$ भएर जान्छ ।

परीक्षण बिन्दु $(0, 0)$ लिँदा,

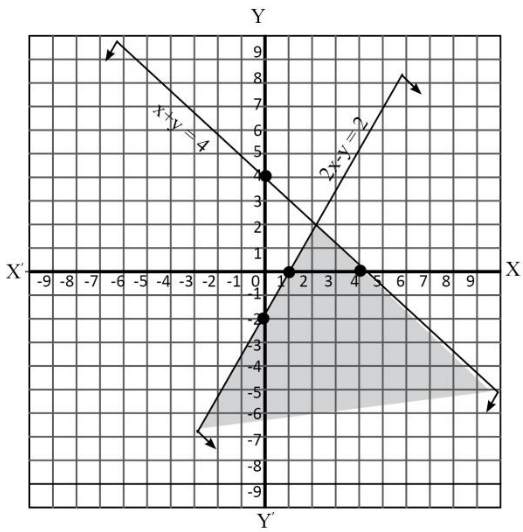
$2x - y \geq 2$

अथवा, $2 \times 0 - 0 \geq 2$

अथवा, $0 \geq 2$ (बेठिक)

तसर्थ $2x - y \geq 2$ को हलक्षेत्र उद्गम बिन्दु $(-0, 0)$ को विपरीत क्षेत्रमा पर्दछ वा रेखा $2x - y = 2$ को दायाँ (तल) पट्टि पर्दछ ।

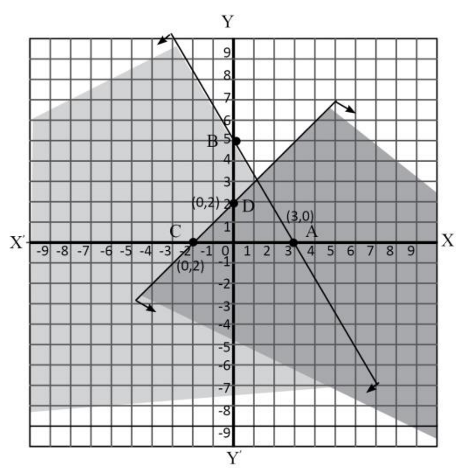
दुई असमानताको साझा हलक्षेत्रलाई लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइएको छ ।



4. दिइएको ग्राफमा छाया पारिएको क्षेत्रले जनाउने असमानताहरू लेख्नुहोस् :

समाधान

यहाँ, दिइएको ग्राफबाट विभाजक रेखा (boundry line) AB का दुई बिन्दुहरू $A(3, 0)$ र $B(0, 5)$ छन् ।



अब, रेखा AB को समीकरण

$$y - 0 = \frac{5-0}{0-3}(x-3) \left[\because y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\right]$$

अथवा, $-3y=5x-15$

अथवा, $5x+3y=15$

हल क्षेत्रमा पर्ने कुनै बिन्दु $(0,0)$ परीक्षण बिन्दुको रूपमा लिँदा,

$$5x + 3y = 5 \times 0 + 3 \times 0$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0 < 15$$

$$\therefore\ 5x + 3y \leq 15$$

फेरि, विभाजक रेखा *(boundry line)* CD का दुई बिन्दुहरू $C(-2, 0)$ र $D(0, 2)$ छन् ।

अब, रेखा CD को समीकरण

$$y-0 = \frac{2-0}{0+2}(x+2)$$

अथवा, $2y = 2x+4$

$$2x - 2y = -4$$

हल क्षेत्रमा पर्ने कुनै बिन्दु $(0, 0)$ परीक्षण बिन्दुका रूपमा लिँदा,

$$2x - 2y = 2 \times 0 - 2 \times 0$$

$$= 0 > -4$$

$$\therefore 2x - 2y \geq -4$$

अतः आवश्यक असमानताहरू $5x + 3y \leq 15$ र $2x - 2y \geq -4$ हुन् ।

1.4.3 रेखीय योजना (Linear Programming)

रेखीय योजना भनेको स्रोतहरूको अधिकतम उपयोगका लागि गरिने एउटा विधि (technique) हो । यसको प्रयोग दोस्रो विश्वयुद्धपछि सुरु भएको हो ।

रेखीय योजना रसियन गणितज्ञ *L.V. Kantorovich* ले सुरुवात गरे भने अमेरिकन गणितज्ञ *George B. Dantzig* ले यसको विकास गरे । अहिले यो विधि विभिन्न खालका व्यापारिक र औद्योगिक समस्याहरू समाधानका लागि व्यापक रूपमा प्रयोग गरिन्छ । विभिन्न क्षेत्रको निर्णय गर्ने प्रक्रियाका लागि यो निकै सहयोगी मानिन्छ । उद्योग, व्यापार, व्यावसायहरूमा लगानी कम गर्ने र उत्पादन तथा नाफा बढी गर्ने उद्देश्यले साधन, स्रोत, पुँजीको परिचालन गरिन्छ । रेखीय योजना प्रयोग गरी लागत न्यूनतम *(minimize)* गर्ने उत्पादन वा नाफा अधिकतम *(maxmize)* गर्ने प्रयास गरिन्छ । रेखीय योजनामा कुनै रेखीय फलन *(linear function)* को मान निश्चित सर्तहरू *(constraints)* लाई मान्दा हुने अधिकतम वा न्यूनतम गरिन्छ । यसरी रेखीय योजना भनेको असमानताका रूपमा सर्तहरूका आधारमा चलहरूको रेखीय फलनको अधिकतम वा न्यूनतम मान पत्ता लगाउनु हो । रेखीय योजना सम्बन्धी

समस्याहरूमा अधिकतम वा न्यूनतम मान निकाल्नुपर्ने रेखीय फलनलाई उद्देश्य फलन *(objective function)* भनिन्छ र समीकरण वा असमानताका रूपमा व्यक्त अवस्थाहरूलाई सर्त *(constraints)* भनिन्छ ।

रेखीय योजनाको प्रयोग धेरै क्षेत्रमा हुन्छ जस्तै : कृषि, व्यापार, उद्योग, बोलपत्र मूल्याङ्कन, यातायात, विज्ञापन, आर्थिक योजना आदि क्षेत्रमा रेखीय योजनाको प्रयोग हुन्छ ।

1.4.4 रेखीय योजनाको हल (Solution of Linear Programming)

रेखीय योजना सम्बन्धी समस्याहरूको हल गर्ने विधिहरू मुख्यतया दुई ओटा छन् । ती हुन् सिम्प्लेक्स विधि र ग्राफ विधि । यहाँ, ग्राफ विधिबाट रेखीय योजनाको हल गर्ने विधिको मात्र अध्ययन गर्छौं । ग्राफ विधिबाट रेखीय योजनाको समस्या समाधानका चरणहरू यस प्रकार छन् :

चरण 1. दिइएका असमानताहरूलाई एउटै ग्राफमा खिच्ने

चरण 2. सबै असमानताहरूको साझा हल क्षेत्र वा सर्वमान्य क्षेत्र *(feasible region)* पत्ता लगाउने

चरण 3. साझा हल क्षेत्र एक बहुभुज हुन्छ, सो बहुभुजका कुना *(corner)* हरूको निर्देशाङ्क ग्राफबाट पत्ता लगाई तिनीहरूलाई उद्देश्य फलनमा राख्ने

चरण 4. उद्देश्य फलनलाई अधिकतम गर्नुपर्ने भएमा अधिकत मान र न्यूनतम गर्नुपर्ने भएमा न्यूनतम मान पत्ता लगाउने ।

5. फलन $P = 3x + y$ को निम्न लिखित अवस्थामा अधिकतम र न्यूनतम मान निकाल्नुहोस् :

$2y \geq x - 1, x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

समाधान

यहाँ, दिइएका असमानताहरूसँग सम्बन्धित समीकरण $2y = x-1, x+y = 4, x = 0, y = 0$

समीकरण $2y = x - 1$ बाट,

x	1	3
y	0	1

बिन्दुहरू $(1, 0)$ र $(3, 1)$ जोड्ने रेखा $2y = x-1$ हुन्छ ।

अब, परीक्षण बिन्दु $(0, 0)$ लिई $2y \geq x-1$ मा राख्दा,

अथवा, $2 \times 0 \geq 0 - 1$

अथवा, $0 \geq -1$ (ठिक)

$2y \geq x-1$ को हल क्षेत्र उद्गम बिन्दुको क्षेत्र $(0,0)$ तिर पर्दछ ।

फेरि समीकरण $x+y=4$ बाट

x	0	4
y	4	0

रेखा $x+y=4$ बिन्दुहरू $(0, 4)$ र $(4, 0)$ बाट जान्छ । अब परीक्षण बिन्दु $(0, 0)$ लिई $x + y \leq 4$ मा राख्दा,

अथवा, $0 + 0 \leq 4$

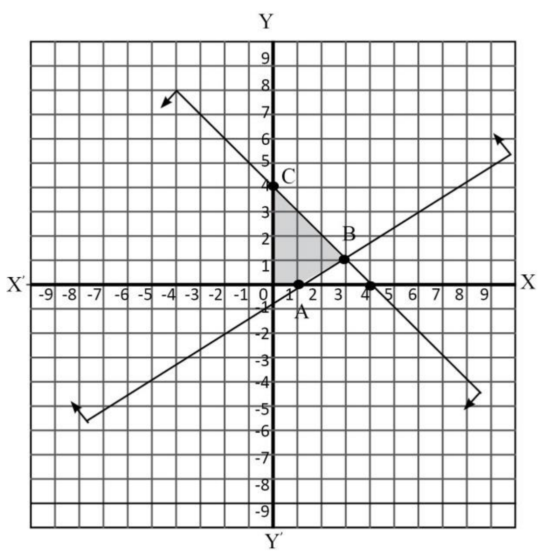
अथवा, $0 \leq 4$ (ठीक)

तसर्थ, $x + y \leq 4$ को हलक्षेत्र उद्गम बिन्दु $(0, 0)$ भएको क्षेत्रतिर पर्दछ ।

त्यसै गरी $x \geq 0$ को हल क्षेत्र $x = 0$ (y-अक्ष) को दायाँतिर पर्दछ ।

$y \geq 0$ को हलक्षेत्र $y = 0$ (x-अक्ष) को माथितिर पर्दछ ।

माथिका सबै असमानताहरूको साझा हलक्षेत्र वा सर्वमान्य क्षेत्र *(feasible region)* लाई लेखा चित्रमा देखाउँदा निम्नानुसार पाइन्छ :



माथिको लेखाचित्रबाट,

साझा हलक्षेत्रबाट बनेको बहुभुज $OABC$ हो जसको निर्देशाङ्क $O(0, 0), A(1, 0)), B(3, 1), C(0, 4)$ छ ।

अब, $O(0, 0)$ बिन्दुमा, $P = 3x+y = 3\times0+0 = 0$

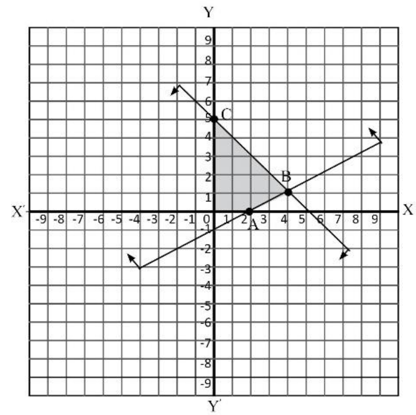
$A(1, 0)$ बिन्दुमा, $P = 3x+y = 3\times1+0 = 3$

$B(3, 1)$ बिन्दुमा, $P = 3x+y = 3\times3+1 = 10$

$C(0, 4)$ बिन्दुमा, $P = 3x+y = 3\times0+4 = 4$

अतः P को अधिकतम मान 10 हुन्छ, जुन $B(3, 1)$ मा पर्दछ र न्यूनतम मान 0 हुन्छ जुन बिन्दु $O(0, 0)$ मा पर्दछ ।

6. दिइएको लेखाचित्रमा A, B र C का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः $(2, 0)$, $(4, 1)$ र $(0, 5)$ छन् । बहुभुज $OABC$ भित्र छाया परेको भाग चार ओटा असमानताहरूले जनाएको छ । ती असमानताहरू पत्ता लगाउनुहोस् र ती असमानताहरूलाई मान्य हुने मानहरूबाट $P = 5x-4y$ को न्यूनतम मान निकाल्नुहोस् ।



समाधान

यहाँ, दिइएको लेखाचित्रबाट AB रेखाको x-खण्ड $(a)=2$ र y- खण्ड$(b)=-1$ हुन्छ

अब, AB रेखाको समीकरण

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

अथवा, $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$

अथवा, $x-2y=2$

अब, परीक्षण बिन्दु $(0, 0)$ लिँदा

$x - 2y = 0 - 2\times0 = 0 < 2$

$\therefore x-2y \le 2$

फेरि, रेखा BC को x-खण्ड $(a)=5$ र y-खण्ड $(b)=5$

BC रेखाको समीकरण $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$

अथवा, $x+y=5$

परीक्षण बिन्दु $(0,0)$ लिँदा,

$x + y = 0 + 0 = 0 < 5$

$\therefore x+y \le 5$

छाया पारिएको भाग पहिलो चतुर्थांशमा पर्ने भएकाले $x \ge 0$ र $y \ge 0$ पनि आवश्यक असमानताहरू हुन् ।

अत : आवश्यक असमानताहरू $x - 2y \le 2$, $x + y \le 5$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ हुन् ।

लेखाचित्रबाट, बहुभुज $OABC$ का निर्देशाङ्कहरू $O(0, 0)$, $A(2, 0)$ $B(4, 1)$ र $C(0, 5)$ छन् ।

अब, बिन्दु $O (0, 0)$ लिँदा, $P = 5x - 4y = 5 \times 0 - 4 \times 0 = 0$

बिन्दु $A (2, 0)$ लिँदा, $P = 5x - 4y = 5 \times 2 - 4 \times 0 = 10$

बिन्दु $B (4, 1)$ लिँदा, $P = 5x - 4y = 5 \times 4 - 4 \times 1 = 16$

बिन्दु $C (0, 5)$ लिँदा, $P = 5x - 4y = 5 \times 0 - 4 \times 5 = -20$

तसर्थ, P को न्यूनतम मान -20 हुन्छ, जुन बिन्दु $C(0, 5)$ मा पर्दछ ।

अभ्यास 1.4

1. दिइएका असमानताको लेखाचित्र खिच्नुहोस् :

   (क) $x \leq 0$ (ख) $x \leq 3$ (ग) $x \geq -4$

   (घ) $y \geq 0$ (ङ) $y \geq 6$ (च) $y \leq -3$

2. दिइएका असमानताको लेखाचित्र खिच्नुहोस् :

   (क) $2x + 3y \geq 6$ (ख) $x - y \geq 4$

   (ग) $x + 2y \leq 8$ (घ) $4x + 3y \leq -12$

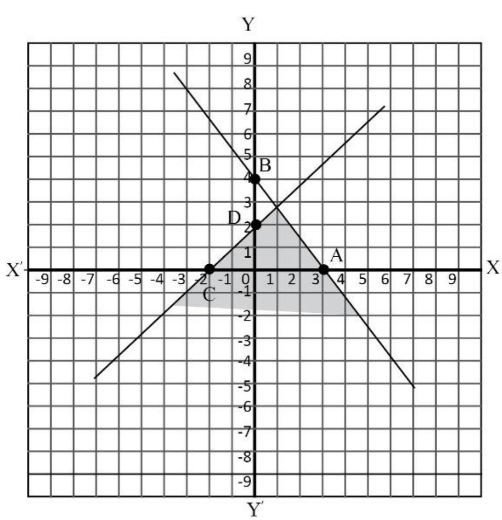
3. दिइएका असमानता पद्धतिको लेखाचित्र खिची साझा हलक्षेत्र देखाउनुहोस् :

   (क) $2x + 2y \geq 6$ र $y \geq 0$ (ख) $x + y \leq 1$ र $x - y \geq 1$

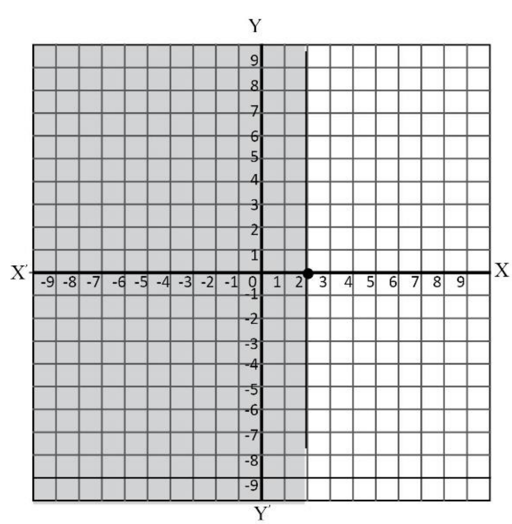
   (ग) $2x + 3y \leq 6$ र $3x - y \leq 0$ (घ) $x + y \leq 2, 2x - 3y \leq 6$ र $y \leq 2$

4. दिइएको लेखाचित्रमा छाया पारिएको क्षेत्रले जनाउने असमानता लेख्नुहोस् :

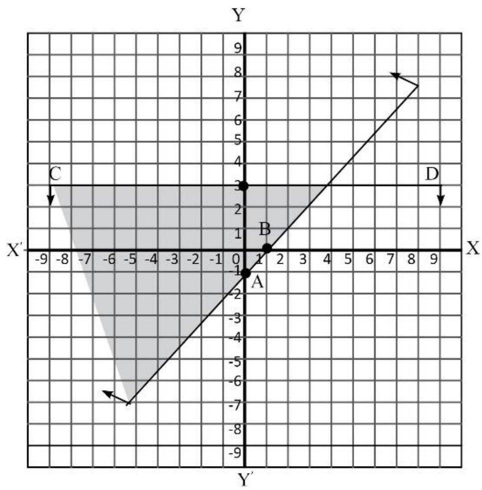
   (क)



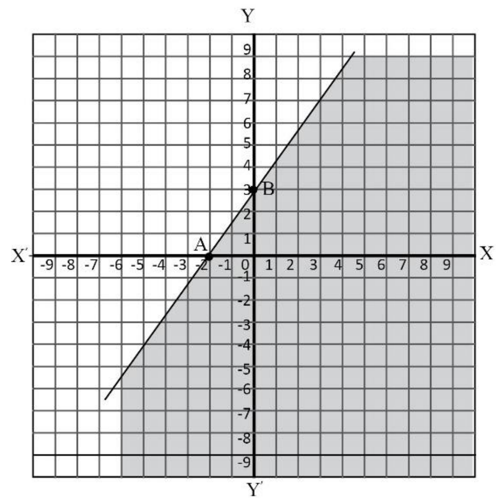
   (ख)



(ग)



(घ)



5. दिइएका असमानता पद्धतिको लेखाचित्र खिची तयार भएको बहुभुजका कुनाहरूको निर्देशाङ्क निकाल्नुहोस् ।

(क) $x + y \leq 3$	(ख) $y - 2x \leq 0$	(ग) $2x + 5y \leq 16$
$x \geq 2$	$2y + x \geq 5$	$2x + y \leq 8$
$y \leq 1$	$x \leq 5$	$x \geq 0, y \geq 0$

6. निम्न सर्तहरू पूरा गरी उद्देश्य फलनको अधिकतम र न्यूनतम मान निकाल्नुहोस् :

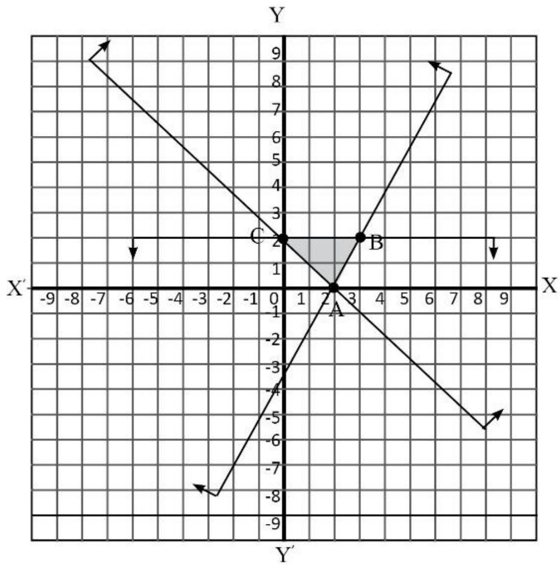
(क) $P = 2x + y$ लाई सर्तहरू $x + y \geq 6, x - y \geq 4, x \leq 6$

(ख) $Q = 5x + 4y$ लाई सर्तहरू $2x + 4y \geq 8, 3x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

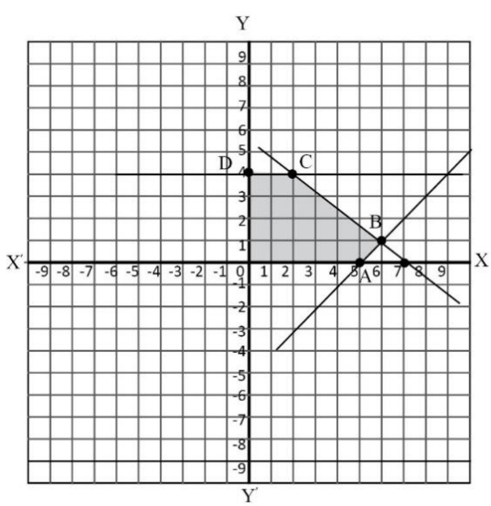
(ग) $L = 2x + 4y$ लाई सर्तहरू $4x + 3y \leq 12, x + 2y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

(घ) $P = 5x + 4y$ लाई सर्तहरू $x + 2y \geq 3, 3x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$

7. (a) दिइएको लेखाचित्रबाट छाया पारिएको भागले जनाउने तीन ओटा असमानताहरू लेखी फलन $P = 4x + 9y$ को अधिकतम मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



(b) दिइएको लेखाचित्रबाट छाया पारिएको भागले जनाउने पाँच ओटा असमानताहरू लेखी फलन $P = 2x + y - 4$ को अधिकतम मान पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।



1.5 वर्ग समीकरण र लेखाचित्र (Qudratic Equacation and Graphs)

वर्गफलनको लेखाचित्र (Graph of Square Function)

तल दिइएका फलनहरू अध्ययन गरौं :

(i) $y = x^2$ (ii) $y = 2x + 3$ (iii) $y = 2x^2$

(iv) $3x - 4y = 2$ (v) $y = x^2 - 2$ (vi) $y = x^2 + 2x - 3$

माथिका फलनका आधारमा निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) कुन कुन फलनहरू वर्गफलन हुन्, किन ?

(ख) वर्गफलनको स्वरूप के कस्तो हन्छ ?

(ग) के सबै स्वरूपको वर्गफलनलाई लेखाचित्रमा देखाउन सकिन्छ ?

माथि दिइएका फलनहरूमध्ये *(ii)* र *(iv)* को डिग्री *1* छ भने बाँकी सबै फलनको डिग्री दुई रहेको छ । तसर्थ *(ii)* र *(iv)* रेखीय फलन हुन् भने फलन *(i), (iii), (v)* र *(vi)* वर्गफलन हुन् ।

वर्गफलन विभिन्न स्वरूपको हुन्छ जस्तै : $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = ax^2 + bx + c$, जहाँ $a \neq 0$ आदि । वर्गफलनको साधारण रूप $y=ax^2+bx+c$ हुन्छ । जहाँ, a, b र c अचल राशि हुन् । सब स्वरूपको वर्गफलनलाई लेखाचित्रमा देखाउन सकिन्छ ।

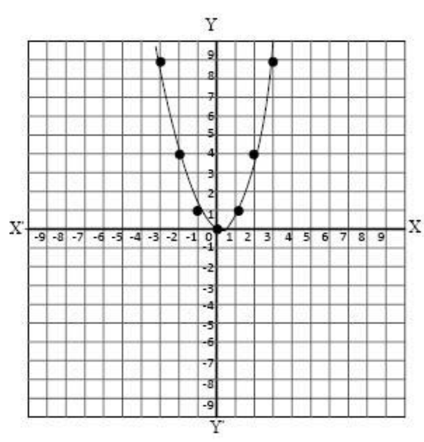
दुई वर्गफलनहरू (i) $y = x^2$ (ii) $y = -x^2$ लिई लेखाचित्रमा देखाऔं ।

(i) $y = x^2$

यहाँ, फलन $y = x^2$ लाई लेखाचित्रमा देखाउन केही बिन्दुहरू पत्ता लगाऔं :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

माथिका *x* र *y* का यी मानहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी बिन्दुहरू जोडौं । यी बिन्दुहरू जोड्दा चित्रमा देखाइए जस्तै एउटा ∪ आकारको निरन्तर बक्र बन्छ ।



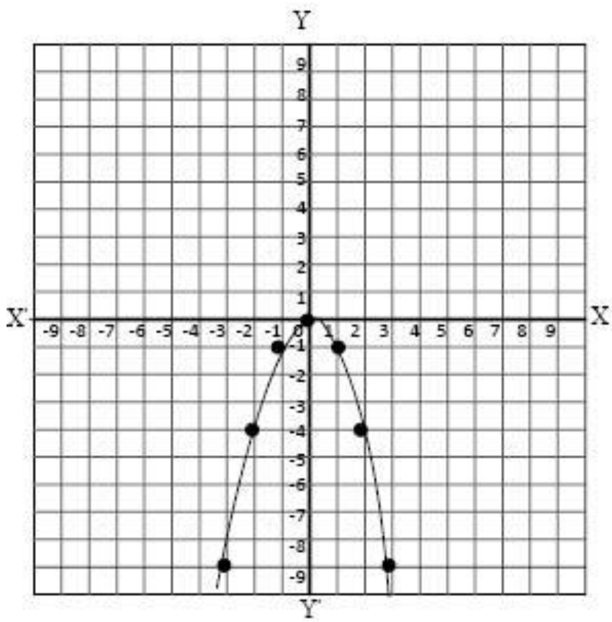
यो वक्रलाई पाराबोला *(parabola)* भनिन्छ । यो पाराबोला घुमेको बिन्दु *(turning point)* शीर्षबिन्दु हो । यो पाराबोलाको शीर्षबिन्दु उद्गम बिन्दु *(0,0)* छ । यो पाराबोला *y-axis* मा सममितिक *(symmetrical)* भएको देखिन्छ ।

(ii) $y=-x^2$

फलन $y=-x^2$ लाई लेखाचित्रमा देखाउन केही बिन्दुहरू पत्ता लगाऔं ।

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

माथिका *x* र *y* का मानहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी बिन्दुहरू जोडौं ।



यी बिन्दुहरू जोड्दा माथि चित्रमा देखाइए जस्तै ∩ आकारको वक्र रेखा (पाराबोला) बन्दछ । यो पाराबोलाको घुमेको बिन्दु वा शीर्षबिन्दु उद्गम बिन्दु *(0,0)* हुन्छ भने पाराबोला *y-axis* मा नै *(symmetrical)* भएको देखिन्छ ।

अब, बीजीय फलन फरक हुनासाथ वर्गफलनको आकृति वा स्वरूपमा कस्तो परिवर्तन होला भन्ने बारे छलफल गरौं ।

(क) वर्गफलनको गुणाङ्क फरक भएमा

वर्गफलनको गुणाङ्क फरक भएमा पाराबोलाको आकृति वा स्वरूप के कस्तो हुन्छ भन्ने थाहा पाउन वर्गफलन $y = ax^2$ लिऔं ।

अब, $a = 2, 1, \frac{1}{2}, -2, -1, -\frac{1}{2}$ राखी पाराबोलाहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाऔं ।

(i) $a = 2$ राख्दा, $y = 2x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

(ii) $a = 1$ राख्दा, $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

(iii) $a = \frac{1}{2}$ राख्दा, $y = \frac{1}{2}x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$

(iv) $a = -2$ राख्दा, $y = -2x^2$

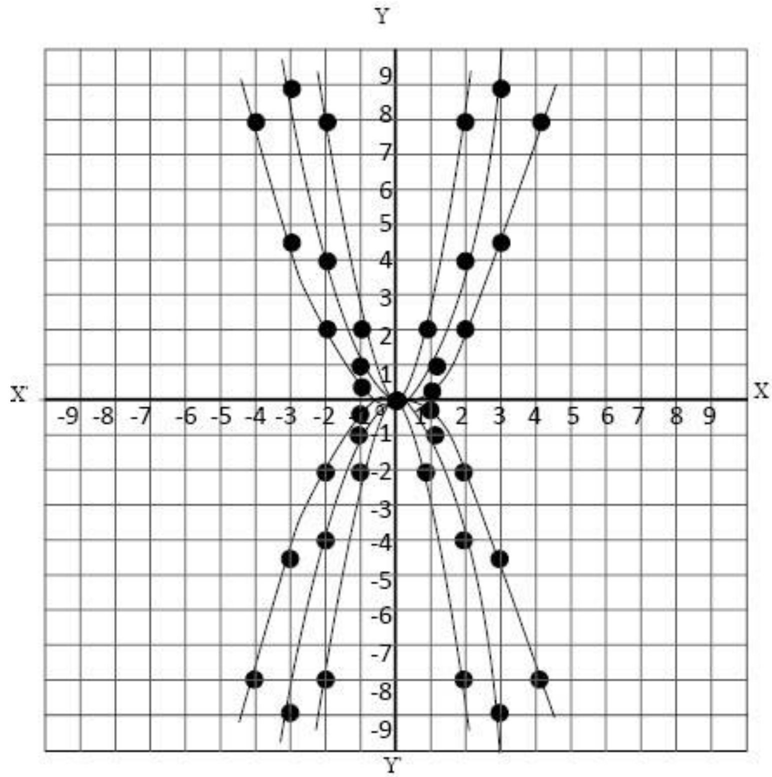
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

(v) $a = -1$ राख्दा, $y = -x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

(vi) $a = -\frac{1}{2}$ राख्दा,

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-4\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-4\frac{1}{2}$



माथिको लेखाचित्रमा वर्गफलन $y=ax^2$ मा a का विभिन्न मानहरूमा प्राप्त हुने लेखाचित्रबाट के कस्तो निष्कर्ष आउँछ ? छलफल गर्नुहोस् । यसबाट निम्न निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ :

पहिलो अवस्था : यदि $a > 0$ भएमा,

(क) फलनको लेखाचित्र (पाराबोला) उद्गम बिन्दुबाट माथितिर फर्केको वा U आकारको हुन्छ ।

(ख) a को मान जति ठुलो हुन्छ त्यति नै पारबोलाको मुख साँघुरो हुँदै जान्छ ।

(ग) a को मान जति सानो हुन्छ त्यति नै पाराबोलाको मुख फराकिलो हुँदै जान्छ ।

दोस्रो अवस्था : यदि $a < 0$ भएमा

(क) फलनको लेखाचित्र (पाराबोला) उद्गम बिन्दुबाट तलतिर फर्केको हुन्छ । यो उल्टो U वा ∩ आकारको हुन्छ ।

(ख) a को मान जति ठुलो हुँदै जान्छ त्यति नै पाराबोलाको मुख साँघुरो हुँदै जान्छ ।

(ग) a को मान जति सानो हुँदै जान्छ त्यति नै पाराबोलाको मुख फराकिलो हुँदै जान्छ ।

(ख) **स्वतन्त्र रूपमा रहेको अचल फरक भएमा**

मानौँ, तीन ओटा वर्गफलन लिऔँ जसको स्वतन्त्र अचल राशि छ ।

(i) $y = x^2+2$ (ii) $y = x^2$ (iii) $y = x^2- 3$

यी तीन ओटै वर्गफलनलाई लेखाचित्रमा देखाऔँ ।

(i) $y = x^2+2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	6	3	2	3	6	11

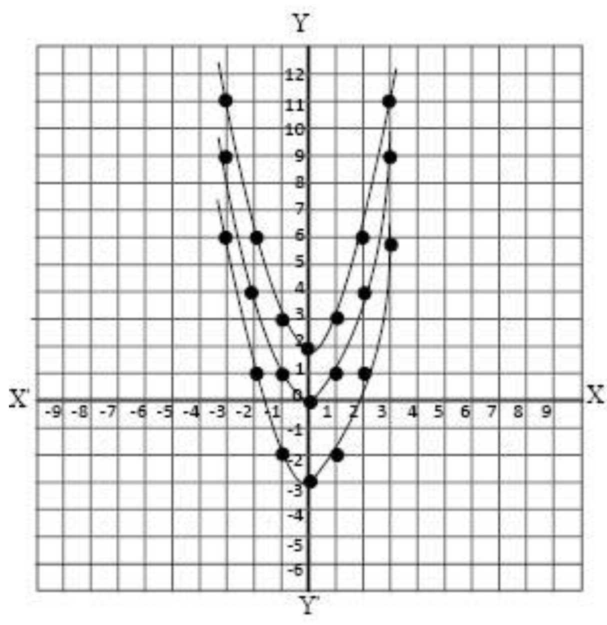
(ii) $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

(iii) $y=x^2 - 3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

तीन ओटै फलनका *x* र *y* का मानहरूलाई लेखाचित्र देखाउँदा,



माथिको लेखाचित्रबाट, वर्गफलनमा स्वतन्त्र रूपमा अचल सङ्ख्या फरक आएमा

(क) स्वतन्त्र अचल राशि धनात्मक भएमा उद्गम बिन्दुको माथि *(y-अक्षमा)* उक्त पाराबोलाको शीर्षबिन्दु *(vertex)* हुन्छ । वर्गफलनको पाराबोला ∪ आकारको हुन्छ ।

(ख) स्वतन्त्र अचल राशि ऋणात्मक भएमा उद्गम बिन्दुको तल *(y-अक्षमा)* उक्त पाराबोलाको शीर्षबिन्दु *(vertex)* पर्दछ । वर्गफलनको पाराबोला ∪ आकारको नै हुन्छ ।

(ग) x- सँग थपिएर आएको अचलमा फरक आएमा

तीन वर्गफलनहरू लिऔँ, (i) $y=(x-3)^2$ (ii) $y=x^2$ (iii) $y=(x+4)^2$

यहाँ, तीन ओटै फलनहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउन x र y का मानहरू पत्ता लगाउँदा,

(i) $y = (x - 3)^2$

x	1	2	3	4	5	6
y	4	1	0	1	4	9

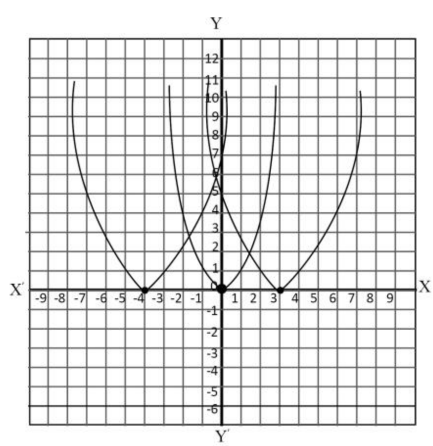
(ii) $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

(iii) $y = (x + 4)^2$

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	9	4	1	0	1	4	9

माथिका तीन ओटै चित्रहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउँदा



माथिको लेखाचित्रबाट निम्न निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ :

(क) यदि वर्गफलनको x सँग थपिएको अचल राशि घनात्मक भएमा जति जति थपिएको हो त्यति एकाइ उद्गम बिन्दुबाट बायाँ *(x- अक्षमा)* शीर्षबिन्दु *(vertex)* हुन्छ र पाराबोला माथि फर्केको हुन्छ ।

(ख) यदि x- सँग थपिएको अचल राशि ऋृणात्मक भएमा जति ऋृणात्मक छ त्यति एकाइ दायाँ *(x-अक्षमा)* शीर्षबिन्दु *(vertex)* हुन्छ र पाराबोला माथि नै फर्केको हुन्छ ।

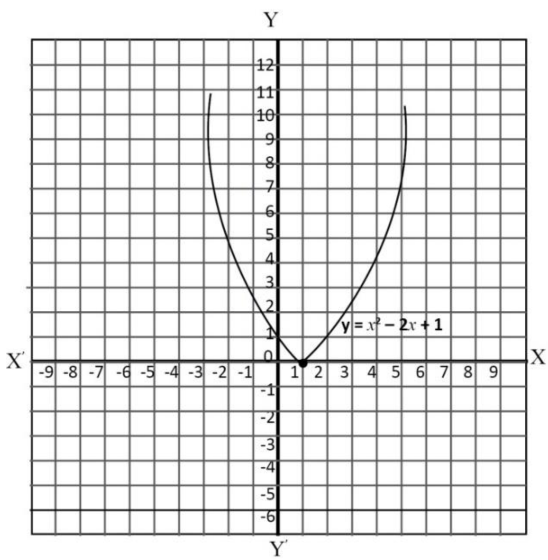
वर्गफलन $y = ax^2 + bx + c$ को लेखाचित्र

एउटा वर्गफलन $y=x^2-2x+1$ लिऔँ ।

यसलाई लेखाचित्रमा देखाउनका लागि x र y का केही मानहरू निकालौँ ।

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

माथिका जोडा मानहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,



माथिको लेखाचित्रमा पाराबोलाको शीर्षबिन्दुको निर्देशाङ्क *(1, 0)* छ र पाराबोलाले y-अक्षको बिन्दु *(0, 1)* मा भेटेको छ । वा y-खण्ड *(c) =1* छ ।

$y=ax^2 + bx + c$ स्वरूपको वर्गफलनमा शीर्ष बिन्दुको निर्देशाङ्क निकाल्न निम्न प्रक्रिया गरिन्छ :

पाराबोलाको मानक *(standard)* समीकरण $y = a(x-b)^2 +k^2$ ……….*(i)* हुन्छ । जहाँ, *(h, k)* शीर्षबिन्दुको निर्देशाङ्क हो । वर्ग समीकरण $y = ax^2 + bx + c$ लाई *standard* समीकरणमा रूपान्तर गर्दा निम्न प्रक्रिया अपनाउन सकिन्छ ।

यहाँ, $y = ax^2 + bx + c$

$$= a\left\{x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}\right\}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\therefore\ y = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

समीकरण *(ii)* लाई $y = a(x-h)^2+k$ सँग तुलना गर्दा,

$h = -\frac{b}{2a}$, $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$

तसर्थ, पाराबोलाको शीर्षबिन्दु $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ हुन्छ ।

उदाहरणहरू

1. पाराबोला $y = x^2+2x - 3$ को लेखाचित्र खिच्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $y = x^2 + 2x - 3$ …………..*(i)*

समीकरण *(i)* लाई $y = ax^2 + bx + c$ सँग तुलना गर्दा

$a = 1, b = 2, c = -3$

सूत्रअनुसार,

$\therefore$ पाराबोलाको शीर्ष बिन्दु $(h,k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$$= \left(-\frac{2}{2\times1}, \frac{4\times1\times(-3)-2^2}{4\times1}\right) = \left(-1, \frac{-16}{4}\right) = (-1, -4)$$

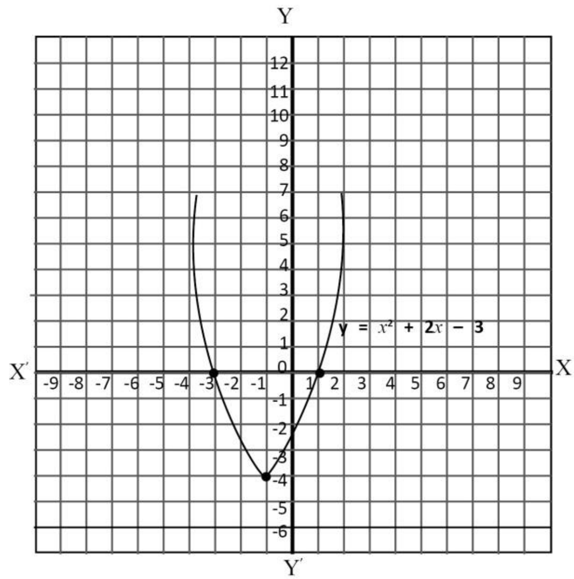
$\therefore (h, k) = (-1, -4)$

अब, पाराबोला *(i)* लाई लेखाचित्रमा खिच्न x र y का मानहरू निकाल्दा,

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

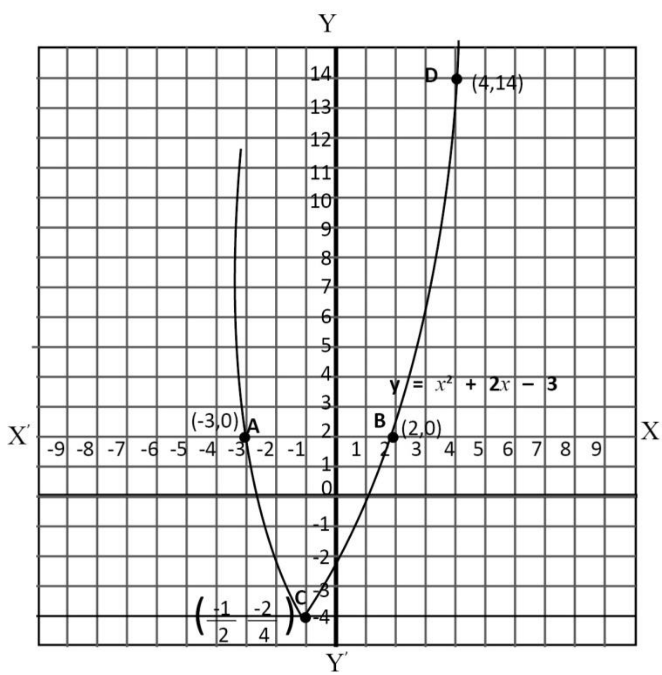
शीर्ष बिन्दु

माथिका *x* र *y* का मानहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,



अतः माथिको लेखाचित्र पाराबोला $y = x^2+2x-3$ को हो ।

2. दिइएको पाराबोलाको फलन पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

मानौँ पाराबोलाको समीकरण

$y = ax^2 + bx + c$ ……(i)

बिन्दुहरू $A(-3, 0), B(2, 0)$ र $D(4, 14)$ पाराबोला (i) मा पर्ने भएकाले,

बिन्दु $A(-3, 0)$ का लागि, $0 = 9a - 3b + c$…………….(ii)

बिन्दु $B(2, 0)$ का लागि, $0 = 4a + 2b + c$……………(iii)

बिन्दु $D(4, 14)$ का लागि, $14 = 16a + 4b + c$………..(iv)

समीकरण (ii) र (iii) बाट,

$9a - 3b + c = 4a + 2b + c$

अथवा, $9a - 4a = 3b + 2b$

अथवा, $5a = 5b$

$\therefore a=b$ ………(v)

फेरि, समीकरण (iv) बाट समीकरण (ii) घटाउँदा,

$14 = 16a + 4b + c$

$0 = 9a - 3b + c$

$-\quad -\quad +\quad -$

$14 = 7a + 7b$

$\therefore \quad a+b = 2$ …………..(vi)

$a + a = 2 \; [\because a = b]$

अथवा, $2a = 2$

$a = 1, b = 1$

a र b को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$0 = 9 \times 1 - 3 \times 1 + c$

अथवा, $0 = 9 - 3 + c$

अथवा, $0 = 6 + c$

$\therefore c = -6$

a, b र c को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$y = 1x^2 + 1 \times x - 6$

$= x^2 + x - 6$

अतः आवश्यक समीकरण $y = x^2 + x - 6$ हुन्छ ।

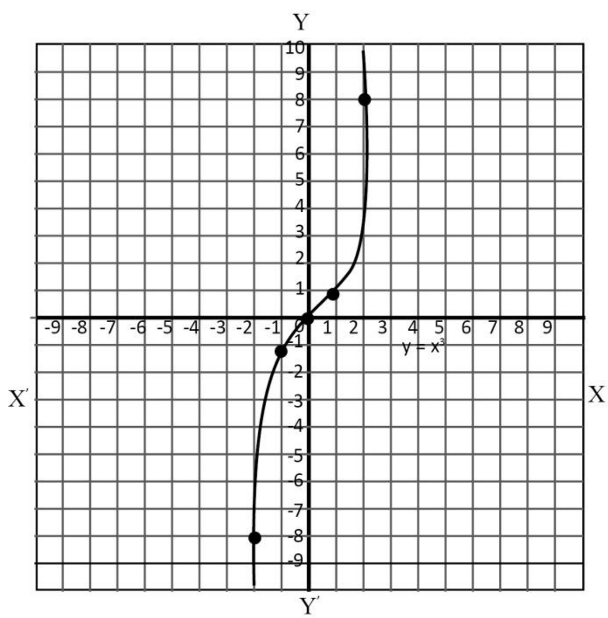
घन फलनको लेखाचित्र (Graph of cubic function)

चलराशिको घाताङ्क 3 भएको फलनलाई घन फलन *(Cubic Function)* जस्तैः $y = x^3$, $y = x^3 - 3x$, $y = (x-2)^3$, $y = 3x^3 + 5x^2 + 4$ आदि फलनहरूमा चल राशिको घाताङ्क 3 भएकाले उक्त फलनहरू घन फलन हुन् । घन फलनको साधारण रूप $y=ax^3+bx^2+cx+d$ हुन्छ । जहाँ a, b, c र d अचल राशि हुन् ।

मानौं, $y = x^3$ एउटै घन फलन हो । यसको लेखाचित्र खिच्नका लागि x र y का केही मानहरू निकालौँ ।

x	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*-27*	*-8*	*-1*	*0*	*1*	*8*	*27*

अब माथिका बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी बिन्दुहरू जोड्दा बन्ने लेखाचित्र नै $y=x^3$ को लेखाचित्र हो ।



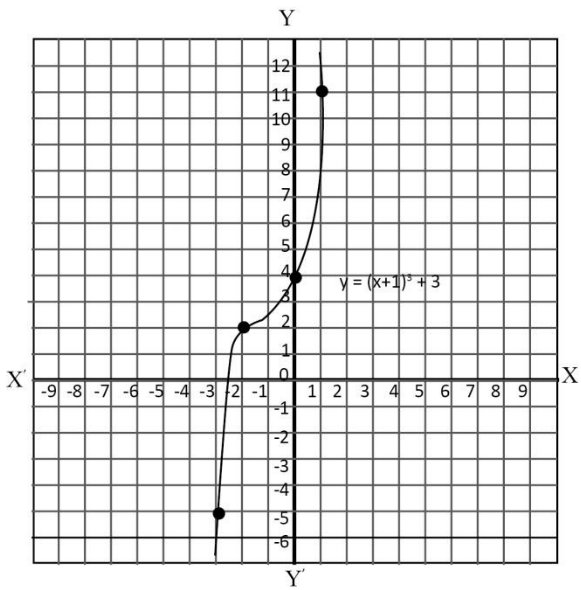
3. फलन $y = (x+1)^3 + 3$ लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, दिइएको घन फलन $y = (x+1)^3+3$……… *(i)* फलन *(i)* लाई लेखाचित्रमा खिच्न x र y का केही मानहरू निकाल्दा,

x	-4	-3	-2	0	1	2
y	-24	-5	2	4	11	30

माथिका क्रमजोडा मानहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,



लेखाचित्रद्वारा वर्ग समीकरणको हल

$ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ a, b र c अचल राशि हुन् । यस्तो स्वरूपको समीकरणलाई वर्ग समीकरण भनिन्छ, जस्तै : $x^2 = 4, x^2 + 7x + 12 = 0, x^2 - 5x = 0$ आदि वर्ग समीकरणहरू हुन् ।

वर्ग समीकरण हल गर्ने विधिहरू के के छन् ? छलफल गर्नुहोस् । कक्षा 9 को अनिवार्य गणितमा वर्ग समीकरण हल गर्ने खण्डीकरण विधि, सूत्र प्रयोग गरेर हल गर्ने विधि र वर्ग पूरा गर्ने विधिका बारेमा अध्ययन गरिसकेका छौँ । यहाँ लेखाचित्र विधिबाट वर्ग समीकरण हल गर्ने विधिबारे अध्ययन गर्ने छौँ ।

एउटा वर्ग समीकरण $x^2 - 4x + 3 = 0$ लिऔँ ।

यसलाई खण्डीकरण विधिबाट हल गर्दा,

$x^2 - 4x + 3 = 0$

अथवा, $x^2 - x - 3x + 3 = 0$

अथवा, $x(x-1)-3(x-1) = 0$

अथवा, $(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1,3$

उक्त समीकरणको हल $x = 1$ वा 3 हो ।

उक्त समीकरणलाई लेखाचित्र विधिबाट हल गर्दा पनि $x = 1$ वा 3 हुनुपर्छ ।

यहाँ,

मानौँ, $y = x^2 - 4x + 3 = 0$

$y = 0$……….(i)

$y = x^2 - 4x + 3$……. (ii)

अब, पाराबोला (ii) को शीर्षबिन्दु $(x,y) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

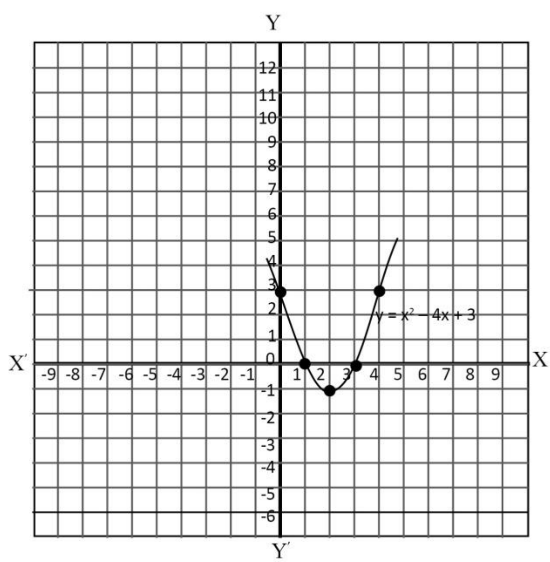
$$= \left(\frac{4}{2\times1}, \frac{4\times1\times3-4^2}{4\times1}\right) = (2,-1)$$

पाराबोला (ii) लाई लेखाचित्रमा खिच्न, x र y का केही मानहरू निकाल्दा,

$y = x^2 - 4x + 3$

x	0	1	2	3	4	5
y	3	0	-1	0	3	8

माथिका क्रमजोडा बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी निम्न पाराबोला खिच्दा,



माथिको लेखाचित्रमा पाराबोला (ii) लाई सिधारेखा $y = 0$ (x-axis) ले बिन्दु (1, 0) र (3, 0) मा काटेको छ । तसर्थ वर्ग समीकरण $x^2 - 4x + 3 = 0$ को हल (1 ,0) र (3, 0) हुन् ।

अतः $x = 1$ वा 3 नै $x^2 - 4x + 3 = 0$ का मानहरू हुन् ।

अर्को तरिका (वैकल्पिक विधि)

यहाँ, वर्ग समीकरण $x^2 - 4x + 3 = 0$

अथवा, $x^2 = 4x — 3 = y$ (मानौँ)

$\therefore y = x^2$……………(i)

र $4x — 3= y$……………(ii)

अब, पाराबोला (i) सिधा रेखा (ii) लाई लेखाचित्रमा देखाउन x र y का केही मानहरू निकाल्दा,

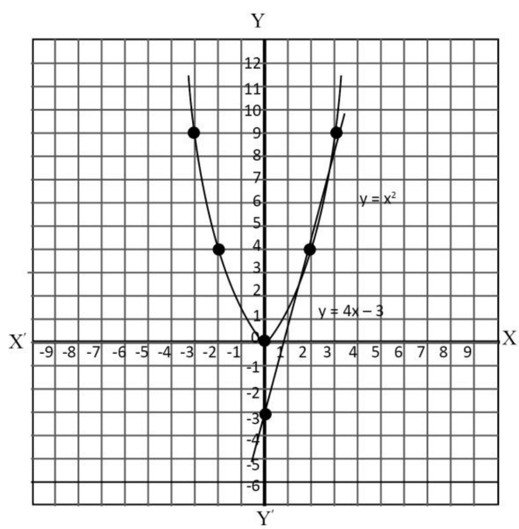
$y = x^2$ बाट,

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 4x — 3$ बाट

x	0	2
y	-3	5

दुवै समीकरणका क्रमजोडा मानहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,



माथिको लेखाचित्रमा पाराबोला (i) लाई सिधा रेखा (ii) ले बिन्दु $A(1, 1)$ र $B(3 ,9)$ मा प्रतिच्छेदन गरेको छ । A र B का x निर्देशाङ्कहरू 1 र 3 हुन् ।

$\therefore x = 1,3$

तसर्थ $x^2 - 4x + 3 = 0$ को हल $x = 1$ वा 3 हो ।

वर्ग समीकरण र युगपत रेखीय समीकरणको हल
(Quadratic and Simuttanuous linear equation)

सामान्यतया सिधा रेखाले वक्र रेखालाई दुई ओटा बिन्दुहरूमा काट्छन् । यसरी काटिएका हरेक बिन्दु वक्र रेखा र सिधा रेखाको हल हुन्छ । तसर्थ वर्ग समीकरण्को लेखाचित्र (पाराबोला) लाई सिधा रेखाले प्रतिच्छेदन गर्ने बिन्दुहरू नै वर्ग समीकरण र रेखीय समीकरणको हल हो ।

एउटा वर्ग समीकरण $y=x^2+2$ र रेखीय समीकरण $4x-y=1$ लिऔं,

(क) यी दुई समीकरणलाई प्रतिस्थापन विधिबाट हल गर्दा,

$y=x^2+2$………………(i)

$4x-y=1$……………….(ii)

समीकरण *(i)* बाट y को मान समीकरण *(ii)* मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$4x - (x^2+2) = 1$

अथवा, $4x - x^2 – 2 - 1= 0$

अथवा, $x^2 - 4x + 3 = 0$

अथवा, $x^2 - 3x – x + 3 = 0$

अथवा, $x(x - 3) -1(x - 3) = 0$

अथवा, $(x - 3)(x - 1) = 0$

अथवा, $(x - 1) = 0$ $\therefore x = 1$

अथवा, $(x - 3) = 0$ $\therefore x = 3$

$\therefore x = 1$ वा 3

x को मान समीकरण *(ii)* मा राख्दा,

$4x-y = 1$

$x = 1$ राख्दा, $y= 4x - 1 = 4\times1-1=3$

$x = 3$ राख्दा $y = 4x-1 = 4\times3-1=11$

अतः दुई समीकरणहरूको हल $(3,11)$ वा $(1,3)$ हुन्छ ।

(ख) माथिका समीकरणहरूलाई लेखाचित्र विधिबाट हल गर्दा,

वर्ग समीकरण $y=x^2+2$…………………….(i)

सिधा रेखा $4x-y=1$………………………..(ii)

समीकरण (i) लाई $y=ax^2+bx+c =0$ सँग तुलना गर्दा, $a = 1, b = 0$ र $c = 2$

पाराबोलाको शीर्षबिन्दु *(vertex)* $(h,k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$$= \left(-\frac{0}{2\times1}, \frac{4\times1\times2-0}{4\times1}\right)$$

$$= (0,2)$$

समीकरण (i) लाई लेखाचित्रमा देखाउन *x* र *y* का केही मानहरू लिँदा

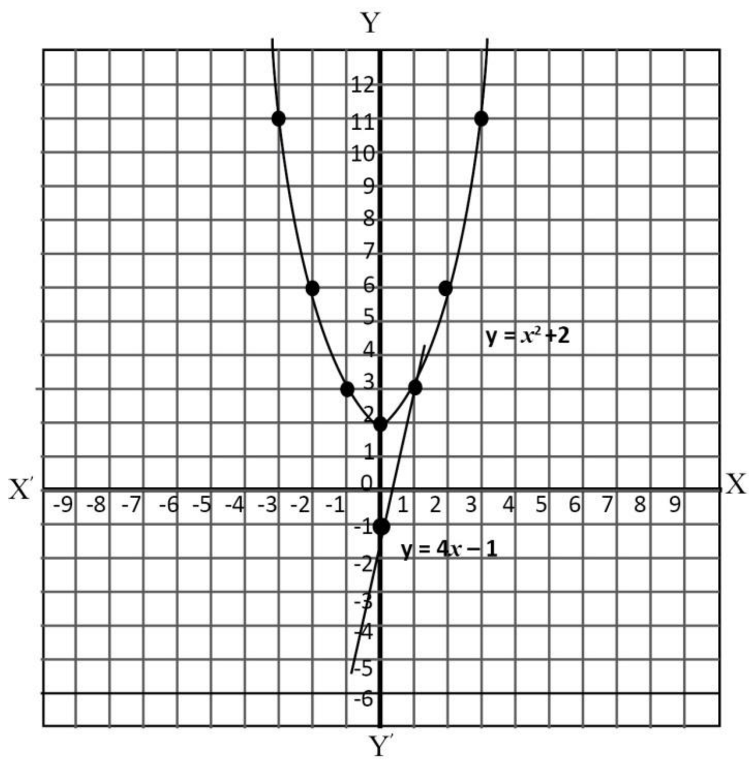
x	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*11*	*6*	*3*	*2*	*3*	*6*	*11*

फेरि समीकरण (ii) बाट

y = 4x-1

x	*0*	*1*	*2*
y	*-1*	*3*	*7*

पाराबोला (i) र रेखा (ii) लाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,



माथिको लेखाचित्रमा पाराबोला (i) ले सिधा रेखा (ii) लाई बिन्दुहरू *A(1,3)* र *B(3,11)* मा प्रतिच्छेदित भएका छन् तसर्थ *x* का मानहरू *1* वा *3* हुन्छ ।

अभ्यास 1.5

1. निम्न लिखित समीकरणको लेखाचित्र खिच्नुहोस् :

   (क) $y = 2x^2$ (ख) $y = 4x^2 + 5$ (ग) $y = x^2 - 1$

   (घ) $y = \frac{1}{4}(x^2+2)$ (ङ) $y = x^2 + x + 6$ (च) $y = x^2 + x - 2$

2. निम्न लिखित समीकरणको लेखाचित्र खिच्नुहोस् :

   (क) $y = 2x^3$ (ख) $y = 3x^3 - 10$ (ग) $y = 4x^3 - 15$

   (घ) $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}$

3. निम्न लिखित समीकरणको लेखाचित्र खिच्नुहोस् :

   (क) $y = 4x^2 + 8x + 5$ र $x + y = 3$ (ख) $y = x^2 - x - 3$ र $x = y$

   (ग) $y = 6x^2 - 2x - 15$ र $y = 4x - 3$ (घ) $y = x^2 + 2x - 8$ र $y = -5$

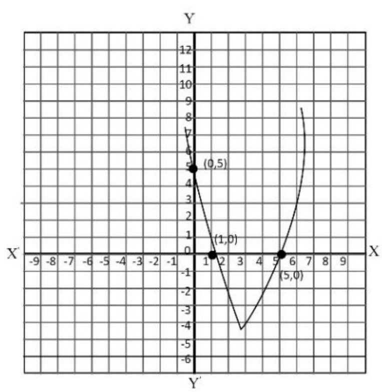
4. वर्ग समीकरणलाई लेखाचित्र विधिद्वारा हल गर्नुहोस् ।

   (क) $x^2+2x-3=0$ (ख) $3x^2+5x+2=0$

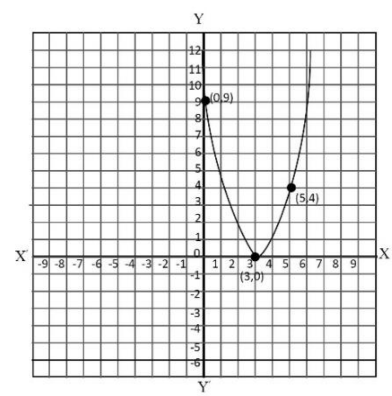
   (ग) $x^2-5x+6=0$ (घ) $x^2-4x+4=0$

5. तल दिइएका पाराबोलाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

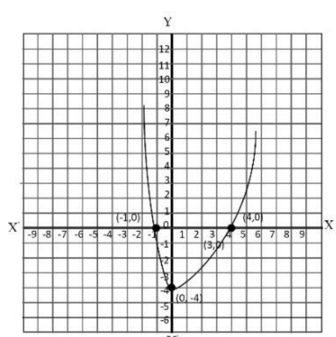
   (क)



   (ख)



   (ग)



6. आफ्नो वरिपरि पाइने संरचनाहरूका आकृतिहरू कहाँ कहाँ देख्नु भएको छ ? छोटो प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् ।

एकाइ 2

निरन्तरता (Continuity)

2.0 पुनरावलोकन (Review)

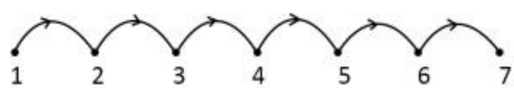
समूहमा छलफल गरी तल दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् :

- प्राकृतिक सङ्ख्या, पूर्ण सङ्ख्या, अनुपातिक सङ्ख्या र वास्तविक सङ्ख्याहरूबिच के कस्ता सम्बन्धहरू छन् ? यिनीहरूलाई चित्रमा के कसरी देखाउन सकिन्छ ?
- नियमित र निरन्तर शब्दहरू दैनिक जीवनमा कहाँ कहाँ र कसरी प्रयोग भएको पाइन्छ ?
- कक्षा ९ मा सीमान्त मानसँग सम्बन्धित के कस्ता विषयवस्तुहरू अध्ययन गरियो ?

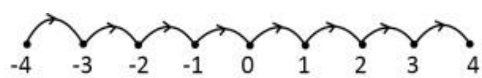
2.1 सङ्ख्याहरूको क्रमको समूहमा निरन्तरता (Continuity in the order of set of numbers)

तल दिइएका सङ्ख्याहरूको क्रम अध्ययन गरी प्राप्त नतिजा के होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

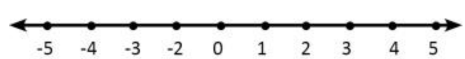
(a) के प्राकृतिक सङ्ख्याहरूले तलको चित्रमा निरन्तरता देखाउँछन् ?



(b) के पूर्णाङ्कहरूले तलको चित्रमा निरन्तरता देखाउँछन् ?



(c) के वास्तविक सङ्ख्याहरूले तलको चित्रमा निरन्तरता देखाउँछन् ?



माथि दिएका उदाहरणहरूमा a र b मा सङ्ख्याहरूको निरन्तरता पाइँदैन भने c मा निरन्तरता पाइन्छ, किनकि a र b मा दुई ओटा सङ्ख्याहरूका बिचमा अन्य त्यही गुण भएको सङ्ख्या परिभाषित हुँदैन् । तर c मा रेखाका प्रत्येक बिन्दुमा वास्तविक सङ्ख्या परिभाषित हुन्छ ।

कछुवा र खरायोको दौड गराइयो भने कसको दौडमा निरन्तरता देख्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् र प्राप्त नतिजालाई तर्कपूर्ण प्रस्तुति गर्नुहोस् ।

- के खरायोले जमिनमा पर्ने सबै बिन्दुहरूलाई छोएर जान्छ ?
- के कछुवाले जमिनमा भएका अथवा दौडको रेखामा पर्ने प्रत्येक बिन्दुहरू छोएर जान्छ ?

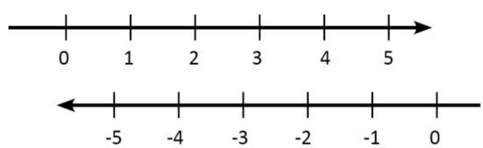
- खरायो उफ्रेर जाने र कछुवा घस्रेर जाने हुनाले कछुवाले आफ्नो बाटामा पर्ने सबै बिन्दुहरूलाई छोएर जान्छ, त्यसैले कछुवाको दौडमा निरन्तरता पाइन्छ ।

यदि खरायो र कछुवाको दौडलाई सङ्ख्या रेखाहरूसँगै दाँज्ने हो भने प्राकृतिक सङ्ख्या अथवा पूर्णाङ्कहरू क्रममा देखिएको जस्तै खरायोमा र वास्तविक सङ्ख्यामा देखिए जस्तै कछुवाको दौडमा देखिन्छ ।

अभ्यास : 2.1

1. **तल दिएका सङ्ख्याहरूलाई चित्रद्वारा सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :**
   (a) 1 देखि 5 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरू
   (b) 8 देखि 6 सम्मका पूर्णाङ्कहरू
   (c) -4 देखि +6 सम्मका पूर्णाङ्कहरू
   (d) -4 देखि +4 सम्मका वास्तविक सङ्ख्याहरू

2.(a) तल दिइएका वास्तविक सङ्ख्यारूको चित्रात्मक प्रस्तुतिमा के फरक छ ?



(b) प्राकृतिक सङ्ख्याको सुरुको सङ्ख्या कति हुन्छ ?

(c) प्राकृतिक सङ्ख्याको अन्तिम सङ्ख्या कति हुन्छ ?

(d) के समतलीय सतहमा प्राकृतिक सङ्ख्याहरूलाई सिधा रेखाले जोड्न सकिन्छ ?

(e) वास्तविक सङ्ख्याहरू र प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको चित्रात्मक प्रस्तुतिमा के फरक छ ?

3. निरन्तर र निरन्तरता शब्दको अर्थ स्पस्ट पार्दै हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रयोग हुने गरेका एउटा-एउटा उदाहरण प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4. वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई जनाउने गरी एउटा सङ्ख्या रेखा खिच्नुहोस् । उक्त सङ्ख्या रेखामा पूर्णाङ्कहरू र वास्तविक सङ्ख्याहरूमध्ये कुन कुनमा निरन्तरता देख्न सकिन्छ ? व्याख्या गर्नुहोस् ।

5.(a) एउटा बिरुवाको आइतबारको उचाइ 3 मि.मि. छ । उक्त बिरुवा प्रत्येक दिन निरन्तर रूपमा 2 मि.मि. बढ्दै जान्छ । त्यही हप्ता शनिबार उक्त बिरुवाको उचाइ कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

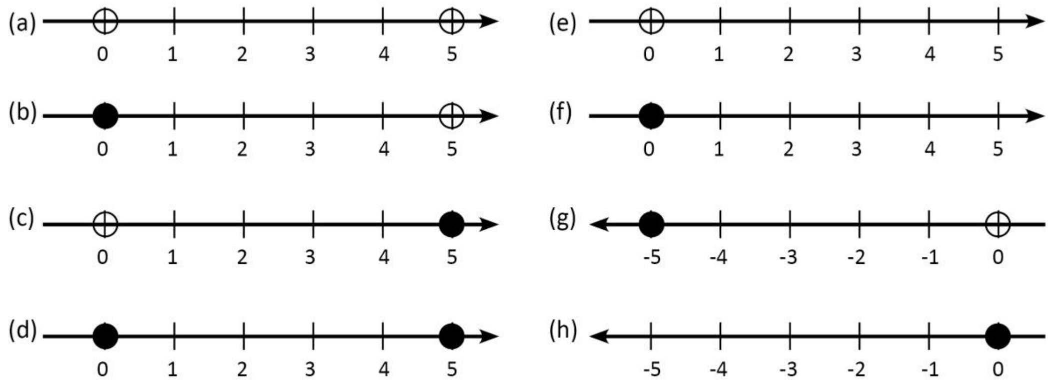
(b) एउटा विद्यार्थीको खुत्रुकेमा महिनाको पहिलो दिन रु.20 छ । प्रत्येक दिन निरन्तर रूपमा उसले रु. 10 रकम सो खुत्रुकेमा जम्मा गर्दै जान्छ । 20 दिनसम्म जम्मा भएको रकमलाई सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् ।

2.2: लेखाचित्रबाट फलनको विच्छिन्नताको खोजी (Investigation of discontinuity in graph):

एउटा कागजमा कलम नउठाई लगातार कोर्दै जादा कस्तो चित्र बन्छ, हेर्नुहोस् ।

तपाइँको विज्ञानको पाठ्यपुस्तकमा ध्वनि एकाइसँग सम्बन्धित के कस्ता चित्रहरू दिइएका छन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

तल दिइएका रेखाहरूमा सुरु र अन्तिम अवस्थाहरू के के हुन् ? छलफल गर्नुहोस् ।



(a) मा लेखिएका सङ्ख्याहरूलाई 0 देखि 5 सम्मका वास्तविक सङ्ख्याहरू निरन्तर समावेश भएको जनाउँछ । त्यसैले यसलाई 0 बाट 5 सम्म (0, 5) लेखिन्छ ।

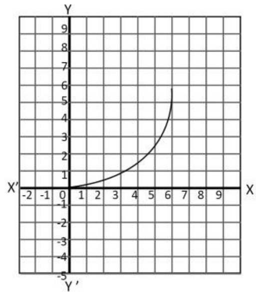
(b) मा लेखिएका सङ्ख्याहरूलाई 0 र 0 देखि 5 सम्मका वास्तविक सङ्ख्याहरू निरन्तर समावेश भएको जनाउँछ । त्यसैले यसलाई 0 बाट 5 सम्म [0, 5) लेखिन्छ ।

(c) मा लेखिएका सङ्ख्याहरूलाई 0 देखि 5 र 5 सम्मका वास्तविक सङ्ख्याहरू निरन्तर समावेश भएको जनाउँछ । त्यसैले यसलाई 0 बाट 5 सम्म (0, 5] लेखिन्छ ।

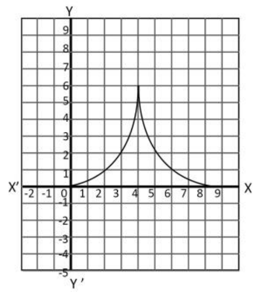
(d) मा लेखिएका सङ्ख्याहरूलाई 0 देखि 5 सम्मका वास्तविक सङ्ख्याहरू निरन्तर समावेश भएको जनाउँछ । त्यसैले यसलाई 0 बाट 5 सम्म [0, 5] लेखिन्छ ।

यसरी लेखिएका सङ्ख्याहरूमा दुवै अन्तिम सङ्ख्याहरू समावेश हुने, नहुने र एउटा मात्र समावेश हुने अवस्थाहरू देख्न सकिन्छ । त्यस्तै (e), (f), (g), (h) मा अन्तिम, सुरुको बिन्दु समावेश हुने नहुने अवस्था के के हुन् छलफल गर्नुहोस् ।

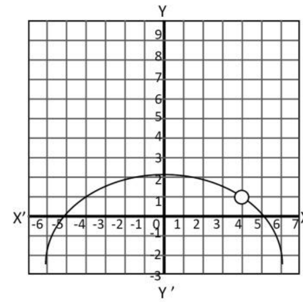
तल दिइएका लेखाचित्रहरू अध्ययन गरी तिनीहरूको प्रकृतिका सम्बन्ध बारेमा छलफल गर्नुहोस् ।



(a)



(b)



(c)

माथि दिइएका लेखाचित्रहरू मध्ये

(a) मा दिइएको लेखाचित्र बिन्दु 0 देखि 6 सम्म के एक समान रूपले निरन्तर अघि बढेको छ ?

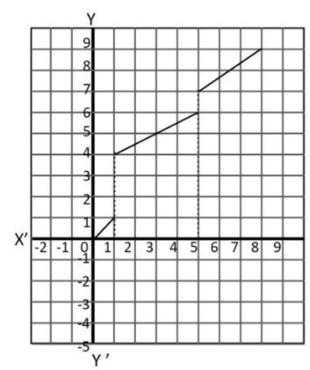
(b) मा दिइएको लेखाचित्र के बिन्दु '4' मा गएर टुटेको छ ?

(c) मा दिइएको लेखाचित्र के बिन्दु '4' मा परिभाषित छैन ?

यदि कुनै वक्र कुनै निश्चित बिन्दुमा गएर छुटेको (break) छ भने उक्त वक्र दिइएको निश्चित बिन्दुमा विच्छिन्न (discontinuous) भएको मानिन्छ । यस्तो अवस्थामा gap, hole, cusp र curve देखापर्ने गरी टुटेका देखिन्छन् ।

उदाहरणहरू

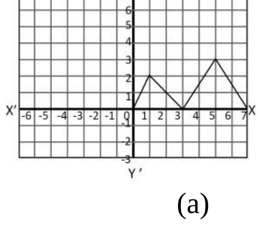
1. चित्रमा एउटा आनुपातिक भिन्न (rational fraction) को लेखाचित्र दिइएको छ । उक्त वक्र कुन कुन बिन्दुमा विच्छिन्न छ र किन ?



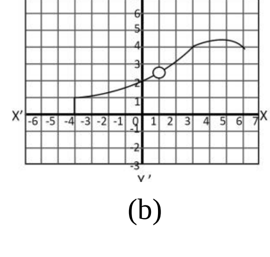
समाधान

दिइएको लेखाचित्रमा आनुपातिक भिन्नको वक्र क्रमशः बिन्दु $x = 1$ र $x = 5$ मा टुटेको (breakdown) छ । त्यसैले उक्त वक्र $x = 1$ र $x = 5$ मा विच्छिन्न (discontinuous) छ ।

2. तल दिइएका वक्रहरू (a) र (b) को निरन्तरता र विच्छिन्नताका सम्बन्धमा टिप्पणी गर्नुहोस् ।



(a)



(b)

समाधान

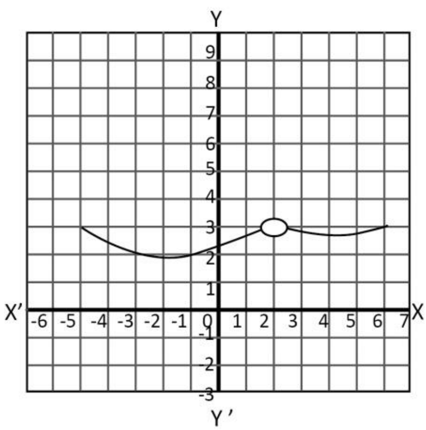
(a) दिइएका वक्ररेखा बिन्दु $x = 0$ देखि $x = 7$ सम्म खिचिएको छ । $x = 0$ देखि $x = 7$ बिचमा पर्ने बिन्दुहरू क्रमशः $x = 1$ र $x = 3$ मा उक्त वक्र टुटेको (break down) छ । त्यसैले उक्त वक्र ती बिन्दुहरूमा विच्छिन्न (discontinuous) छ ।

(b) दिइएको वक्र रेखा $x = -4$ देखि $x = 6$ सम्म खिचिएको छ । $x = -4$ र $x = 6$ को बिचमा पर्ने बिन्दुहरू $x = 1$ मा वक्र टुटेको अवस्थामा छ भने अन्य बिन्दुहरूमा निरन्तर अघि बढेको अवस्था छ । त्यसैले दिइएको वक्र $x = 1$ मा विच्छिन्न (discontinuous) र अन्य बिन्दुहरूमा अविच्छिन्न निरन्तर (continuous) छ ।

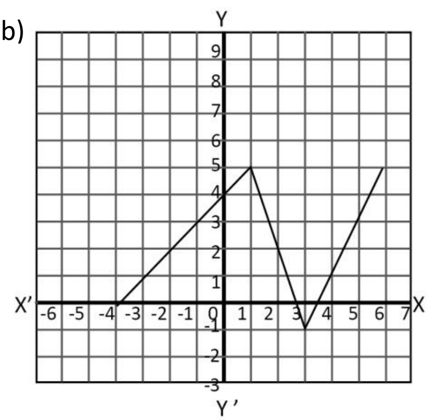
अभ्यास 2.2

1. तल दिइएका वक्रहरू (i) कुन बिन्दुदेखि कुन बिन्दुसम्म परिभाषित र (ii) कुन बिन्दुमा विच्छिन्न (discontinuous) छन्, लेख्नुहोस ।

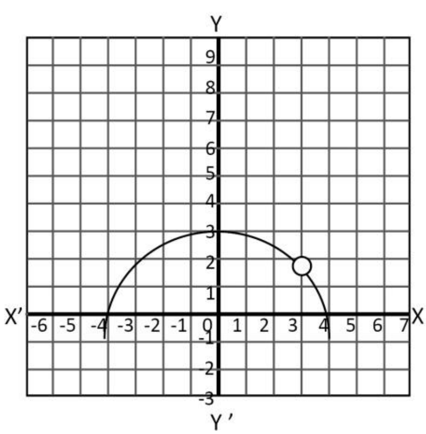
(a)



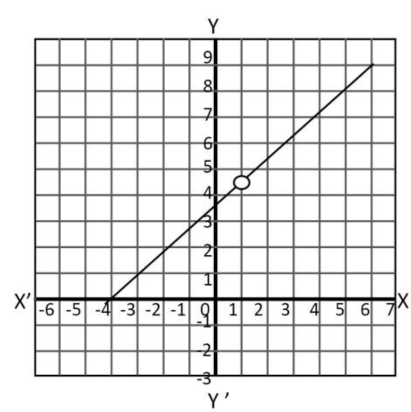
(b)



(c)

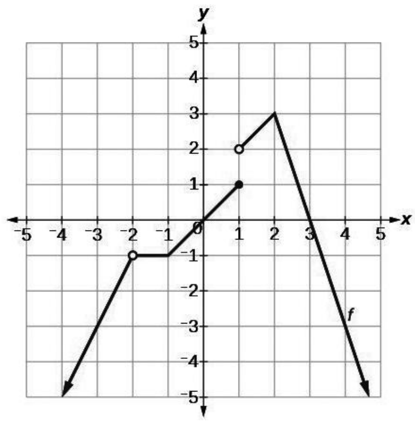


(d)

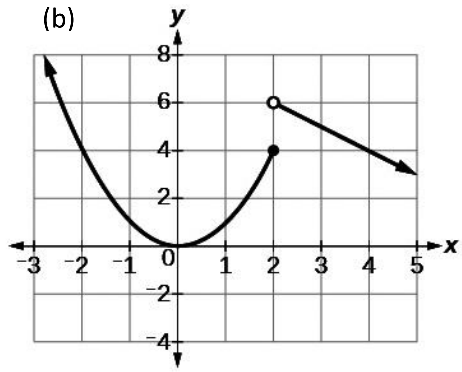


2. तल दिइएका वक्रहरू -4 देखि +4 सम्म कुन बिन्दुमा निरन्तर (continuous) र कुन बिन्दुमा विच्छिन्न (discontinuous) छन्, लेख्नुहोस् ।

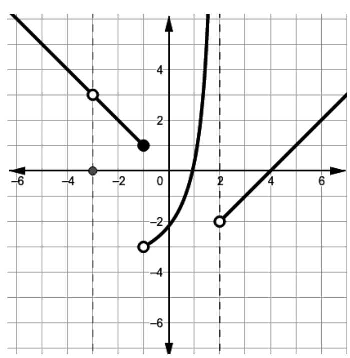
(a)



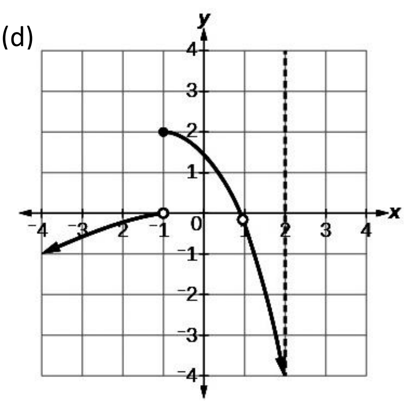
(b)



(c)



(d)



3. आफ्नो टोल अथवा छिमेकमा बस्ने मानिसहरूको उमेर सोधी तल दिइएको तालिका भर्नुहोस् ।

उमेर वर्षमा	0-20	20-40	40-60	60-80	80 भन्दा माथि
मानिसहरूको सङ्ख्या					

उक्त तथ्याङ्कका आधारमा भन्दा कम (is less than) र भन्दा बढी (is more than) सञ्चित बारम्बारता वक्र खिच्नुहोस् । कुनै निश्चित बिन्दुमा उक्त वक्रहरूको निरन्तरता (continuity) र विच्छिन्नता (discontinuity) को प्रतिवेदन तयार पारी उक्त प्रतिवेदनलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

2.3 निरन्तरताको साङ्केतिक प्रस्तुति (Notational Representation of Continuity)

एउटा फलन $f:R\rightarrow R$ लाई $f(x) = 2x - 1$ द्वारा परिभाषित गरिएको छ । यसमा $x = 2$, $x = 3$ र $x = 10$ हुँदा f(2), f(3) र f(10) को मान कति कति हुन्छ, भन्नुहोस् ।

यहाँ, f(2), f(3) र f(10) लाई क्रमशः बिन्दु 2, 3 र 10 मा f(x) फलनको मान (value of the function) भनिन्छ । फलनको मानलाई सधैँ लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ अथवा फलनको मान सङ्ख्या रेखामा अङ्कित गर्न सकिन्छ ।

यदि $f(x) = \frac{1}{x}$ भए f(0) को मान सङ्ख्या रेखा अथवा लेखाचित्रमा निश्चित बिन्दुका रूपमा देखाउन सकिँदैन । त्यसैले, $x= 0$ मा $f(x) = \frac{1}{x}$ को फलनको मान परिभाषित हुँदैन ।

मानौँ $f(x) = x+3$ एउटा फलन छ । जसको क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो ।

x = 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999... आदिमा f(x) को मान कति हुन्छ ? त्यस्तै $x = 2$ मा $f(x)$ को मान कति हुन्छ ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् । प्राप्त नतिजाका आधारमा तल दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

के x = 1.99 र x = 1.999 मा f(x) को मान एउटै हुन्छ अथवा फरक हुन्छ ?

के x = 1.9 र x = 1.9999 मा फलनको मानहरूबिचको फरक धेरै कम हुन्छ ?

के x = 2 र x = 1.9999 मा फलनको मानहरूको फरक धेरै कम हुन्छ ?

के f(1.9999) लाई शून्यान्त गर्दा f(2) को मानसँग बराबर हुन्छ ?

माथिका उदाहरणमा x को मान जति जति 2 को नजिक हुँदै जान्छ त्यति नै f(x) को मान f(2) को नजिक हुन्छ ।

x=1.9, 1.99, 1.999, 1.9999... आदि लाई $x\rightarrow 2-0$ अथवा $x\rightarrow 2^-$ द्वारा जनाइन्छ । जसलाई x को बायाँबाट बिन्दु 2 मा परिभाषित अथवा बायाँ पक्षबाट परिभाषित सीमान्त मान (left hand limit) भनिन्छ । अथवा, $\lim_{x\rightarrow 2^-} f(x) = 5$ हुन्छ ।

> जब x बायाँबाट बिन्दु a को नजिक पुग्छ यसलाई $x\rightarrow a^-$ अथवा $x\rightarrow a - 0$ लेख्ने गरिन्छ । यस्तो अवस्थामा फलन f(x) का लागि बायाँबाट बिन्दु a मा सीमान्त मानलाई $\lim_{x\rightarrow a^-} f(x)$ अथवा $x \lim_{x\rightarrow a-0} f(x)$ द्वारा जनाइन्छ ।

फेरि $f(x) = x+3$ का लागि x = 2,1, 2.01, 2.0001...... मा फलनको मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

के f(2.001) लाई शून्यान्त गर्दा f(2) सँग बराबर हुन्छ ?

x = 2.1, 2.01, 2.0001...... लाई $x\rightarrow 2^+$ अथवा $x\rightarrow 2+0$ द्वारा जनाइन्छ, जसको अर्थ x दायाँबाट बिन्दु 2 को नजिक पुग्छ भन्ने हुन्छ ।

त्यस्तै $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ लाई दायाँबाट बिन्दु 2 मा f(x) को सीमान्त मान (right hand limit) भनिन्छ ।

जब x दायाँबाट बिन्दु a को नजिक पुग्छ, यसलाई $\lim_{x\to a^+}$ अथवा x→a+0 लेख्ने गरिन्छ । यस्तो अवस्थामा फलन f(x) का लागि $\lim_{x\to a^+} f(x)$ लाई बिन्दु a मा दायाँबाट f(x) को सीमान्त मान भनिन्छ ।
जब कुनै बिन्दु x = a मा f(x) का लागि बायाँबाट परिभाषित सीमान्त मान र दायाँबाट परिभाषित सीमान्त मान बराबर हुन्छन्, त्यस्तो अवस्थामा बिन्दु a मा f(x) को सीमान्त मान परिभाषित भएको मानिन्छ । यसलाई, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$ लेखिन्छ ।

माथि, f(x) = x + 3 का लागि $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$ हुन्छ । 5 लाई बिन्दु 2 मा f(x) को सीमान्त मान भनिन्छ ।

यदि कुनै बिन्दुमा परिभाषित फलनको मान र सीमान्त मान एक आपसमा बराबर हुन्छन् भने उक्त बिन्दुमा फलन निरन्तर (continuous) छ भनी लेख्न सकिन्छ *अथवा* यदि फलन f(x) को बिन्दु x = a मा परिभाषित फलनको मान f(a) र सीमान्त मान $\lim_{x\to a} f(x)$ एक आपसमा बराबर भए बिन्दु a मा फलन f(x) को निरन्तरता छ भनिन्छ ।

अभ्यास 2.3

1. (a) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ लाई वाक्यमा लेख्नुहोस् ।

   (b) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ लाई वाक्यमा लेख्नुहोस् ।

   (c) $\lim_{x\to a} f(x)$ लाई वाक्यमा लेख्नुहोस् ।

   (d) बिन्दु x =.a मा फलन f(x) को निरन्तरता हुने अवस्थालाई सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

2. f(x) = x+1 एउटा वास्तविक मान भएको (real valued) फलन छ ।

   (a) x=1.9, 1.99, 1.999 र 1.9999 मा f(x) को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) x=2.1, 2.01, 2.001, र 2.0001 मा f(x) को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) f(2) कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ र $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ को मान कति कति हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (e) के बिन्दु x = 2 मा f(x) निरन्तर हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. $f(x) = x + 2$ j $1 \leq x \leq 2$

$4x - 2$ j $x \geq 2$ परिभाषित छ ।

(a) $x = 1.99$ हुँदा $f(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) $x = 2.01$ हुँदा $f(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ र $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ को मान कति कति हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) के $x = 2$ मा फलन $f(x)$ निरन्तर हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. हाम्रो दैनिक जीवनमा निरन्तरता (continuity) भन्ने शब्द कहाँ कहाँ प्रयोग भएको छ ? पाठ्यपुस्तकको अध्ययन गरी अथवा इन्टरनेटबाट खोजी गरी अथवा आफूभन्दा माथिल्लो कक्षामा गणित विषय लिएर पढ्ने साथीहरूसँग सोधी पत्ता लगाउनुहोस् । प्राप्त नतिजालाई प्रतिवेदनका रूपमा कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

एकाइ 3

मेट्रिक्स (Matrix)

3.0 पुनरावलोकन (Review)

तल दिइएका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

(क) माथिका मेट्रिक्सहरूका क्रम कति कति छन् ?

(ख) कुन कुन मेट्रिक्सहरू जोड्न सकिन्छ ?

(ग) के मेट्रिक्सहरू A र B गुणनका लागि परिभाषित छन् ? परिभाषित हुने अवस्था के हो ? परिभाषित भए AB को गुणन कति हुन्छ ?

(घ) $3A - 2D$ को मान कति हुन्छ ?

पुनः यदि मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ भए,

(क) मेट्रिक्स A^T कति हुन्छ ?

(ख) मेट्रिक्सहरू A र $(A^T)^T$ को कस्तो सम्बन्ध हुन्छ ?

(ग) A^2 को मान कति हुन्छ ?

(घ) के मेट्रिक्स $A^T.A=I$ हुन्छ ? समूहमा माथिका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

3.1 मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्ट (Determinant of a Matrix)

दिइएका सङ्ख्याहरूको ढाँचा अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

$|5|$, $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

(क) दिइएको सङ्ख्याको स्वरूप कस्तो छ ?

(ख) सङ्ख्याहरूको ढाँचालाई बन्द गर्ने ठाडो रेखालाई के भनिन्छ ?

(ग) उक्त सङ्ख्या ढाँचाहरूमा भएका साझा विशेषताहरू के के हुन् ?

माथिका सङ्ख्याहरूको ढाँचाहरूमध्ये पहिलोमा एउटा मात्र सङ्ख्या छ । यसमा एउटा पङ्क्ति र एउटा लहर छ । यो एउटा 1×1 क्रम भएको वर्गाकार सङ्ख्या हो । दास्रो सङ्ख्याको ढाँचामा दुई पङ्क्ति र दुई लहर छन् । यो 2×2 क्रम भएको वर्गाकार सङ्ख्या हो । प्रत्येक सङ्ख्या ढाँचालाई घेरिएका दुई ठाडा रेखाहरू डिटरमिनेन्टको सङ्केत हो । $|8|$ र $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ का क्रम कति कति छ, छुट्याउनुहोस् ।

लहर र पङ्क्तिका रूपमा वर्गाकारमा मिलाएर राखिएका सङ्ख्याहरूको प्रस्तुतीकरण जसलाई दुई ओटा ठाडा रेखाहरूले घेरिएको हुन्छ, त्यसलाई डिटरमिनेन्ट भनिन्छ । वर्गाकार मेट्रिक्सको मात्र डिटरमिनेन्ट निकाल्न सकिन्छ । वर्ग मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्ट स्केलर परिमाण हो । यदि A= $[aij]$ एउटा वर्गाकार मेट्रिक्स भए, मेट्रिक्स A को डिटरमिनेन्टलाई D वा Det. A वा $|A|$ ले जनाइन्छ ।

3.1.1 एक क्रम मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्ट (Determinant of order one matrix)

यदि कुनै वर्गाकार मेट्रिक्सको एउटा पङ्क्ति र एउटा लहर छ भने त्यस्तो मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्टलाई एक क्रमको मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्ट भनिन्छ । 1×1 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्ट मान त्यो आफैँसँग बराबर हुन्छ । मानौँ, $A = [a]$, एउटा 1×1 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्स भए, $|A| = |a| = a$ हुन्छ । $B = [-7]$, एउटा 1×1 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्स भए, डिटरमिनेन्ट $-7 = |-7| = -7$ हुन्छ ।

तर -7 को निरपेक्ष मान (absolute value) = $|-7| = 7$ हुन्छ ।

3.1.2 दुई क्रमको मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्ट (Determinant of order two matrix)

लालबाबु चौधरीको आम्दानी र खर्चका केही शीर्षकहरूका विवरणलाई तल डिटरमिनेन्ट चिह्नभित्र राखिएको छ ।

तलब	कर
घरभाडा	ब्याज

(क) माथि विवरणमा आम्दानी र खर्चका शीर्षकहरू के के छन् ?

(ख) आम्दानी र खर्चका शीर्षक कुन कुन स्थानमा रहेका छन ?

(ग) उक्त विवरणबाट बचत (balance) कसरी निकाल्न सकिन्छ ?

माथिका विवरणमा छलफल गरी उपयुक्त निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

2×2 को वर्गाकार ढाँचाको मुख्य विकर्ण (principal diagonal) मा आम्दानीका शीर्षकहरू र सहायक विकर्ण (secondary diagonal) मा खर्चका शीर्षकहरू रहेका छन् ।

आम्दानी = तलब, बैङ्क ब्याज,   खर्च = घरभाडा, कर

बचत = आम्दानी - खर्च

मुख्य विकर्णमा भएका आम्दानीका शीर्षकहरूबाट सहायक विकर्णमा भएका खर्चका विवरण घटाएर बचत निकालिन्छ ।

अब, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$ को मान कसरी निकालिन्छ ? कति हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

यदि कुनै वर्गाकार मेट्रिक्सको दुई पङ्क्ति र दुई लहर छन् भने त्यस्तो मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्टलाई दुई क्रमको मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्ट भनिन्छ । डिटरमिनेन्टको

सदस्यहरूमध्ये मुख्य विकर्ण (principle diagonal) र सहायक विकर्ण (secondary diagonal) का सदस्यरू गुणन गरेर तिनीहरूको गुणनफललाई घटाउँदा प्राप्त हुने मान नै दुई क्रमको मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्टको मान हो ।

मानौं, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, एउटा 2×2 को वर्गाकार मेट्रिक्स भए, मेट्रिक्स A को डिटरमिनेन्टलाई Det. A , D वा $|A|$ ले जनाइन्छ ।

मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ को डिटरमिनेन्ट, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ लेखिन्छ ।

तसर्थ, $|A| = \begin{vmatrix} a & b(-) \\ c & d(+) \end{vmatrix} = ad - bc$ हुन्छ । यहाँ, a, b, c, d लाई डिटरमिनेन्ट A का सदस्यहरू (elements) र ad - bc लाई |A| को विस्तार भनिन्छ ।

उदाहरणहरू

1. यदि $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ भए, मेट्रिक्स M को डिटरमिनेन्ट पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$, $|M| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 4\times(-7) - 3\times2 = -28 - 6 = -34$

3.1.3 एकल मेट्रिक्स र स्वामित्वहीन एकल मेट्रिक्स (Singular and Non Singular Matrix)

कुनै वर्गाकार मेट्रिक्स जसको डिटरमिनेन्ट मान शून्य हुन्छ भने त्यसलाई एकल मेट्रिक्स (singular matrix) भनिन्छ । यदि वर्गाकार मेट्रिक्स A छ र $|A| = 0$ भएमा A एकल मेट्रिक्स हो ।

मानौं, $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ भए $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \times 1 - 4 \times 2 = 8 - 8 = 0$

तसर्थ, A एउटा एकल मेट्रिक्स हो ।

एउटा वर्गाकार मेट्रिक्स जसको डिटरमिनेन्ट मान शून्य हुँदैन त्यसलाई स्वामित्वहीन एकल मेट्रिक्स (non singular matrix) भनिन्छ । यसलाई नियमित मेट्रिक्स पनि भनिन्छ । यदि वर्गाकार मेट्रिक्स A छ र $|A| \neq 0$ भएमा A स्वामित्वहीन एकल मेट्रिक्स हो ।

मानौं, $B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ भए, $|B| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 8 \times 5 - 4 \times 2 = 40 - 8 = 32 \neq 0$

तसर्थ, B एउटा स्वामित्वहीन एकल मेट्रिक्स हो ।

2. यदि $\begin{vmatrix} 2x & 3x \\ 4x & 4 \end{vmatrix} = 0$ भए, x को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\begin{vmatrix} 2x & 3x \\ 4x & 4 \end{vmatrix} = 0$

अथवा, $2x \times 4 - 4x \times 3x = 0$

अथवा, $8x - 12x^2 = 0$

अथवा, $4x(2 - 3x) = 0$

$\therefore$ $x = 0$ वा $\frac{2}{3}$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ भए, परीक्षण गर्नुहोस् : $|AB| = |A||B|$

समाधान

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 + 6 = -14$

$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $|B| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 6 = 26$

अब, $|A||B| = -14 \times 26 = -364$

$AB = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20+9 & 10-15 \\ 8+12 & 4-20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -5 \\ 20 & -16 \end{bmatrix}$

$|AB| = \begin{vmatrix} 29 & -5 \\ 20 & -16 \end{vmatrix} = 29 \times (-16) - 20 \times (-5) = -364$

तसर्थ, $|AB| = |A||B|$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 3.1

1. दिइएका डिटरमिनेन्टको मान निकाल्नुहोस् :

(a) $|-8|$ (b) $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$

2. दिइएका मेट्रिक्सको डिटरमिनेन्टको मान निकाल्नुहोस् :

(a) $[6]$ (b) $[-12]$ (c) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 8 & 22 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

3. निम्न अवस्थामा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $\begin{vmatrix} -3 & x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 9$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2x & -3 \end{vmatrix} = 1$

(b) $\begin{vmatrix} 3x & 4 \\ 9x & 2x \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 5 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

4. यदि $P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ भए, निम्न मेट्रिक्सहरूको डिटरमिनेन्ट निकाल्नुहोस् :

(a) $2P + 3Q$ (b) $4P - 2Q$ (c) $3PQ$

5. (a) यदि $A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ भए, परीक्षण गर्नुहोस् : $|AB| = |A||B|$

(b) यदि $P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ भए, परीक्षण गर्नुहोस् : $|PQ| = |P||Q|$

6. यदि $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ भए, MN र NM को डिटरमिनेन्ट पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (a) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ भए, $2A^2 - 5A + 2I$ को डिटरमिनेन्ट पत्ता लगाउनुहोस् । जहाँ I एउटा 2×2 को एकाइ मेट्रिक्स हो ।

(b) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ भए, $5A - 2B + 3I$ को डिटरमिनेन्ट पत्ता लगाउनुहोस्, जहाँ I एउटा 2×2 को एकाइ मेट्रिक्स हो ।

3.2 विपरीत मेट्रिक्स (Inverse Matrix)

तलका अङ्क गणितीय संरचनाहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$3 \times \frac{1}{3} = 1, \qquad m \times \frac{1}{m} = 1$

(क) माथिका सङ्ख्याहरूको गुणनफल 1 लाई के भनिन्छ ?

(ख) 3 र $\frac{1}{3}$ बिच कस्तो सम्बन्ध छ ? के m र $\frac{1}{m}$ बिच पनि सोही सम्बन्ध छ ?

(ग) मेट्रिक्सको एकात्मक र व्युत्क्रम वा विपरीत गुण भनेको के हो ?

माथिका दुवै सङ्ख्याको गुणनफल 1 आएको छ, 1 गुणनको एकात्मक अङ्ग (Identity element) हो । 3 को विपरीत सङ्ख्या 3^{-1} वा $\frac{1}{3}$ हो । त्यस्तै गरी m र $\frac{1}{m}$ पनि आपसमा विपरीत सङ्ख्या हुन् । यदि दुई ओटा सङ्ख्या गुणन गर्दा एकात्मक अङ्ग (1) आउँछ भने ती दुई सङ्ख्याहरू एक अर्काका विपरीत (Inverse) हुन्छन् । त्यसरी नै प्रत्येक वर्ग मेट्रिक्स A ($|A| \neq 0$) का लागि विपरीत A^{-1} पत्ता लगाउन सकिन्छ

अब, (a+b) को विपरीत के हुन्छ ? $\frac{1}{5}$ विपरीत के हुन्छ ? x लाई केले गुणन गर्दा एकात्मक अङ्क आउँछ ? छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

मानौँ, $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ दुई ओटा 2×2 का वर्गाकार मेट्रिक्सहरू हुन् ।

अब, AB र BA गुणन गनुहोस् ।

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9+10 & 15-15 \\ -6+6 & 10-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9+10 & -15+15 \\ 6-6 & 10-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\therefore$ $AB = BA = I_2$, जहाँ, I_2 एउटा 2×2 को एकाइ मेट्रिक्स हो ।

यहाँ, A को विपरीत मेट्रिक्स B हो भने B को विपरीत मेट्रिक्स A हो ।

> यदि कुनै एउटा वर्ग मेट्रिक्स A ($A \neq 0$) का लागि सोही क्रमको अर्को वर्ग मेट्रिक्स B अस्थित्वमा छ र AB = BA = I छ (जहाँ, I एउटा 2×2 को एकाइ मेट्रिक्स हो) भने A र B एक आपसमा विपरीत मेट्रिक्सहरू हुन् । यहाँ, A को विपरीत मेट्रिक्स B हो । यसलाई A^{-1} लेखिन्छ । अर्थात, $B = A^{-1}$ र $A = B^{-1}$ हुन्छन् ।

कुनै पनि वर्ग मेट्रिक्स स्वामित्वहीन एकल मेट्रिक्स (Nonsingular matrix) भएमा मात्र विपरीत मेट्रिक्स परिभाषित हुन्छ ।

दिइएको 2 × 2 मेट्रिक्सको विपरीत मेट्रिक्स पत्ता लगाउने प्रक्रिया

मानौँ, A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ भए, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc ≠ 0 (किन ?)

मानौँ, $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$,

विपरीत मेट्रिक्सको परिभाषाअनुसार,

$A . A^{-1} = I$

अथवा, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

बराबर मेट्रिक्सको नियम अनुसार,

ap + br = 1……………. (i) aq + bs = 0……………. (iii)

cp + dr = 0……………. (ii) cq + ds = 1……………. (iv)

समीकरण (i) र (ii) हल गर्दा, p = $\frac{d}{ad-bc}$ र r = $\frac{-c}{ad-bc}$

समीकरण (iii) र (iv) हल गर्दा, q = $\frac{-b}{ad-bc}$ र s = $\frac{a}{ad-bc}$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

तसर्थ, दिइएको मेट्रिक्सको विपरीत मेट्रिक्स निकाल्दा मुख्य विकर्णका सदस्यहरूको स्थान साट्ने र अर्को विकर्णका सदस्यहरूको चिह्न परिवर्तन गरी डिटरमिनेन्टले भाग गर्नुपर्दछ ।

यदि A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ भए, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ जहाँ, ad – bc = |A| ≠ 0

3.2.1 विपरीत मेट्रिक्सका गुणहरू (Properties of Inverse Matrix)

मेट्रिक्सको गुणनका गुणहरू के के हुन् ? छलफल गर्नुहोस् । विपरीत मेट्रिक्सका निम्न गुणहरू परीक्षण गर्नुहोस् ।

(क) $A . A^{-1} = A^{-1}. A = I$ (ख) $(AB)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$

(ग) $(A^{-1})^{-1} = A$ (घ) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

कुनै पनि 2 × 2 मेट्रिक्स A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स निकाल्दा अपनाउने चरणहरू

(क) $|A|$, i.e. ad – bc पत्ता लगाउने

(ख) मेट्रिक्सको मुख्य विकर्ण (principal/leading diagonal) मा भएका सदस्यहरूको स्थान साटासाट गर्ने । i.e. $\begin{bmatrix} d & \dots \\ \dots & a \end{bmatrix}$, जसलाई disjoint मेट्रिक्स भनिन्छ ।

(ग) अर्को विकर्ण (secondary diagonal) का सदस्यहरूको चिह्न परिवर्तन गर्ने i.e. $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(घ) अब, सूत्र $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ प्रयोग गर्ने

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ भए, A^{-1} पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2$

$|A| = 2 \neq 0$ ∴ A^{-1} परिभाषित हुन्छ ।

अब, सूत्रानुसार, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 & 3/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

तसर्थ, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 7/2 & 3/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

5. यदि मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 9 & n \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ भए m र n को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मानौँ, $A = \begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & n \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

यदि A को विपरीत मेट्रिक्स B भए, AB = I हुन्छ ।

अथवा, $\begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & n \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} 18m - 35 & 2mn + 28 \\ 45 - 45 & 5n + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

बराबर मेट्रिक्सको नियमअनुसार,

$18m - 35 = 1$……(i) $2mn + 28 = 0$……… (ii) $5n + 36 = 1$………. (iii)

समीकरण (i) बाट

अथवा, $18m - 35 = 1$

अथवा, $18m = 1 + 35$

अथवा, $m = \frac{36}{18} = 2$

समीकरण (iii) बाट

अथवा, $5n + 36 = 1$

अथवा, $5n = 1 - 36$

अथवा, $n = \frac{-35}{5} = -7$

तसर्थ, $m = 2$ र $n = -7$ हुन्छ ।

अभ्यास 3.2

1. दिइएका मेट्रिक्सहरू गुणन गर्नुहोस् र तिनीहरू एक आपसमा विपरीत मेट्रिक्स छन् भनी देखाउनुहोस् ।

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

2. तल दिइएका मेट्रिक्सहरूको विपरीत मेट्रिक्स निकाल्नुहोस् :

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. (क) यदि मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} p & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & q \end{bmatrix}$ भए p र q को मानहरू निकाल्नुहोस् ।

   (ख) यदि मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} x & 2x - 9 \\ -y & 3 \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ y & x \end{bmatrix}$ भए x र y को मानहरू निकाल्नुहोस् ।

   (ग) यदि मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 9 & n \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ भए m र n को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ भए,

   (a) A^{-1} र B^{-1} निकाल्नुहोस् ।   (b) $(AB)^{-1}$ निकाल्नुहोस् ।

   (c) $(AB)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$ परीक्षण गर्नुहोस् ।

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ भए, परीक्षण गर्नुहोस्:

   (a) $A . A^{-1} = A^{-1}. A = I$ (b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3.3 दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणको मेट्रिक्स विधिबाट हल (Solving Simultaneous Equation of two Variables by Marix method)

दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणहरूलाई विभिन्न विधिहरूबाट हल गर्न सकिन्छ । प्रतिस्थापन विधि, हटाउने विधि, लेखाचित्र विधि, क्रस गुणा विधि जस्ता समीकरण हल गर्ने विधिहरूका बारेमा अगिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौँ । यस पाठमा मेट्रिक्सबाट समीकरणहरूको हल गर्ने विधि सम्बन्धी अध्ययन गर्ने छौँ ।

यहाँ, मानौँ, दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणहरू लिऔँ :

$a_1x + b_1y = c_1$........(i)

$a_2x + b_2y = c_2$........(ii) (जहाँ, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 र c_2, अचर राशिहरू हुन्)

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्सको रूपमा लेख्दा,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

अथवा, $AX = B$ (मानौँ) जहाँ, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

यदि $|A| \neq 0$ भए,

अथवा, $(A^{-1}.A)X = A^{-1}B$ ($\because$ दुवैतिर ले A^{-1} गुणन गर्दा)

अथवा, $IX = A^{-1}B$ ($\because A^{-1}.A = I$)

$\therefore X = A^{-1}B$ ($\because IX = X$)

अब, X र $A^{-1}B$ मेट्रिक्सहरूका सम्बन्धित सदस्यहरूलाई बराबर गरी दिइएका चलहरू x र y का मानहरू निकाल्न सकिन्छ ।

दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणको मेट्रिक्स विधिबाट हल गर्दा निम्न प्रक्रियाहरू अपनाइन्छ :

1. दिइएका समीकरणहरूलाई $ax + by = c$ को स्वरूपमा मिलाएर राख्ने, (जहाँ a, b र c अचल राशि हुन्) यदि कुनै समीकरणमा कुनै चल राशि नभएमा त्यसको गुणाङ्क 0 राख्ने
2. दुवै समीकरणका x र y को गुणाङ्कहरूको मेट्रिक्सलाई A ले, चलहरूको मेट्रिक्सलाई X ले र अचल राशिहरूको (जुन समीकरणको दायाँ भएका) मेट्रिक्सलाई B ले जनाउने र मेट्रिक्सलाई $AX = B$ को स्वरूपमा लेख्ने
3. यदि $|A| \neq 0$ भएमा A को विपरीत मेट्रिक्स निकाल्ने
4. A को विपरीत मेट्रिक्स (A^{-1}) र मेट्रिक्स B गुणन गर्ने
5. X र $A^{-1}B$ मेट्रिक्सहरूका सम्बन्धित सदस्यहरूलाई बराबर गरी चलहरू x र y का मानहरू निकाल्ने ।

यदि $|A| = 0$ भए दिइएका समीकरणहरूको एकल समाधान सम्भव हुँदैन । यस्तो अवस्था सिधा रेखाहरू समानान्तर भएर वा खप्टिएर रहेका हुन्छन् । यदि $|A| \neq 0$ भए समीकरणको एकल समाधान (unique solution) हुन्छ । त्यसैले $|A| \neq 0$ भएको अवस्थामा मात्र दिइएका समीकरणहरूको हल गर्न सकिन्छ ।

6. दिइएका समीकरणहरूलाई मेट्रिक्स विधिबाट हल गर्नुहोस् :

$x - 2y = -7, \quad 3x + 7y = 5$

समाधान

यहाँ, $x - 2y = -7$........(i)

$3x + 7y = 5$........(ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्सको रूपमा लेख्दा,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

अथवा, $AX = B$ जहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$

अथवा, $X = A^{-1} B$ .... (iii)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 6 = 13 \neq 0$$

माथिका समीकरणहरूको एकल समाधान हुन्छ ।

अब, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

अतः समीकरण (iii) बाट,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

अथवा, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -49 + 10 \\ 21 + 5 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -39 \\ 26 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore x = -3, y = 2$

7. दिइएका समीकरणहरूलाई मेट्रिक्स विधिबाट हल गर्नुहोस् :

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8$, $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$

समाधान

यहाँ, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8$, ……..(i)

$\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$ ……..(ii)

मानौँ, $\frac{1}{x} = a, \ \frac{1}{y} = b$

अब, समीकरण (i) बाट $a + \frac{1}{2}b = 8$, $2a + b = 16$ ……..(iii)

समीकरण (ii) बाट $\frac{1}{2}a - b = -1$, $a - 2b = -2$ ……..(iv)

समीकरण (iii) र (iv) लाई मेट्रिक्सको रूपमा लेख्दा,

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -2 \end{bmatrix}$

अथवा, AX = B जहाँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 16 \\ -2 \end{bmatrix}$

अथवा, $X = A^{-1} B$ ………… (v)

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5 \neq 0$

माथिका समीकरणहरूको एकल समाधान हुन्छ ।

अब, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

अतः समीकरण (iii) बाट,

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -2 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -32 + 2 \\ -16 - 4 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -30 \\ -20 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\therefore a = 6$, $b = 4$

$a = \frac{1}{x} = 6, \quad b = \frac{1}{y} = 4$

$\therefore x = \frac{1}{6}, \ y = \frac{1}{4}$

अभ्यास 3.3

1. निम्न लिखित अवस्थामा विपरीत मेट्रिक्सको प्रयोग गरी मेट्रिक्स X = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 13 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

2. दिइएका जोडा समीकरणहरूको मेट्रिक्स विधिबाट हल गर्नुहोस् :

(a) $x - 3y = 5,\quad 2x - 5y = 9$ (b) $x - 2y = 4,\quad 3x - 5y - 7 = 0$

(c) $x + y = 6,\quad 2x - y = 3$ (d) $2x - 3y = 1,\quad 4y + 3x = 10$

(e) $4x - 3y = 11,\quad 3x = 5 - y$

(f) $2x + 5 = 4(y+1) - 1,\ 3x + 4 = 5(y+1) - 3$

3. दिइएका जोडा समीकरणहरूको मेट्रिक्स विधिबाट हल गर्नुहोस् :

(a) $\frac{x}{3} - \frac{4y}{3} = -2,\quad \frac{3x}{4} - 4y = 2$ (b) $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 13,\quad \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 9$

(c) $\frac{2x+4}{5} = y = \frac{40-3x}{4}$ (d) $\frac{5}{y} = \frac{1}{x} - 1,\quad \frac{5}{y} = \frac{2}{x} - 4$

4. (क) जोडा समीकरणहरू $x + 3y = 5$ र $2x - 3y = 1$ लाई

(अ) मेट्रिक्सका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(आ) के यी समीकरणहरूको एकल समाधान हुन्छ ?

(इ) उक्त समीकरणहरू हल गर्नुहोस् ।

(ख) जोडा समीकरणहरू $2x + 5y = 2$ र $3x - 5y = 3$ लाई

(अ) मेट्रिक्सको रूपमा लेख्नुहोस् ।

(आ) के यी समीकरणहरूको एकल समाधान हुन्छ ?

(इ) उक्त समीकरणहरू हल गर्नुहोस् ।

3.4 क्रामरको नियम (Cramer's Rule)

डिटरमिनेन्ट विधिबाट युगपत रेखीय समीकरणको हल गर्ने विधिलाई क्रामरको नियम (Cramer's Rule) भनिन्छ । क्रामरको नियम प्रयोग गरी दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणको निम्न लिखित तरिकाद्वारा हल गर्न सकिन्छ :

मानौँ, दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणहरू

$a_1x + b_1y = c_1$ ……….. (1)

$a_2x + b_2y = c_2$ ……….. (2), जहाँ, a_1, a_2, b_1, b_2 अचल सङ्ख्याहरू हुन् ।

समीकरण (1) लाई b_2 ले र समीकरण (2) लाई b_1 ले गुणन गरी हल गर्दा,

$a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1$ ……….. (3)

$-\ a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2$ ……….. (4)

$(a_1 b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$

अथवा, $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1 b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{D1}{D}$ (मानौँ)

त्यसैगरी, समीकरण (1) लाई a_2 ले र समीकरण (2) लाई a_1 ले गुणन गरी हल गर्दा,

$a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1$ ……….. (5)

$a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2$ ……….. (6)

$(a_2b_1 - a_1b_2)\ y = a_2c_1 - a_1c_2$

अथवा, $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2 b_1 - a_1b_2} = \frac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{D2}{D}$ (मानौँ)

तसर्थ, क्रामर नियमअनुसार, $x = \frac{D1}{D}$ र $y = \frac{D2}{D}$ हुन्छ । $D \neq 0$ हुन्छ । यदि $D = 0$ भएमा x र y का मानहरू निकाल्न सकिँदैन, जहाँ,

D = दुवै समीकरणमा भएका x र y का गुणाङ्कहरूको डिटरमिनेन्ट

D_1 = D को पहिलो लहरमा भएका a_1 र a_2 को ठाउँमा अचरहरू c_1 र c_2 राखी निकालेका डिटरमिनेन्ट

D_2 = D को दोस्रो लहरमा भएका b_1 र b_2 का ठाउँमा अचरहरू c_1 र c_2 राखी निकालेका डिटरमिनेन्ट

दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणको क्रामर नियम (Cramer’s Rule) बाट हल गर्दा अपनाउने प्रक्रिया

1. दिइएका समीकरणहरूलाई $ax + by = c$ को स्वरूपमा मिलाएर राख्ने जहाँ a, b र c अचल राशि हुन् । यदि कुनै समीकरणमा कुनै चल राशि नभएमा त्यसको गुणाङ्क 0 राख्ने
2. दुवै समीकरणका x को गुणाङ्क, y को गुणाङ्क र अचल राशिलाई क्रमैसँग लेख्ने
3. दुवै समीकरणका x र y का गुणाङ्कहरूको डिटरमिनेन्टलाई D ले सङ्केत गरी मान निकाल्ने । त्यसैगरी, D को पहिलो लहरको a_1 र a_2 को ठाउँमा अचरहरू c_1 र c_2 राखी त्यसको डिटरमिनेन्ट D_1 र D को दोस्रो लहरको b_1 र b_2 को ठाउँमा अचरहरू c_1 र c_2 राखी डिटरमिनेन्ट D_2 निकाल्ने
4. यदि $D \neq 0$ भएमा, $x = \frac{D1}{D}$ र $y = \frac{D2}{D}$ सूत्र प्रयोग गर्ने

8. दिइएका समीकरणहरू क्रामर नियम (Cramer’s Rule) बाट हल गर्नुहोस् :

$3x + 5y = 21, 2x + 3y = 13$

समाधान

यहाँ, दिइएका समीकरणहरूका x र y को गुणाङ्कहरू र अचल राशिलाई राख्दा,

x को गुणाङ्क	y को गुणाङ्क	अचल राशि
3	5	21
2	3	13

अब, D, D_1 र D_2 को मान निकाल्दा,

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & 5 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 63 - 65 = -2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 42 = -3$$

अब, क्रामर नियमअनुसार,

$x = \frac{D1}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$ $\qquad$ $y = \frac{D2}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$

तसर्थ, $x = 2$ र $y = 3$ हुन्छ ।

अभ्यास 3.4

1. दिइएका समीकरणहरूको क्रामर नियम (Cramer's Rule) प्रयोग गरी हल गर्नुहोस् :

   (a) $4x - 3y = -1, \quad 3x + 4y = 18$ (b) $2x - 3y = 3, \quad 4x - y = 1$

   (c) $2x - 5y = 4, \quad 4x + y = 30$ (d) $3x + 2y + 9 = 0, 2x - 3y = -6$

   (e) $2(x-1) = y$ र $3(x-1)=-4y$

   (f) $8x + 11 = 3y - 20, \ 6y - 15 = -2x + 11$

2. दिइएका समीकरणहरूको क्रामर नियम (Cramer's Rule) प्रयोग गरी हल गर्नुहोस् :

   (a) $\frac{x}{7} - \frac{2y}{7} = -1, \quad \frac{3x}{5} + \frac{7y}{1} = 1$ (b) $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 58, \quad \frac{7}{x} + \frac{3}{y} = 67$

   (c) $\frac{x+1}{8} = \frac{y+3}{5} = \frac{x-y}{4}$ (d) $\frac{2}{3}x + y = 1, \quad \frac{1}{2}x + y = \frac{1}{2}$

3. आफ्नो दैनिक जीवनमा प्रयोग गरिने कुनै दुई ओटा समानहरूको मूल्यसँग सम्बन्धित युगपत रेखीय समीकरणहरू बनाउनुहोस् । ती समीकरणलाई क्रामर नियम प्रयोग गरी हल गर्नुहोस् ।

एकाइ 4

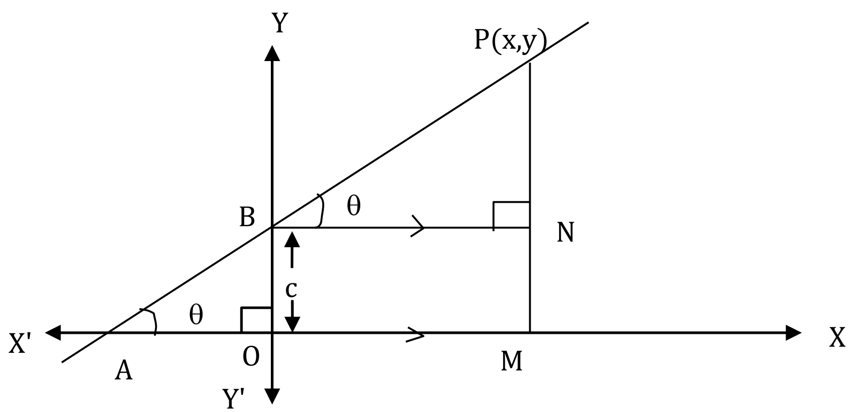
निर्देशाङ्क ज्यामिति
(Co-ordinate Geometry)

4.0 पुनरावलोकन (Review)

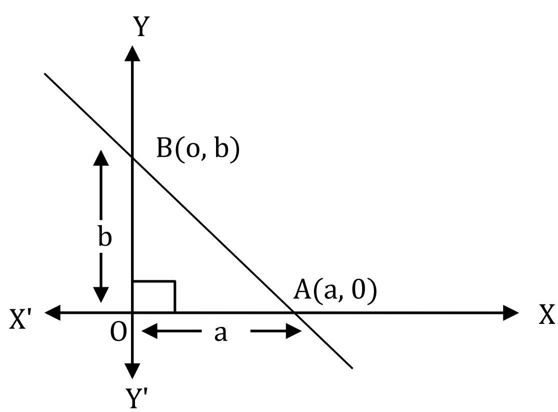
बिन्दुहरू $P(x_1, y_1)$ र $Q(x_2, y_2)$ छन् भने PQ को लम्बाइ, PQ को झुकाव र PQ को मध्यबिन्दु कति कति हुन्छन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

तलका प्रत्येक अवस्थामा सरल रेखा AB को समीकरणको स्वरूप कस्तो हुन्छ ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

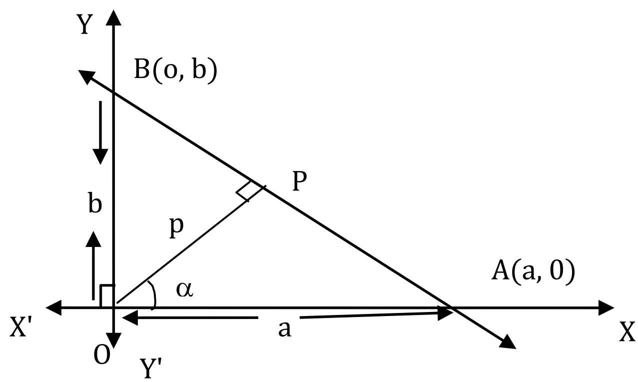
(i) झुकाव (m) = tanθ र y-खण्ड (OC) = c भएको



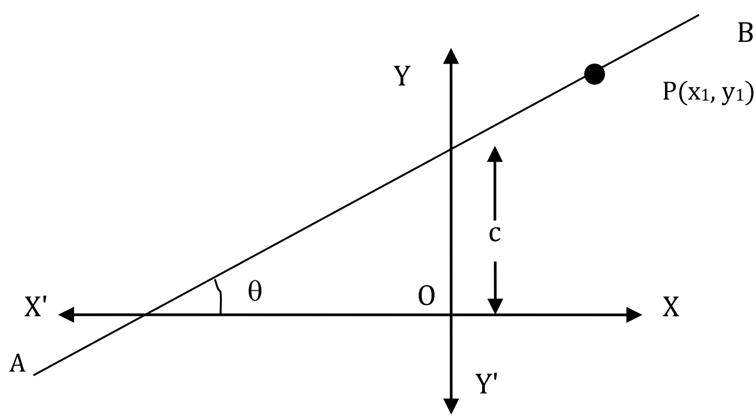
(ii) x-खण्ड (OA) = a र y-खण्ड (OB) = b भएको,



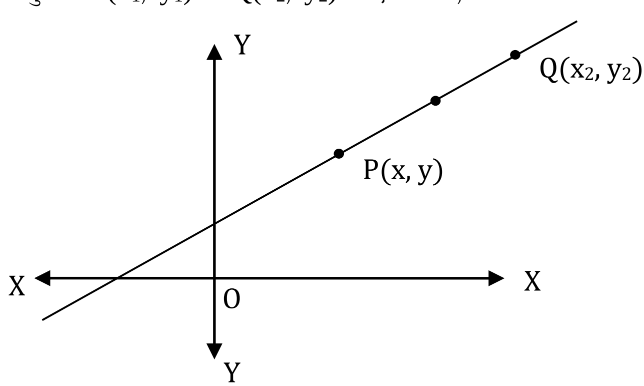
(iii) उद्गम बिन्दु O देखि AB सम्मको लम्ब दुरी OP = p र OP ले x- अक्षमा बनाएको कोण ∡POX = α भएको



(iv) झुकाव (m) = tanθ र बिन्दु $P(x_1,y_1)$ भएर जाने,



(v) बिन्दुहरू $P(x_1, y_1)$ र $Q(x_2, y_2)$ भएर जाने,



के तपाईंहरूले पत्ता लगाउनु भएका समीकरणहरू तलका स्वरूपहरूसँग मेल खान्छन् ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

i. $y = mx + c$

ii. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

iii. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

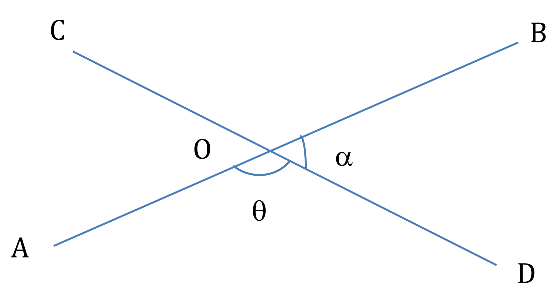
iv. $y - y_1 = m(x-x_1)$ र

v. $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_2}(x - x_1)$

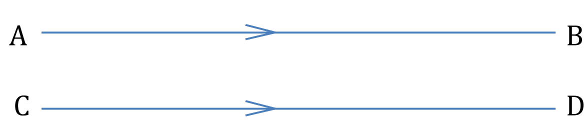
अब, सरल रेखाको साधारण समीकरण $ax + by + c = 0$ लाई तीन ओटा प्रमाणिक स्वरूपहरू $y = mx + c$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ र $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ मा बदल्दा कस्तो नतिजा प्राप्त हुन्छ ? समूहमा छलफल गरी नतिजा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4.1 दुई सरल रेखाहरूबिचको कोण (Angle between two straight lines)

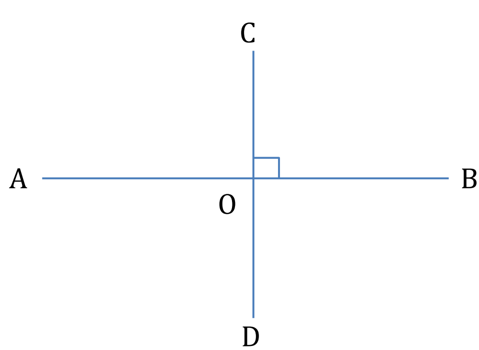
तलका चित्रहरूको अवलोकन गर्नुहोस् :



चित्र 4.1.1



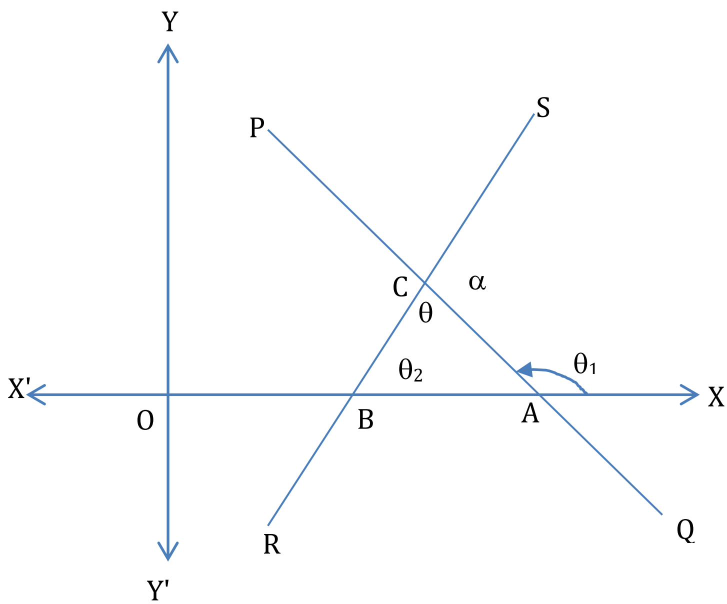
चित्र 4.1.2



चित्र 4.1.3

चित्र 4.1.1 मा सरल रेखाहरू AB र CD बिन्दु O मा काटिँदा बनेका कोणहरू ∡AOD=θ र ∡BOD = α बिच के सम्बन्ध छ, किन ? के $\alpha + \theta = 180°$ हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

त्यस्तै चित्र 4.1.2 मा AB//CD छ । यस अवस्थामा AB र CD बिचको कोणिक सम्बन्धका बारेमा छलफल गर्नुहोस् । त्यसैगरी चित्र 4.1.3 मा CD⊥AB छ । के ∡COB = ∡BOD = ∡AOD = ∡COA=90° छन्, किन ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



चित्र 4.1.4

माथिको चित्रमा झुकाव खण्ड रूपमा सरल रेखा PQ को समीकरण $y = m_1x + c_1$ र सरल रेखा RS को समीकरण $y = m_2x + c_2$ मानौं । चित्र 4.1.4 मा सरल रेखाहरू PQ र RS बिन्दु C मा काटिँदा ∡QCR = θ र ∡QCS = α बनेको छ । PQ ले x- अक्षसँग घनात्मक दिशामा बनाएको कोण ∡PAX = θ_1 र RS ले बनाएको कोण ∡SBX= θ_2 छ । तब $m_1= \tan\theta_1$ र $m_2 = \tan\theta_2$ हुन्छ ।

चित्र 4.1.4 मा ∡CAX=∡ACB+∡CBA [किन ?]

अथवा, $\theta_1 = \theta + \theta_2$

अथवा, $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$\therefore \tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2)$

अथवा, $\tan\theta = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1.\tan\theta_2}$

अथवा, $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$

त्यस्तै, $\alpha = 180° - \theta$

$\tan\alpha = \tan(180° - \theta)$

$= -\tan\theta$

$= -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$

अतः $\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$

अथवा, $\theta = \tan^{-1}\left(\pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right)$ हुन्छ ।

फेरि, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}}$

$= \pm\frac{1 + m_1.m_2}{m_1 - m_2}$ हुन्छ ।

सरल रेखाहरू PQ र RS आपसमा समानान्तर छन् भने ती रेखाहरूबिचको कोणलाई $\theta = 0°$ अथवा 180° लिन सकिन्छ र दुवै अवस्थामा $\tan\theta = 0$ हुन्छ ।

त्यसैले $\pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$

अथवा, $m_1 - m_2 = 0$

अथवा, $m_1 = m_2$

अतः आपसमा समानान्तर सरल रेखाका झुकावहरू बराबर हुन्छन् ।

त्यस्तै, सरल रेखाहरू PQ र RS आपसमा लम्ब छन् भने $\theta = 90°$ हुन्छ ।

$\cot\theta = \cot 90°$

अथवा, $\frac{1 + m_1.m_2}{m_1 - m_2} = 0$

अथवा, $1 + m_1.m_2 = 0$

अथवा, $m_1.m_2 = -1$

अतः लम्ब हुने सरल रेखाहरूबिचका झुकावहरू m_1 र m_2 छन् भने $m_1.m_2 = -1$ अर्थात् झुकावहरूको गुणनफल -1 हुन्छ ।

यदि दुई सरल रेखाहरूलाई साधारण रूप $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ र $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ छन् भने यी रेखाहरूको झुकाव m_1 र m_2 पत्ता लगाउनुहोस् । ती रेखाहरूबिचको कोण θ छ भने $\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$ मा m_1 र m_2 को मान प्रतिस्थापन गरी θ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरणहरू

1. (a) सरल रेखाहरू $3x - 2y - 5 = 0$ र $4x + y - 7 = 0$ बिचको न्यूनकोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) सरल रेखाहरू $x = 5y - 3$ र $3y = x - 4$ बिचको अधिककोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(a) यहाँ, $3x - 2y - 5 = 0$ लाई झुकाब खण्ड रूपमा बदल्दा,

$2y = 3x - 5$

अथवा, $y = \frac{3x}{2} - \frac{5}{2}$

$\therefore$ झुकाब $(m_1) = \frac{3}{2}$

त्यस्तै गरी, $4x + y = -7$ लाई झुकाब खण्ड रूपमा बदल्दा,

अथवा, $y = -4x - 7$

$\therefore$ झुकाब $(m_2) = -4$

अब, यदि θ दिइएका सरल रेखाहरूबिचको कोण हो भने,

$$\theta = \tan^{-1}\left[\pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\pm \frac{\frac{3}{2} - (-4)}{1 + \frac{3}{2}(-4)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\pm \frac{\frac{3+8}{2}}{\frac{2-12}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\pm \frac{11}{10}\right]$$

$= \tan^{-1}[1.1]$ (न्यूनकोणका लागि धनात्मक मान मात्र लिँदा)

$= 47.73°$

(b) यहाँ, $x = 5y - 3$

अथवा, $5y = x + 3$

अथवा, $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

$\therefore$ झुकाब $(m_1) = \frac{1}{5}$

फेरि $3y = x - 4$

अथवा, $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

$\therefore$ झुकाब $(m_2) = \frac{1}{3}$

अब, यी दुई सरल रेखाबिचको कोण

$\theta \quad = \tan^{-1}\left(\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\pm\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\pm\frac{\frac{3-5}{15}}{\frac{15+1}{15}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\pm\frac{-2}{16}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\pm\ -\frac{1}{8}\right)$

$= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{8}\right)$ (अधिक कोणका लागि ऋणात्मक मानमात्र लिँदा)

$= \tan^{-1}(-0.125)$

$=172.88°$

2. यदि सरल रेखाहरू $ax - y - 7 = 0$ र $3y + x - 9 = 0$ आपसमा लम्ब छन् भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $ax-y-7 = 0$

अथवा, $y = ax - 7$

$\therefore$ झुकाव $(m_1) = a$

र $3y + x - 9 = 0$

अथवा, $y = \frac{-1}{3}x + 3$

$\therefore$ झुकाव $(m_2) = \frac{-1}{3}$

अब, दिइएका सरल रेखाहरू आपसमा लम्ब भएकाले

$m_1.m_2 = -1$

अथवा, $a\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$

$\therefore a = 3$

3. बिन्दु (2, 3) भएर जाने र रेखा $5x - 4y + 3 = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $5x - 4y + 3 = 0$

अथवा, $4y = 5x + 3$

अथवा, $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$…………………………..(i)

$\therefore$ झुकाव $(m_1) = \frac{5}{4}$

फेरि, बिन्दु (2, 3) भएर जाने रेखा

$y - y_1 = m_2 (x - x_1)$

अथवा, $y - 3 = m_2(x - 2)$ …………………..(ii)

अब, समीकरण (i) र (ii) ले दिने रेखाहरू समानान्तर भएकाले,

$m_2 = m_1$

$\therefore m_2 = \frac{5}{4}$

फेरि, m_2 को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$y - 3 = \frac{5}{4}(x - 2)$

अथवा, $5x - 10 = 4y - 12$

अथवा, $5x - 4y + 2 = 0$

अतः आवश्यक रेखाको समीकरण $5x - 4y + 2 = 0$ हो ।

4. बिन्दु (7, 1) भएर जाने तथा $5x + 7y + 12 = 0$ सँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, रेखा $5x + 7y + 12 = 0$ (i) को झुकाव m_1 भए

$m_1 = \frac{-x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}}$

$= \frac{-5}{7}$

अब, बिन्दु (7,1) भएर जाने रेखाको समीकरण

$y - y_1 = m_2(x - x_1)$

अथवा, $y - 1 = m_2(x - 7)$…………………….(ii)

यदि समीकरण (i) र (ii) ले दिने रेखाहरू लम्ब छन् भने

$$m_1.m_2 = -1$$

अथवा, $\frac{-5}{7} \cdot m_2 = -1$

अथवा, $m_2 = \frac{7}{5}$

फेरि, m_2 को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$y-1= \frac{7}{5}(x-7)$

अथवा, $7x - 49 = 5y - 5$

अथवा, $7x - 5y - 44 = 0$

अतः आवश्यक रेखाको समीकरण $7x - 5y - 44 = 0$ हो ।

5. बिन्दु (2, 3) भएर जाने तथा $x - 3y - 2 = 0$ सँग 45° को कोण बनाउने रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, रेखा $x - 3y - 2 = 0$ (i) को झुकाव m_1 भए

$m_1 = \frac{-x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}}$

$= \frac{-1}{-3}$

$= \frac{1}{3}$

फेरि, (2, 3) भएर जाने सरल रेखाको समीकरण

$y - y_1 = m_2(x - x_1)$

अथवा, $y - 3= m_2(x - 2)$……………………….(ii)

अब, समीकरण (i) र (ii) ले दिने रेखाहरूबिचको कोण 45° भएकाले

$\tan 45° = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$

अथवा, $1 = \pm \frac{\frac{1}{3} - m_2}{1 + \frac{1}{3} \cdot m_2}$

अथवा, $1 = \pm \frac{\frac{1-3m_2}{3}}{\frac{3+m_2}{3}}$

अथवा, $1 = \pm \frac{1-3m_2}{3+m_2}$

धनात्मक चिह्न (+) लिँदा,

$$1 = \frac{1-3m_2}{3+m_2}$$

अथवा, $3 + m_2 = 1-3m_2$

अथवा, $4m_2 = -2$

अथवा, $m_2 = -\frac{1}{2}$

र ऋणात्मक चिह्न (-) लिँदा,

$$1 = -\frac{1-3m_2}{3+m_2}$$

अथवा, $3 + m_2 = -1 + 3m_2$

अथवा, $4 = 2m_2$

अथवा, $m_2 = 2$

अब, m_2का मानहरू क्रमशः समीकरण (ii) प्रतिस्थापन गर्दा,

$$y-3 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

अथवा, $2y-6 = -x + 2$

अथवा, $x + 2y - 8 = 0$

र $y - 3 = 2(x - 2)$

अथवा, $y - 3 = 2x - 4$

अथवा, $2x - y - 1 = 0$

अतः आवश्यक समीकरणहरू $x + 2y - 8 = 0$ र $2x - y - 1 = 0$ हुन् ।

6. बिन्दुहरू (2, 3) र (10, 15) जोड्ने रेखाखण्डको लम्बार्धकको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्

समाधान

यहाँ, (2,3) र (10,15) जोड्ने रेखाखण्डको मध्यबिन्दुको निर्देशाङ्क

$$= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2+10}{2}, \frac{3+15}{2}\right)$$

$$= (6, 9)$$

र (2,3) र (10,15) जोड्ने रेखाको झुकाव

$$m_1 = \frac{15-3}{10-2}$$

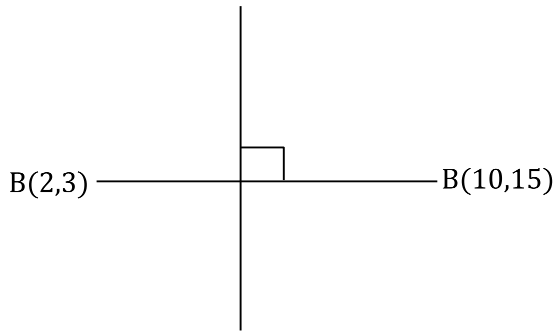
$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

यदि, लम्बार्धकको झुकाव m_2 छ भने

$m_1 . m_2 = -1$

अथवा, $\frac{3}{2} \cdot m_2 = -1$

अथवा, $m_2 = -\frac{2}{3}$



∴ लम्बार्धकको समीकरण

$y - y_1 = m_2(x - x_1)$

अथवा, $y - 9 = \frac{-2}{3}(x - 6)$

अथवा, $3y - 27 = -2x + 12$

अथवा, $2x + 3y - 39 = 0$

अतः लम्बार्धकको समीकरण $2x + 3y - 39 = 0$ हो ।

अभ्यास 4.1

1. (a) दुई सरल रेखाहरू $y = m_1x + c_1$ र $y = m_2x + c_2$ बिचको कोण कति हुन्छ ?
   (b) दुई सरल रेखाहरू आपसमा लम्ब हुने र समानान्तर हुने अवस्थाहरू लेख्नुहोस् ।
   (c) सरल रेखा $4x+3y+5= 0$ को झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (d) बिन्दुहरू (4,-5) र (-8, 9) जोड्ने रेखाको मध्यबिन्दु र झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (e) रेखा $y=3x+7$ सँग लम्ब हुने र समानान्तर हुने रेखाहरूको झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. तलका रेखाहरूबिचको न्यूनकोण पत्ता लगाउनुहोस् :
   (a) $y = \sqrt{3}x + 8$ र $y + 10 = 0$ (b) $x - y - 5 = 0$ र $x - 7y + 7 = 0$
   (c) $3x + 4y + 4 = 0$ र $5x + 12y + 4 = 0$ (d) $y - \sqrt{3}x - 4 = 0$ र $x - \sqrt{3}y - 5$
   (e) $\sqrt{3}x - y + 6 = 0$ र $y + 3 = 0$
3. तलका रेखाहरूबिचको अधिककोण पत्ता लगाउनुहोस् :
   (a) $3x + 2y - 1 = 0$ र $2x + 3y + 4 = 0$ (b) $2x - 7y + 11 = 0$ र $x - 3y - 8 = 0$
   (c) $2x + 3y = 4$ र $x + 2y = 3$ (d) $2x + y = 3$ र $3x + 2y = 1$
   (e) $y = \sqrt{3}x + 5$ र $y + 10 = 0$

4. तलका रेखाहरू आपसमा समानान्तर छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(a) $x - 2y + 3 = 0$ र $2x - 4y + 9 = 0$ (b) $3x - 4y = 7$ र $4y = 3x + 11$

(c) $x-5y-3 = 0$ र $10y = 2x + 13$ (d) $2x - 3y = 5$ र $2x - 3y - 7 = 0$

5. तलका रेखाहरू आपसमा लम्ब छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(a) $5x + 12y = 0$ र $12x - 5y = 17$ (b) $3y - 2x = 1$ र $3x + 2y = 15$

(c) $4x - 3y - 3 = 10$ र $3x + 4y = 18$ (d) $7x + 8y = 63$ र $8x - 7y = 1$

6. तल दिएको अवस्थामा a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) $4x + 3y = 0$ र $3x + ay = 5$ आपसमा लम्ब छन् ।

(b) $ax + 5y = 16$ र $6x + 10y - 9 = 0$ आपसमा लम्ब छन् ।

(c) $ax + 3y = 4$ र $3x + 9y = 5$ आपसमा समानान्तर छन् ।

(d) $5x + ay - 6 = 0$ र $5x - 3y - 8 = 0$ आपसमा समानान्तर छन् ।

7. (a) बिन्दु (3, 4) भएर जाने र रेखा $3x + 4y = 12$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) बिन्दु (2, 5) भएर जाने र रेखा $2x + 5y + 31 = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) बिन्दुहरू (2, 3) र (3,-1) जोड्ने रेखासँग समानान्तर हुने बिन्दु (2, 1) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) बिन्दुहरू (-7, 5) र (2, 2) जोड्ने रेखासँग समानान्तर हुने र बिन्दु (-4, 1) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. (a) रेखा $2x + 5y + 31 = 0$ सँग लम्ब हुने र बिन्दु (2, 5) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) बिन्दु (2, -4) भई जाने र रेखा $5x + 7y + 12 = 0$ सँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण पत्ता गाउनुहोस् ।

(c) बिन्दुहरू (-4, -7) र (5, -2) जोड्ने रेखासँग लम्ब भई बिन्दु (2, 3) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) बिन्दु (2, -3) भई जाने र बिन्दुहरू (5, 7) र (-6, 3) जोड्दा हुने रेखासँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. (a) बिन्दु (1, -4) बाट जाने र रेखा $2x + 3y = 5$ सँग 45° कोण बनाउने रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) रेखा $6x + 5y - 1 = 0$ सँग 45° कोण बनाउने र बिन्दु (2, -1) भएर जाने दुई रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) रेखा $2x - 3y + 10 = 0$ सँग 45° कोण बनाई बिन्दु (2, -1) भएर जाने दुई रेखाहरूको समीकरण निकाल्नुहोस् ।

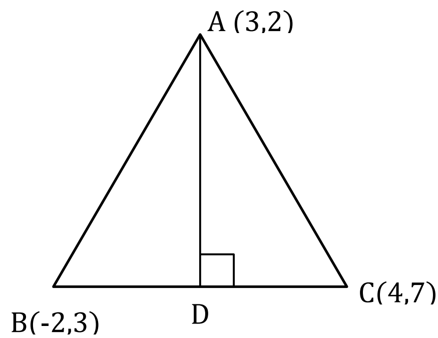
(d) उद्गम बिन्दुबाट जाने र रेखा $x + y + 3 = 0$ सँग 60° को कोण बनाउने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. (a) बिन्दुहरू (-2, 4) र (2, 0) जोड्ने रेखाको लम्बार्धकको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) बिन्दुहरू (4, -5) र (-8, 9) जोड्ने रेखाको लम्बार्धकको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) बिन्दुहरू (2, 5) र (1, 3) जोड्ने रेखाको लम्बार्धकको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) तलको चित्रबाट रेखा AD को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।



4.2 जोडा रेखाहरूका समीकरण (Equation of pair of straight lines)

उद्गम बिन्दुबाट जाने दुई ओटा सरल रेखाका समीकरणहरू बनाउनुहोस् । तल दिइएका यस्ता केही जोडा समीकरणहरूको गुणनफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) $4x + 3y = 0$ र $x - 2y = 0$ (ii) $x - y = 0$ र $2x + 3y = 0$

(iii) $5x - 7y = 0$ र $4x - y = 0$ (iv) $x + y = 0$ र $x + 3y = 0$

तिनीहरूको गुणनफलको स्वरूप कस्तो प्राप्त गर्नुभयो ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

अब, उद्गम बिन्दुबाट जाने दुई सरल रेखाका साधारण स्वरूपको समीकरणहरू $a_1x + b_1y = 0$ र $a_2x + b_2y = 0$ लिनुहोस् । यी समीकरणहरूको गुणनफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

$$(a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) = 0$$

अथवा, $a_1a_2x^2 + a_1b_2xy + b_1a_2xy + b_1b_2y^2 = 0$

अथवा, $a_1a_2x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)xy + b_1b_2y^2 = 0$

यदि, $a_1a_2 = a$, $a_1b_2 + b_2a_1 = 2h$ र $b_1b_2 = b$ मान्ने हो भने माथिको समीकरणलाई $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ लेख्न सकिन्छ । अतः उद्गम बिन्दुबाट जाने जोडा रेखाका समीकरणहरूलाई $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ को रूपमा लेख्न सकिन्छ । यो समीकरणको प्रत्येक पदको डिग्री 2 छ । त्यसैले यो समीकरण चलराशिहरू x र y मा भएको समघातीय वर्ग समीकरण हो । समघातीय वर्ग समीकरणले उद्गम बिन्दुबाट जाने जोडा रेखालाई प्रतिनिधित्व गर्दछ भनी निम्नअनुसार प्रमाणित गर्न सकिन्छ :

यहाँ, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

अथवा, $\frac{ax^2 + 2x\,hy + by^2}{a} = \frac{0}{a}$

$$x^2 + 2.x.\frac{hy}{a} + \frac{by^2}{a} = 0$$

अथवा, $x^2 + 2x.\frac{hy}{a} + \left(\frac{hy}{a}\right)^2 - \left(\frac{hy}{a}\right)^2 + \frac{by^2}{a} = 0$

अथवा, $\left(x + \frac{hy}{a}\right)^2 = \frac{h^2y^2}{a^2} - \frac{by^2}{a}$

अथवा, $\left(x + \frac{hy}{a}\right)^2 = \frac{h^2y^2 - aby^2}{a^2}$

अथवा, $x + \frac{hy}{a} = \pm\sqrt{\frac{y^2(h^2 - ab)}{a^2}}$

अथवा, $\frac{ax + hy}{a} = \pm\frac{y}{a}\sqrt{h^2 - ab}$

अथवा, $ax + hy = \pm y\sqrt{h^2 - ab}$

अब + चिह्न लिँदा,

$ax + hy = y\sqrt{h^2 - ab}$

$y\left(h - \sqrt{h^2 - ab}\right) = -ax$

अथवा, $y = \frac{-a}{h-\sqrt{h^2-ab}}\,x$ ……………….(i)

र – चिह्न लिँदा,

$ax + hy = -y\sqrt{h^2 - ab}$

अथवा, $y\left(h + \sqrt{h^2 - ab}\,\right) = -ax$

अथवा, $y = \frac{-a}{h+\sqrt{h^2-ab}}\,x$ ……………….(ii)

समीकरण (i) र (ii) ले उद्गम बिन्दुबाट जाने रेखाका समीकरणहरू दिन्छन् र तिनीहरूको झुकाव क्रमशः

$$m_1 = \frac{-a}{h-\sqrt{h^2-ab}}$$

र $$m_2 = \frac{-a}{h+\sqrt{h^2-ab}}$$ हुन्छ ।

अतः $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले उद्गम बिन्दुबाट जाने जोडा रेखाहरूलाई प्रतिनिधित्व गर्दछ र ती जोडा रेखाका झुकावहरू $m_1 = \frac{-a}{h-\sqrt{h^2-ab}}$ र $m_2 = \frac{-a}{h+\sqrt{h^2-ab}}$ हुन्छन् ।

यदि ती रेखाहरूबिचको कोण θ भए

$$tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}$$

$$= \pm\frac{\frac{-a}{h-\sqrt{h^2-ab}}-\frac{-a}{h+\sqrt{h^2-ab}}}{1+\left(\frac{-a}{h-\sqrt{h^2-ab}}\right)\left(\frac{-a}{h+\sqrt{h^2-ab}}\right)}$$

$$= \pm\frac{\frac{-a(h+\sqrt{h^2-ab}+a\left(h-\sqrt{h^2-ab}\right)}{\left(h-\sqrt{h^2-ab}\right)\left(h+\sqrt{h^2-ab}\right)}}{\frac{\left(h-\sqrt{h^2-ab}\right)\left(h+\sqrt{h^2-ab}\right)+a^2}{\left(h-\sqrt{h^2-ab}\right)\left(a+\sqrt{h^2-ab}\right)}}$$

$$= \pm\frac{-ah-a\sqrt{h^2-ab}+ah-a\sqrt{h^2-ab}}{h^2-h^2+ab+a^2}$$

$$= \pm\frac{-2a\sqrt{h^2-ab}}{a(a+b)}$$

$$= \pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

$$\therefore \tan\theta = \pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

अतः $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने रेखाबिचको कोण $\theta = \tan^{-1}\left(\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right)$ हुन्छ ।

फेरि, $cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$

$$= \frac{1}{\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}} = \pm\frac{a+b}{2\sqrt{h^2-ab}}$$

यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू आपसमा लम्ब छन् भने $\theta = 90°$ हुन्छ ।

$\therefore cot\theta = cot\ 90°$

अथवा, $\pm\frac{a+b}{2\sqrt{h^2-ab}} = 0$

अथवा, $a+b = 0$

अतः $ax^2+2hxy+by^2 = 0$ दिने जोडा रेखाहरू आपसमा लम्ब छन् भने $a + b = 0$ हुन्छ ।

त्यस्तै $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू आपसमा सम्पाती (coincident) छन् भने $\theta = 0°$ हुन्छ र $tan\theta = tan0° = 0$

अथवा, $\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b} = 0$

अथवा, $\sqrt{h^2 - ab} = 0$

अथवा, $h^2 - ab = 0$

अथवा, $h^2 = ab$

अतः $ax^2+2hxy+by^2 = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू सम्पाती छन् भने $h^2 = ab$ हुन्छ ।

समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने दुई रेखाहरूबिचको कोण पत्ता लगाउने अन्य विधिहरू पनि खोजी गरी छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरणहरू

1. सरल रेखाहरू $x + 3y = 0$ र $3x + y = 0$ लाई प्रतिनिधित्व गर्ने एउटै समीकरण लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएका सरल रेखाका समीकरणहरू

$x + 3y = 0$…………………………………………(i)

र $3x + y = 0$………………………………………..(ii)

अब, समीकरण (i) र (ii) गुणन गर्दा $(x + 3y)(3x + y) = 0$

अथवा, $3x^2 + xy + 9xy + 3y^2 = 0$

अथवा, $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 0$ आवश्यक समीकरण हो ।

2. समीकरण $x^2 - 7xy + 12y^2 = 0$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने जोडा रेखाका समीकरण लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएका सरल रेखाका समीकरण

.$x^2 - 7xy + 12y^2 = 0$

अथवा, $x^2 - 4xy - 3xy + 12y^2 = 0$

अथवा, $x(x - 4y) - 3y(x - 4y) = 0$

अथवा, $(x-4y)(x-3y) = 0$

अतः आवश्यक सरल रेखाका समीकरणहरू

$x - 4y = 0$ र $x - 3y = 0$ हुन् ।

3. समीकरण $3x^2 + 7xy + 2y^2 = 0$ ले दिने जोडा सरल रेखाहरूबिचका कोणहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएका सरल रेखाका समीकरणहरू

अथवा, $3x^2 + 7xy + 2y^2 = 0$ .... (i) लाई $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ सँग तुलना गर्दा,

$a = 3, 2h = 7$ अथवा, $h = \frac{7}{2}$ र $b = 2$

अब, समीकरण (i) ले दिने सरल रेखाहरूबिचको कोण θ भए,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{(a+b)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\pm\frac{2\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-3\times2}}{3+2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\pm\frac{2\sqrt{\frac{49}{4}-6}}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\pm\frac{2\sqrt{\frac{25}{4}}}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\pm\frac{2\cdot\frac{5}{2}}{5}\right) = \tan^{-1}(\pm1)$$

अब, + चिह्न लिँदा $\theta = \tan^{-1}(1) = 45°$ र

पुनः – चिह्न लिँदा $\theta = \tan^{-1}(-1) = 135°$

$\therefore \theta = 45°$ र $135°$

4. यदि समीकरण $rx^2 + 5xy - 6y^2 = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू सम्पाती छन् भने r को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $rx^2 + 5xy - 6y^2 = 0$ ..(i) लाई $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ सँग तुलना गर्दा, $a = r$

$2h = 5$ अथवा, $h = \frac{5}{2}$ र $b = -6$

अब, समीकरण (i) ले दिने जोडा रेखाहरू सम्पाती भएकाले

$h^2 = ab$

अथवा, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = r.(-6)$

अथवा, $\frac{25}{4} = -6r$

अथवा, $r = -\frac{25}{24}$

5. उद्गम बिन्दुबाट जाने र $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ ले दिने रेखाहरूसँग लम्ब हुने जोडा रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$

अथवा, $x^2 + 2xy + xy + 2y^2 = 0$

अथवा, $x(x + 2y) + y(x + 2y) = 0$

अथवा, $(x + 2y)(x + y) = 0$

$\therefore x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू

$x + 2y = 0$ र $x + y = 0$ हुन् ।

अब, रेखा $x + 2y = 0$ सँग लम्ब भई उद्गम बिन्दुबाट जाने रेखाको समीकरण $2x - y = 0$ हुन्छ ।

त्यस्तै, रेखा $x + y = 0$ सँग लम्ब भई उद्गम बिन्दुबाट जाने रेखाको समीकरण $x - y = 0$ हुन्छ ।

अतः आवश्यक समीकरण

$(2x-y)(x-y) = 0$

अथवा, $2x^2 - 2xy - xy + y^2 = 0$

अथवा, $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$ हो ।

अभ्यास 4.2

1. (a) समघातीय वर्ग समीकरणका दुई ओटा उदाहरण दिनुहोस् ।

   (b) समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने जोडा रेखाहरूबिचको कोण कति हुन्छ ?

   (c) समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने जोडा रेखाहरू आपसमा लम्ब हुने र सम्पाती हुने अवस्थाहरू लेख्नुहोस् ।

2. तलका जोडा समीकरणहरूलाई प्रतिनिधित्व गर्ने एउटै समीकरण लेख्नुहोस् ।

   (a) $ax = by$ र $bx + ay = 0$ (b) $2x + y = 0$ र $x + y = 0$

   (c) $\sqrt{3}x = y$ र $y = 0$ (d) $x + y + 2 = 0$ र $x + 2y - 1 = 0$

3. तलका समीकरणहरूले जनाउने दुई सरल रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $4x^2 + 5xy + y^2 = 0$ (b) $4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0$

   (c) $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$ (d) $y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$

   (e) $33x^2 - 44xy + 11y^2 = 0$ (f) $x^2 - y^2 = 0$

4. तलका समीकरणहरूले दिने सरल रेखाबिचका कोणहरू निकाल्नुहोस् ।

   (a) $6x^2 + xy - y^2 = 0$ (b) $2x^2 + 7xy + 3y^2 = 0$

   (c) $x^2 - 2\cot\alpha xy - y^2 = 0$ (d) $x^2 + 2\sec\alpha xy + y^2 = 0$

   (e) $x^2 + 5xy + 6y^2 = 0$ (f) $3x^2 - 4xy + y^2 = 0$

5. तलका समीकरणहरूले दिने सरल रेखाहरू आपसमा लम्ब हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

   (a) $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 0$ (b) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$

   (c) $6x^2 + 9xy - 6y^2 = 0$ (d) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$

6. तलका समीकरणहरूले दिने सरल रेखाहरू आपसमा सम्पाती हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

   (a) $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 0$ (b) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$

   (c) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 0$ (d) $x^2 + 6xy + 9y^2 = 0$

7. तलका समीकरणहरूले दिने सरल रेखाहरू आपसमा लम्ब छन् भने p र q को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $11x^2 - \frac{5}{3}xy + py^2 = 0$ (b) $p^2x^2 - 5xy - 9y^2 = 0$

   (c) $\frac{7}{2}x^2 + 5xy + qy^2 = 0$ (d) $(q^2-1)x^2 + 2xy - (3q-3)y^2 = 0$

8. तलका समीकरणहरूले दिने सरल रेखाहरू सम्पाती छन् भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $kx^2 - 8xy + 8y^2 = 0$ (b) $9x^2 - 24xy + ky^2 = 0$

(c) $2x^2 + kxy + 2y^2 = 0$ (d) $(k-9)x^2 - (k-10)xy + ky^2 = 0$

9. तलका समीकरणहरूले दिने सरल रेखासँग लम्ब हुने र उद्गम बिन्दुबाट जाने जोडी रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

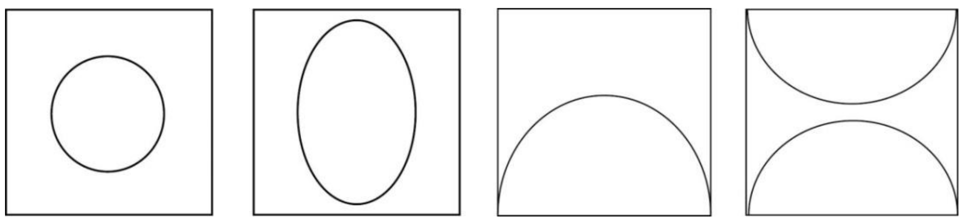
(a) $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$ (b) $2x^2 - 7xy + 5y^2 = 0$

(c) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$ (d) $3x^2 + 8xy + 5y^2 = 0$

10. माथि प्रश्न 9 बाट प्राप्त जोडा सरल रेखाको लेखाचित्र बनाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4.3 साङ्किक (Conic Sections)

तल दिइएका चित्रहरूको अवलोकन गर्नुहोस् ।

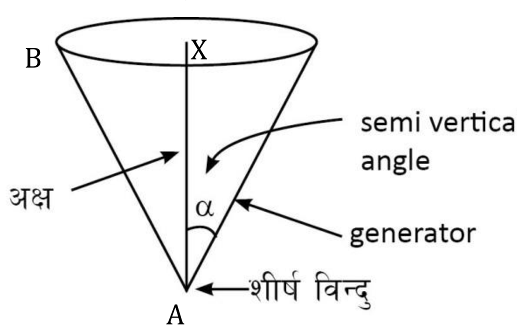


के समतलमा बनेका यस्ता चित्रहरू दैनिक जीवनमा प्रयोग भएको थाहा पाउनु भएको छ ? माथिको पहिलो चित्र वृत्त हो र यसको केन्द्र बिन्दुबाट परिधिसम्मको दुरी सबैतिर बराबर छ । तर के दोस्रो चित्रमा वृत्तको जस्तै केही ज्यामितीय गुणहरू देखिन्छन् । छलफल गर्नुहोस् ।

समतलीय सतहमा देखिने यस्ता ज्यामितीय वक्रहरू वा आकृतिहरूको संरचना र बन्ने तरिका विशेष खालको छ । जसका लागि ज्यामितीय ठोस आकृति समकोणी सोलीको महत्त्वपूर्ण भूमिका हुन्छ ।

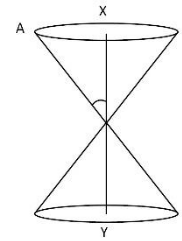
सोलीको आधार कस्तो आकृतिको हुन्छ ? सोलीको आधारको केन्द्रबाट आधारसँग लम्ब भई शीर्षबिन्दु जोडिएको रेखालाई के भनिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

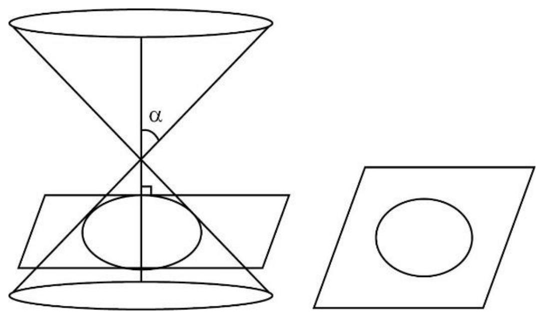
सोलीको ठाडो उचाइ वा अक्षसँग छड्के उचाइले बनाएको कोणलाई Semi vertical angle भनिन्छ । जसलाई चित्रमा व्यक्त गर्दा,



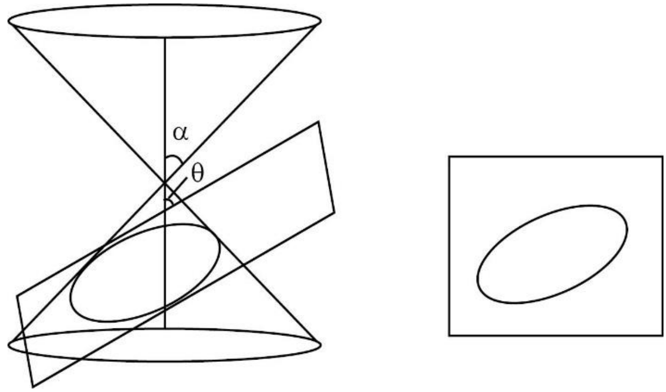
रेखाखण्ड AB लाई ठाडो अक्ष XY को वरिपरि एक फन्को वा 360° घुमाउँदा कस्तो आकृति बन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

बराबर दुई ओटा समाकोणी सोलीका शीर्षबिन्दुहरूलाई जोडी बनाइएको ठोस आकृति दोहोरो गरी शीर्षबिन्दुतर्फ जोडिएको सोली (double mapped right circular cone) हो ।

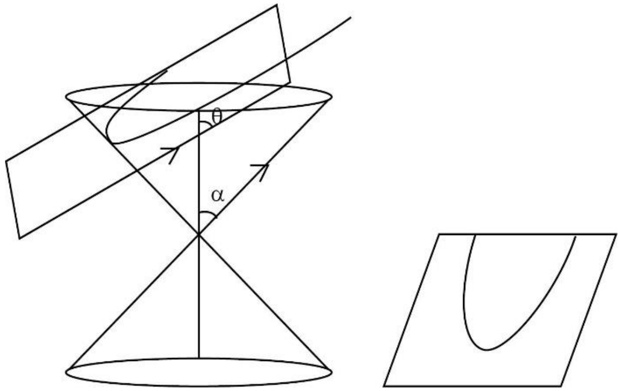




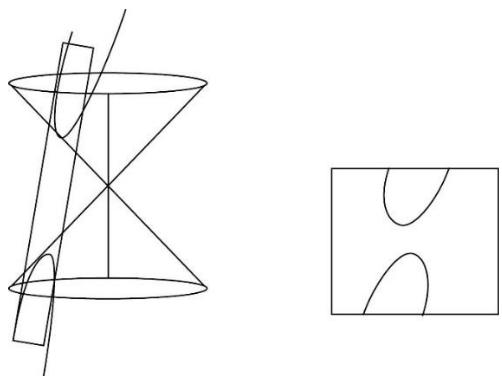
कुनै समतलीय सतहले सोलीको अक्षसँग 90° बनाई वा सोलीका आधारसँग समानान्तर भई सोलीलाई प्रतिच्छेदित गर्दा बन्ने आकृति वा समतलीय वक्र नै वृत्त हो ।



कुनै समतलीय सतहले सोलीको एउटा भागलाई काट्दा उक्त सतहले सोलीको अक्षसँग बनाएको कोण θ छ र उक्तकोण θ को मान यदि semi vertical angle (α) भन्दा ठुलो र 90° भन्दा सानो अर्थात् $\alpha < \theta < 90°$ छ भने सो अवस्थामा सोली र सतहको प्रतिच्छेदनबाट बनेको समतलीय वक्र नै दीर्घवृत्त (ellipse) हो ।



यदि समतल सतहले सोलीलाई प्रतिच्छेदन गर्दा सो समतलीय सतहले बनाएको कोण θ र semi vertical angle (α) बराबर भएको अवस्थामा (θ = α) अथवा generator सँग समतलीय सतह समानान्तर छ भने समतलीय सतह र सोलीको प्रतिच्छेदनबाट बन्न गएको वक्रलाई (parabola) भनिन्छ ।



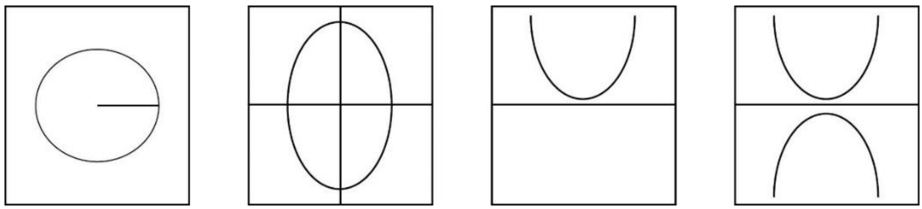
माथिको चित्रमा समतलीय सतहले सोलीको दुवै भागलाई काटेको छ । यस अवस्थामा समतलीय सतहले सोलीको अक्षसँग बनाएको कोण θ छ भने θ < α (semi vertical angle) हुन्छ । सोलीको दुवै भाग र समतलीय सतहको प्रतिच्छेदनबाट बन्न गएको समतलीय वक्रलाई हाइपरबोला (Hyperbola) भनिन्छ ।

अभ्यास 4.3

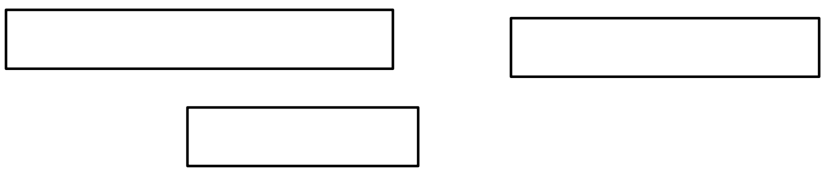
1. (a) कुनै समतलीय सतहले सोलीलाई काट्दा यदि सो सतह सोलीको अक्षसँग समानान्तर भए कुन साङ्किक भाग बन्छ ?

(b) कुनै समतलीय सतहले सोलीलाई काट्दा यदि सो सतह सोलीको जेनेरेटर (generator) सँग समानान्तर भए कुन साङ्खिक भाग बन्छ ?

2. तल दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूको नाम लेख्नुहोस् ।



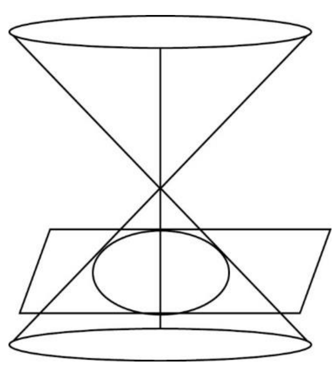
3. चित्रमा दिइएका स्ट्रिपहरू प्रयोग गरी दीर्घवृत्त (ellipse) कसरी बनाउन सकिन्छ ? समूहमा छलफल गरी नतिजा कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



4. आलु काटेर, कागज फोल्ड गरेर र माटाका डल्ला प्रयोग गरी पाराबोला (parabola) इलिप्स (ellipse) र हाइपरबोला (hyperbola) कसरी बनाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

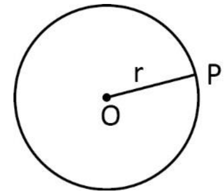
5. कुनै ठोस वस्तु माटो, मुला, आलु वा गाजर लिई एउटा सोलीको आधारमा हुने गरी बनाउनुहोस् । त्यसको ठाडो अक्षसँग लम्ब, समानान्तर विभिन्न कोणमा छड्के पारी काट्नुहोस् । यसरी काट्दा बन्ने सतह पहिचान गरी चित्र बनाउनुहोस् वा फोटो लिनुहोस् । यसलाई सामग्रीसहित कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4.4 वृत्त (Circle)

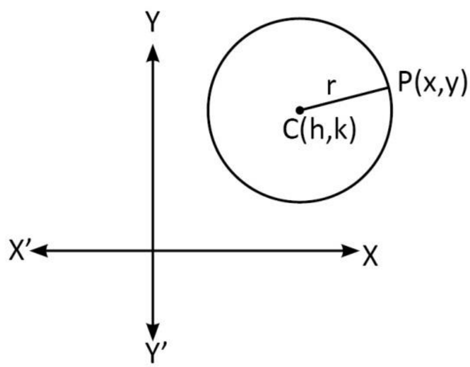


एउटा समकोणीय सोली (right circular cone) लाई कुनै समतल सतहले आधारसँग समानान्तर हुने गरी काट्दा बनेको आकृति नै वृत्त हो । अथवा सोलीको ठाडो उचाइ (vertical height) वा अक्षसँग लम्ब हुने गरी कुनै समतल सतह (plane) ले काट्दा बन्ने आकृतिलाई वा त्यस्तो भागलाई वृत्त भनिन्छ ।

वृत्तलाई बिन्दुपथका रूपमा पनि परिभाषित गर्न सकिन्छ । निश्चित बिन्दुबाट बराबर दुरीमा चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथ नै वृत्त हो । त्यो निश्चित बिन्दु वृत्तको केन्द्र हो भने बराबर दुरी वृत्तको अर्धव्यास हो । चित्रमा देखाइएको वृत्तको केन्द्र O हो र अर्धव्यास r = OP हो ।



(A) केन्द्र (h, k) र अर्धव्यास r भएको वृत्तको समीकरण



माथिको चित्रमा दिइएको वृत्तको केन्द्र C(h, k) र अर्धव्यास CP = r छ । मानौँ P वृत्तको परिधिमा कुनै बिन्दु (x,y) छ ।

अब, दुरी सूत्रबाट

$CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

अथवा, $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

अथवा, $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

∴ केन्द्र (h, k) र अर्धव्यास r भएको वृत्तको समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ हुन्छ ।

द्रष्टव्य : केन्द्र (h, k) = (0, 0) लिँदा वृत्तको समीकरण

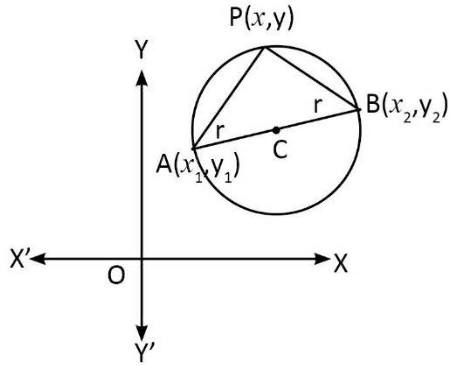
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

अथवा, $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$

अथवा, $x^2 + y^2 = r^2$

अतः केन्द्र उद्गम बिन्दु र अर्धव्यास r भएको वृत्तको समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ हुन्छ ।

(B) व्यासको छेउका बिन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) भएको वृत्तको समीकरण



माथिको चित्रमा AB वृत्तको व्यास हो । A र B का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (x_1,y_1) र (x_2, y_2) मानौँ ।

वृत्तको परिधिमा पर्ने कुनै बिन्दु P को निर्देशाङ्क (x, y) मानौँ । PA र PB जोडौँ । ∡APB को मान कति हुन्छ, किन ? के AP⊥BP छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

अब, AP को झुकाव $(m_1) = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ र

BP को झुकाव $(m_2) = \frac{y-y_2}{x-x_2}$ हुन्छ ।

फेरि, AP र BP आपसमा लम्ब भएकाले

$m_1.m_2 = -1$

अथवा, $\frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$

अथवा, $\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(x-x_1)(x-x_2)} = -1$

अथवा, $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$

अथवा, $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

अतः (x_1, y_1) र (x_2, y_2) व्यासका छेऊ बिन्दुहरू हुन् भने वृत्तको समीकरण

$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$ हुन्छ ।

(C) साधारण स्वरूपमा वृत्तको समीकरण

समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ लाई वृत्तको साधारण स्वरूपको समीकरण भनिन्छ । यसमा $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

अथवा, $x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 - g^2 - f^2 + c = 0$

अथवा, $(x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$

अथवा, $\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=\left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2$

लाई, $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ सँग तुलना गर्दा,

केन्द्र $(h, k)=(-g,-f)$

अर्धव्यास $(r)=\sqrt{g^2+f^2-c}$

अतः साधारण स्वरूप $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ भएको वृत्तको केन्द्र $(-g,-f)$ र अर्धव्यास $(r)=\sqrt{g^2+f^2-c}$ हुन्छ ।

उदाहरणहरू

1. केन्द्र (5, -2) र अर्धव्यास 5 एकाइ भएको वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, केन्द्र $(h, k)=(5,-2)$

र अर्धव्यास $(r)=5$

अब, वृत्तको समीकरण

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

अथवा, $(x-5)^2+\left(y-(-2)\right)^2=5^2$

अथवा, $(x-5)^2+(y+2)^2=25$

अथवा, $x^2-10x+25+y^2+4y+4=25$

अथवा, $x^2+y^2-10x+4y+4=0$ आवश्यक समीकरण हो ।

2. तलका वृत्तको केन्द्र बिन्दु र अर्धव्यास पत्ता लगाई लेखाचित्र खिच्नुहोस् ।

(a) $(x-3)^2+(y-5)^2=4$

(b) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$

समाधान

(a) यहाँ,

$(x-3)^2+(y-5)^2=4$

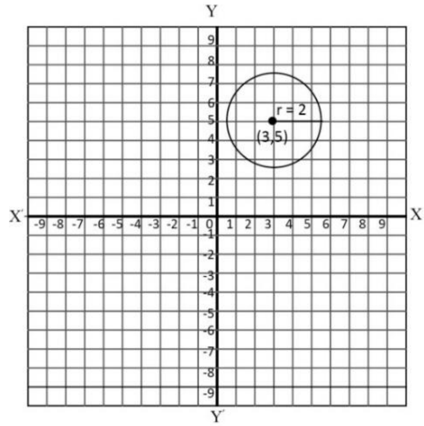
अथवा, $(x-3)^2+(y-5)^2=2^2$

लाई $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ सँग तुलना गर्दा,

केन्द्र $(h, k)=(3, 5)$

अर्धव्यास $(r)=2$

लेखाचित्र



(b) यहाँ, $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ लाई $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ सँग तुलना गर्दा, 2g = –4 अथवा, g = -2

पुनः 2f = 2 अथवा, f = 1

र c = -4

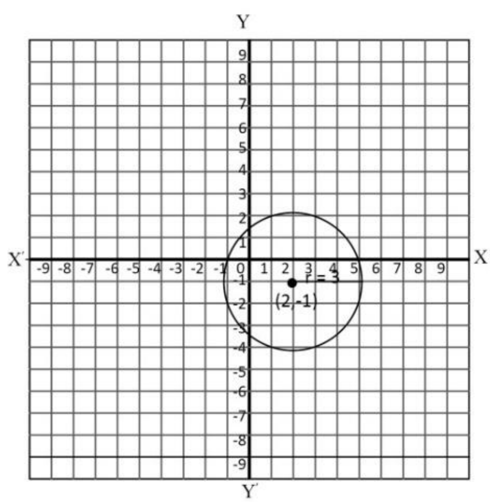
अब, केन्द्र =(-g, -f) = (-(-2), -1) = (2,-1)

र अर्धव्यास (r)= $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 - (-4)}$

$= \sqrt{9} = 3$ एकाइ

लेखाचित्र



3. बिन्दुहरू (2, -2), (6, 6) र (5, 7) भएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ दिइएका बिन्दुहरू (2, -2), (6, 6) र (5, 7) हुन् ।

अब वृत्तको समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ……………..(i)मानौं,

बिन्दुहरू (2, -2), (6, 6) र (5, 7) समीकरण (i) मा पर्ने भएकाले

$(2-h)^2+(-2-k)^2= r^2$ ……………………… (ii)

$(6-h)^2+(6-k)^2= r^2$ ……………………… (iii)

$(5-h)^2+(7-k)^2= r^2$ ……………………… (iv)

समीकरण (ii) र (iii) बाट

$4 - 4h + h^2 + 4 + 4k + k^2 = 36 - 12h + h^2 + 36 - 12k + k^2$

अथवा, $8h + 16k = 64$

अथवा, $8(h + 2k) = 64$

अथवा, $h + 2k = 8$ ………………………….(v)

र समीकरण (ii) र (iv) बाट,

$4 - 4h + h^2 + 4 + 4k + k^2 = 25 - 10h + h^2 + 49 - 14k + k^2$

अथवा, $6h + 18k = 66$

अथवा, $6(h + 3k) = 66$

अथवा, $h + 3k = 11$ ……………………….(vi)

अब समीकरण (v) र (vi) हल गर्दा,

$$\begin{array}{r} h + 3k = 11 \\ h + 2k = 8 \\ - \quad\quad - \\ \hline k = 3 \end{array}$$

फेरि, k को मान समीकरण (v) मा राख्दा,

$h + 2.3 = 8$

अथवा, $h = 8-6$

अथवा, $h = 2$

अब, (h, k) को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$(2-2)^2+(-2-3)^2= r^2$

अथवा, $25 = r^2$

अथवा, $r^2 = 5^2$

$\therefore r = 5$

अतः आवश्यक वृत्तको समीकरण

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

अथवा, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$

अथवा, $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ हो ।

4. व्यासका छेउ छेउका बिन्दुहरू (3, 2) र (7, 6) भएको वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, वृत्तका छेउ छेउका दुई बिन्दुहरू

$(x_1, y_1) = (3, 2)$ र $(x_2, y_2) = (7, 6)$ भए

अब वृत्तको समीकरण

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

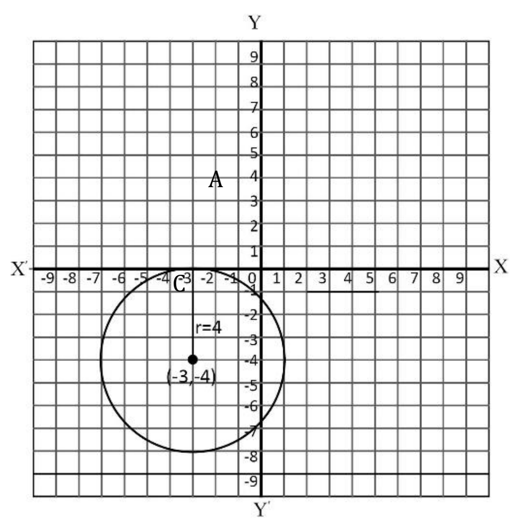
अथवा, $(x-3)(x-7) + (y-2)(y-6) = 0$

अथवा, $x^2 - 3x - 7x + 21 + y^2 - 2y - 6y + 12 = 0$

अथवा, $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0$ आवश्यक समीकरण हो ।

5. केन्द्र (-3, -4) भएको वृत्तले x- अक्षलाई छुन्छ भने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



माथिको चित्रमा C(-3, -4) वृत्तको केन्द्र हो । वृत्तले x- अक्षको बिन्दु A मा छुन्छ ।

तब, वृत्तको केन्द्र (h,k) = (-3, -4) र अर्धव्यास (r) = 4 एकाइ हुन्छ ।

अब, वृत्तको समीकरण

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

अथवा $(x-(-3))^2 + (y-(-4))^2 = 4^2$

अथवा, $x^2 + 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 16$

अथवा $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$ आवश्यक समीकरण हो ।

अभ्यास 4.4

1. (a) उद्गम बिन्दु केन्द्र र अर्धव्यास r भएको वृत्तको समीकरण लेख्नुहोस् ।

   (b) केन्द्र (p, q) र अर्धव्यास r भएको वृत्तको समीकरण लेख्नुहोस् ।

   (c) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ समीकरण भएको वृत्तको केन्द्र र अर्धव्यास लेख्नुहोस् ।

2. निम्न लिखित केन्द्र र अर्धव्यास भएको वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

क्र.स.	केन्द्र	अर्धव्यास
(a)	(0, 0)	5
(b)	(2, 3)	4
(c)	(-3, -4)	6
(d)	(0, 1)	4
(e)	(2, -5)	7
(f)	(5, 0)	3
(g)	(-2, 3)	4
(h)	(3, 4)	5
(i)	(a, a)	$a\sqrt{2}$
(j)	(a, b)	a

3. तल दिइएका वृत्तको केन्द्र र अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $x^2 + y^2 = 16$ (b) $x^2 + (y + 2)^2 = 49$

   (c) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$ (d) $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$

   (e) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ (f) $(x - a)^2 + (y + b)^2 = k^2$

   (g) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$ (h) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

   (i) $x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{13}{2} = 0$ (j) $2x^2 + 2y^2 + 10x + 6y + 7 = 0$

4. दिइएका बिन्दुहरू वृत्तका व्यासका छेउ छेउ बिन्दुहरू हुन् भने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) (3, 4) र (2, -7) (b) (4, 1) र (6, 5) (c) (a, 0) र (-a, 0)

(d) (3, 0) र (-1, 0) (e) (5, 0) र (0, 5) (f) (-3, -2) र (3, 2)

5. निम्न लिखित बिन्दुहरू भएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) (-2, 2), (2, 4) र (4, 0) (b) (1, 1), (4, 4) र (5, 1) (c) (0, 0), (0, b) र (a, 0)

(d) (1, -1), (3, 1) र (3, -3) (e) (2, 6), (6, 4) र (-3, 1) (f) (1, 0), (-1, 0) र (0, 1)

6. तलका बिन्दुहरू एउटै वृत्तमा पर्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(a) (3, 3), (6, 4) (7, 1) र (4, 6) (b) (1, 0), (2, -7) (8, 1) र (9, -6)

7. तलका वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) केन्द्र (3, 4) र x- अक्षलाई छुने (b) केन्द्र (4, 5) र x- अक्षलाई छुने

(c) केन्द्र (4, -3) र y- अक्षलाई छुने (d) केन्द्र (-5, -4) र y- अक्षलाई छुने

(e) केन्द्र (2, 2) र दुवै अक्षलाई छुने

(f) अर्धव्यास 5 एकाइ दुवै धनात्मक अक्षलाई छुने ।

8. वृत्तको समीकरणका विभिन्न स्वरूपहरूबिच सम्बन्ध खोजी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

एकाइ 5

त्रिकोणमिति (Trigonometry)

5.0 पुनरावलोकन (Review)

कोण A र B का मिश्रित कोणहरू के के हुन सक्छन ? ती कोणहरूका sine, cosine र tangent का अनुपातहरू कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? समूहमा छलफल गरी तलको परिणामसँग दाँज्नुहोस् ।

$\sin(A+B) = sinA\, cosB + cosA\, sinB$

$\sin(A-B) = sinA\, CosB - cosA\, sinB$

$\cos(A+B) = cosA\, cosB - sinA\, sinB$

$\cos(A-B) = cosA\, cosB + sinA\, sinB$

$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + tanB}{1 - tanA\, tanB}$

र $\tan(A-B) = \frac{\tan A - tanB}{1 + tanA\, tanB}$

5.1 अपवर्त्यकोणका त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Trigonometric Rations of Multiple Angles)

कोण A का अपवर्त्यकोणहरू के के हुन् ? के $2A, 3A, 4A, \ldots\ldots nA, n \in N$ कोण A का अपवर्त्यकोणहरू हुन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

(a) कोण 2A का त्रिकोणमितीय अनुपातहरू

मिश्रकोणका सम्बन्धहरू प्रयोग गरी कोण A को अपवर्त्यकोण 2A का sine, cosine र tangent का अनुपातहरू निम्नानुसार पत्ता लगाउन सकिन्छ :

हामीलाई थाहा छ,

$sin2A = \sin(A+A)$

$= sinA\, cosA + cosA\, sinA$

$= sinA\, cosA + sinA\, cosA$

$= 2sinA\, cosA$

यसैगरी,

$cos2A \quad = \cos(A+A)$

$= cosA\, cosA - sinA\, sinA$

$= cos^2A - sin^2A$

पुनः $cos2A = cos^2A - sin^2A$

$= cos^2A - (1 - cos^2A) = \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$

$$= 2cos^2A - 1$$

र $cos2A = \cos^2 A - sin^2A$

$$= 1 - \sin^2 A - sin^2A$$

$$= 1 - 2sin^2A$$

यसैगरी, $tan2A = \tan(A + A)$

$$= \frac{tanA+tanA}{1-tanA\,tanA}$$

$$= \frac{2tanA}{1-tan^2A}$$

त्यस्तै, $sin2A$ र $cos2A$ का माथिका सम्बन्धहरू $tanA$ को रूपमा समेत व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

$sin2A = 2sinA\,cosA$

$$= 2\frac{sinA}{cosA}cos^2A$$

$$= \frac{2tanA}{sec^2A}$$

$$= \frac{2tanA}{1+tan^2}$$

र $\text{Cos}2\text{A} = cos^2A - sin^2A$

$$= cos^2A\left(1 - \frac{sin^2A}{cos^2A}\right) = \text{Cos}^2\text{A}(1\text{-}\tan^2\text{A})$$

$$= \frac{1-tan^2A}{sec^2A}$$

$$= \frac{1-tan^2A}{1+tan^2A}$$

फेरि, $cos2A = 2cos^2A - 1$

अथवा, $2cos^2A = 1 + cos2A$

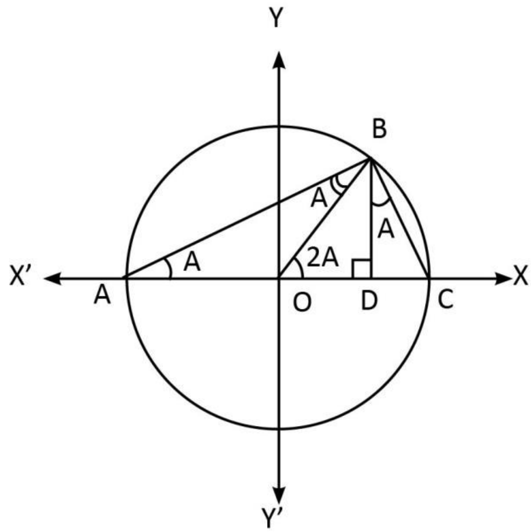
अथवा, $cos^2A = \frac{1+cos2A}{2}$

र $cos2A = 1 - 2sin^2A$

अथवा, $2sin^2A = 1 - cos^2A$

अथवा, $sin^2A = \frac{1-cos2A}{2}$

माथि पत्ता लगाइएका सम्बन्धहरूलाई ज्यामितीय तरिकाबाट पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ । केन्द्र O भएको एउटा एकाइ वृत्त लिनुहोस् जसको व्यास AC, X- अक्षमा छ ।



चित्र 5.1.1

वृत्तको कुनै बिन्दु B लाई व्यासका छेउका बिन्दुहरू A र C सँग जोडौँ । चित्रमा ΔABC एउटा समकोणी त्रिभुज बन्छ । $BD \perp AC$ खिचौँ । यदि $\measuredangle BAC = A$ मान्ने हो भने $\measuredangle ABO = A, \measuredangle CBD = A$ र $\measuredangle BOD = 2A$ हुन्छ । कारण खोज्नुहोस् । माथिको चित्रमा कति ओटा समकोणी त्रिभुजहरू छन् ? पत्ता लगाई प्रत्येक समकोणी त्रिभुजहरूबाट $sinA, cosA$ र $tanA$ का अनुपातहरूको सूची बनाउनुहोस् ।

अब, समकोणी ΔBDO मा

$$sin2A = \frac{BD}{OB}$$

$$= \frac{2BD}{2OB}$$

$$= \frac{2BD}{AC}$$

$$= 2\ \frac{BD}{AB} \cdot \frac{AB}{AC}$$

$$= 2sinA\ cosA$$

यसैगरी,

$$cos2A = \frac{OD}{OB}$$

$$= \frac{2OD}{2OB}$$

$$= \frac{(AO+OD)-(AO-OD)}{AC}$$

$$= \frac{(AO+OD)-(CO-OD)}{AC}$$

$$= \frac{AD-DC}{AC}$$

$$= \frac{AD}{AC} - \frac{DC}{AC}$$

$$= \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} - \frac{DC}{BC} \cdot \frac{BC}{AC}$$

$$= cosA\ cosA - sinA\ sinA$$

$$= cos^2A - sin^2A$$

र $tan2A = \frac{BD}{OD} = \frac{2BD}{2OD}$

$$= \frac{2BD}{(AO+OD)-(AO-OD)}$$

$$= \frac{2BD}{(AO+OD)-(CO-OD)}$$

$$= \frac{\frac{2BD}{AD}}{\frac{AD-DC}{AD}}$$

$$= \frac{\frac{2BD}{AD}}{\frac{AD}{AD}-\frac{DC}{AD}}$$

$$= \frac{\frac{2BD}{AD}}{1-\frac{DC}{BD}\cdot\frac{BD}{AD}}$$

$$= \frac{2tanA}{1-tan^2A}$$

(B) कोण 3A का त्रिकोणमितीय अनुपातहरू

$\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ र $\tan(A+B)$ तथा $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ का अनुपातहरू लेख्नुहोस् । के ती अनुपातहरूको प्रयोग गरी $sin3A, cos3A$ र $tan3A$ का अनुपातहरू पत्ता लगाउन सक्नुहुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

हामीलाई थाहा छ,

$sin3A = \sin(2A + A)$

$$= sin2A\ cosA + cos2A\ sinA$$

$$= 2sinA\ cosA. CosA + (1 - 2sin^2A)sinA$$

$$= 2sinA\ cos^2A + (1 - 2\ sin^2A)sinA$$

$$= 2sinA\ (1 - sin^2A) + (1 - 2\ sin^2A)sinA$$

$$= 2sinA\ - 2sin^3A + sinA - 2\sin^3 A$$

$= 3sinA - 4sin^3A$

यसैगरी,

$cos2A \quad = \cos(2A + A)$

$= cos2A\,cosA - sin2A\,sinA$

$= (2cos^2A - 1)cosA - 2sinA\,cosA\,sinA$

$= (2cos^2A - 1)cosA - 2sin^2A\,cosA$

$= (2cos^2A - 1)cosA - 2(1 - cos^2A\,)cosA$

$= 2cos^3A - cosA - 2cosA + 2cos^3A$

$= 4cos^3A - 3cosA$

र $tan3A = \tan(2A + A)$

$$= \frac{tan2A + tanA}{1 - tan2A\,tanA}$$

$$= \frac{\frac{2tanA}{1-tan^2A} + tanA}{1 - \frac{2tanA}{1-tan^2A} \cdot tanA}$$

$$= \frac{\frac{2tanA + tanA - tan^3A}{1-tan^2A}}{\frac{1-tan^2A-2tan^2A}{1-tan^2A}}$$

$$= \frac{3tanA - tan^3A}{1 - 3tan^2A}$$

फेरि, $sin3A = 3sinA - 4sin^3A$

अथवा, $4sin^3A = 3sinA - sin3A$

अथवा, $\sin^3A = \frac{3sinA - sin3A}{4}$

र $cos3A = 4cos^3A - 3cosA$

अथवा, $4cos^3A = cos3A - 3cosA$

अथवा, $cos^3A = \frac{cos3A - 3cosA}{4}$

उदाहरणहरू

1. (a) यदि $sinA = \frac{1}{2}$ भए $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $sinA = \frac{3}{5}$ भए $sin3A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(a) यहाँ, $sinA = \frac{1}{2}$

र $cosA = \sqrt{1 - sin^2A}$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4-1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} \quad = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अब, $sin2A = 2sinA\,cosA$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$cos2A \quad = 1 - 2sin^2A$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

र $tan2A = \frac{sin2A}{cos2A}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

(b) यहाँ, $sinA = \frac{3}{5}$

अब, $sin3A = 3sinA - 4sin^3A$

$$= 3 \cdot \frac{3}{5} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$= \frac{9}{5} - \frac{108}{125}$$

$$= \frac{225-108}{125}$$

$$= \frac{117}{125}$$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् : $cotA = \pm\sqrt{\frac{1+cos2A}{1-cos2A}}$

समाधान

हामीलाई थाहा छ, $cos^2A = \frac{1+cos2A}{2}$

अथवा, $cosA = \pm\sqrt{\frac{1+cos2A}{2}}$

र $sin^2A = \frac{1-cos2A}{2}$

अथवा, $sinA = \pm\sqrt{\frac{1-cos2A}{2}}$

अब, बायाँ पक्ष $= cotA$

$= \frac{cosA}{sinA}$

$= \frac{\pm\sqrt{\frac{1+cos2A}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1-cos2A}{2}}}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{1+cos2A}{2}}{\frac{1-cos2A}{2}}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1+cos2A}{1-cos2A}}$

= दायाँपक्ष प्रमाणित भयो ।

3. प्रमाणित गर्नुहोस् : $sin2A = \frac{2cotA}{cot^2A+1}$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= sin2A$

$= 2sinA\,cosA$

$= \frac{2sinA\,cosA}{1}$

$= \frac{2sinA\,cosA}{cos^2A+sin^2A}$

$= \frac{\frac{2sinA\,cosA}{sin^2A}}{\frac{cos^2A+sin^2A}{sin^2A}}$

$$= \frac{\frac{2cosA}{sinA}}{\frac{cos^2A}{sin^2A}+\frac{sin^2A}{cos^2A}} = \frac{2cotA}{cot^2A+1}$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

4. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1-cos2A}{sin2A} = tanA$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= \frac{1-cos2A}{sin2A}$

$$= \frac{1-(1-2sin^2A)}{2sinA\ cosA}$$

$$= \frac{1-1+2sin^2A}{2sinA\ cosA}$$

$$= \frac{2sin^2A}{2sinA\ cosA}$$

$$= \frac{sinA}{cosA} = tanA$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

5. प्रमाणित गर्नुहोस् : $2sin^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right) = 1 - sin2A$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= 2sin^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$

$$= 2[\sin(\frac{\pi}{4}-A)]^2$$

$$= 2(sin\frac{\pi}{4}\cdot cosA - cos\frac{\pi}{4}\cdot sinA)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}cosA - \frac{1}{\sqrt{2}}sinA\right)^2$$

$$= 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(cosA - sinA)\right]^2$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(\cos^2\text{A} – 2\text{cosA sinA} + \sin^2\text{A})$$

$$= 1 - 2sinA\ cosA$$

$$= 1 - sin2A$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

6. यदि $cosA = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $cos3A = \frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3})$

समाधान

यहाँ, $cosA = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

अब, बायाँ पक्ष $= cos3A$

$= 4\cos^3 A - 3cosA$

$= 4\left\{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right\}^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$

$= 4 \cdot \frac{1}{8}\left\{a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 + 3\, a \cdot \frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right\} - \frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - \frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

7. प्रमाणित गर्नुहोस् : $4(\cos^3 10^\circ + sin^3 20^\circ) = 3(cos10^\circ + sin20^\circ)$

समाधान

यहाँ,

बायाँ पक्ष $= 4(\cos^3 10^\circ + sin^3 20^\circ)$

$= 4\cos^3 10^\circ + 4sin^3 20^\circ$

$= cos3 \times 10^\circ + 3\, cos10^\circ + 3sin20^\circ - sin3 \times 20^\circ$

$= cos30^\circ + 3\,(cos10^\circ + sin20^\circ) - sin60^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 3(cos10^\circ + sin20^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3(cos10^\circ + sin20^\circ)$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.1

1. (a) अपवर्त्यकोण भनेको के हो ? उदाहरणसहित प्रष्ट पार्नुहोस् ।

   (b) $sin2A$ लाई $sinA$ र $cosA$ का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (c) $tan2A$ लाई $sinA$ र $cosA$ का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (d) $cos2A$ लाई,(i) $sinA$ र $cosA$ का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (ii) sinA का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (iii) cosA का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (iv) tanA का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (e) sin3A लाई sinA का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (f) cos3x लाई cosx का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (g) tan3y लाई tany का रूपमा लेख्नुहोस् ।

2. (a) यदि $sinA = \frac{4}{5}$ भए $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $sinA = \frac{5}{13}$ भए $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) यदि $cosA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (d) यदि $cosA = \frac{7}{25}$ भए $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (e) यदि $tanA = \frac{3}{4}$ भए $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (f) यदि $tanA = \frac{1}{\sqrt{3}}$ भए $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (g) यदि $sin\theta = \frac{1}{2}$ भए $sin3\theta$ र $cos3\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (h) यदि $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $cos3\theta$ र $sin3\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (i) यदि $cos\beta = \frac{4}{5}$ भए $sin3\beta$ र $cos3\beta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (j) यदि $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $cos3x$ र $sin3x$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (k) यदि $tan\alpha = \frac{1}{2}$ भए $tan3\alpha$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (l) यदि $tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए $tan3\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $sinA = \pm\sqrt{\frac{1-cos2A}{2}}$ (b) $cosA = \pm\sqrt{\frac{1+cos2A}{2}}$

(c) $tanA = \pm\sqrt{\frac{1-cos2A}{1+cos2A}}$ (d) $cot2A = \frac{cot^2A-1}{2cotA}$

(e) $cos2A = \frac{cot^2A-1}{cot^2A+1}$ (f) $cosec2A = \frac{cot^2A+1}{2cotA}$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{sin2A}{1-cos2A} = cotA$ (b) $\frac{sin2A}{1-cos2A} = tanA$

(c) $\frac{1-cos2A}{1+cos2A} = tan^2A$ (d) $\frac{1+sin2A}{cos2A} = \frac{cosA+sinA}{cosA-sinA}$

(e) $\frac{cos2A}{1+sin2A} = \frac{1-tanA}{1+tanA}$ (f) $\frac{1-cos2A+sin2A}{1+cos2A+sin2A} = tanA$

(g) $\frac{sinA+sin2A}{1+cosA+cos2A} = tanA$ (h) $cos2A = \frac{cotA-tanA}{cotA+tanA}$

(i) $tan\alpha + cot\alpha = 2cosec2\alpha$ (j) $tan\theta + cot\theta = -2cosec2\theta$

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\cot\left(A+\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(A-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2cos2A}{1+sin2A}$

(b) $cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right) - sin^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right) = sin2B$

(c) $\tan\left(C+\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(C-\frac{\pi}{4}\right) = 2tan2C$

(d) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = 2sec2\alpha$

(e) $tan\left(\frac{\pi}{4}+B\right) = \frac{cos2B}{1-sin2B}$

(f) $\frac{1-tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1+tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = sin2\theta$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{1+sin2A}{1-sin2A} = \left(\frac{cotA+1}{cotA-1}\right)^2$

(b) $cos^2\theta + sin^2\theta\, cos2\beta = cos^2 2\beta + sin^2\beta\, cos2\theta$

(c) $(1+cos2\theta+sin2\theta)^2 = 4cos^2\theta(1+sin2\theta)$

(d) $(cos2\theta+1)(2cos\theta-1)(2cos\theta-1) = 2cos4\theta+1$

(e) $(cos2\theta+1)(2cos\theta-1)(2cos\theta-1)(2cos2\theta-1) = 2cos8\theta$

(f) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}} = 2cos\theta$

(g) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\sqrt{2+2\cos 8\theta}}}} = 2cos\theta$

(h) $sin^2\theta\ cos2\beta - sin^2\beta\ cos2\theta = cos^2\beta - cos^2\theta$

(i) $\frac{cos^3A+sin^3A}{cosA+sinA} = 1-\frac{1}{2}sin2A$

(j) $cos^6A + sin^6A = \frac{1}{4}(1+3cos^2 2A)$

7. (a) यदि $sin\theta = \frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $sin3\theta = \frac{1}{2}\left(p^3+\frac{1}{p^3}\right)$

(b) यदि $cos\theta = \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $cos3\theta = \frac{1}{2}\left(b^3+\frac{1}{b^3}\right)$

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $cos^3 20° + sin^3 10° = \frac{3}{4}(cos20° + sin10°)$

(b) $cot3A = \frac{cot^3A-3cotA}{3cot^2A-1}$

(c) $cos^3A\ cos3A + sin^3A\ sin3A = cos^3 2A$

(d) $4(cos^3 20° + sin^3 50°) = 3(cos20° + sin50°)$

(e) $tanA + \tan\left(\frac{\pi}{3}+A\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{3}-A\right) = 3tan3A$

9. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $sin^4A = \frac{1}{8}(3-4cos2A+cos4A)$

(b) $cos^4A = 3 + 4cos2A + cos4A$

(c) $cos5A = 16cos^5A - 20cos^3A + 5cosA$

(d) $sin5A = 16sin^5A - 20sin^3A + 5sinA$

10. *sine* र *cosine* का अपवर्त्यकोणहरूका सम्बन्धहरू प्रयोग गरी $sin18°, sin36°$ र $sin54°$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् । ती मानहरू प्रयोग गरी $cos18°, cos36°$ र $cos54°$ तथा $tan18°$, $tan36°$ र $tan54°$ का मानहरूसमेत पत्ता लगाई परीक्षण गरी एउटा प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् ।

5.2 अपवर्तक कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातहरू
(Trigonometric Ratios of Sub-multiple Angles)

कुनै कोण A का अपवर्तक कोणहरू के के हुन सक्छन् ? के $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}, \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{A}{n}, n \in N$, कोण A का अपवर्तक कोण हुन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

अपवर्त्य कोण $2A$ का $sine, cosine$ र $tangent$ का अनुपातहरूको सूची तयार पार्नुहोस् । त्यस्तै $sin3A, cos3A$ र $tan3A$ का सूत्रहरूसमेत छलफल गरी सूची बनाउनुहोस् ।

अपवर्त्य कोणहरू $sin2A, cos2A$ र $tan2A$ का सम्बन्धहरू प्रयोग गरी कोण A का त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई अपवर्तक कोण $\frac{A}{2}$ का रूपमा निम्नानुसार व्यक्त गर्न सकिन्छ :

हामीलाई थाहा छ,

$$sinA = sin2 \cdot \frac{A}{2}$$

$$= 2sin \cdot \frac{A}{2} cos\frac{A}{2}$$

यसैगरी,

$$cosA = cos2 \cdot \frac{A}{2}$$

$$= cos^2\frac{A}{2} - sin^2\frac{A}{2}$$

पुनः $cosA = cos2 \cdot \frac{A}{2}$

$$= 2cos^2\frac{A}{2} - 1$$

र $cosA = cos2 \cdot \frac{A}{2}$

$$= 1 - 2sin^2\frac{A}{2}$$

अब, $tanA = tan\, 2 \cdot \frac{A}{2}$

$$= \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

र $sinA = sin2 \cdot \frac{A}{2}$

$$= \frac{2tan\frac{A}{2}}{1+tan^2\frac{A}{2}}$$

र $cosA = cos2 \cdot \frac{A}{2} = \frac{1-tan^2\frac{A}{2}}{1+tan^2\frac{A}{2}}$

त्यैसगरी $sin3A, cos3A$ र $tan3A$ का सूत्रहरू प्रयोग गरी $sinA, cosA$ र $tanA$ लाई अपवर्तक कोण $\frac{A}{3}$ को रूपमा निम्नानुसार व्यक्त गर्न सकिन्छ :

$$sinA = sin3\cdot\frac{A}{3}$$
$$= 3sin\frac{A}{3} - 4sin^3\frac{A}{3}$$
$$cosA = cos3\cdot\frac{A}{3}$$
$$= 4\,cos^3\frac{A}{3} - 3cos\frac{A}{3}$$
र $tanA = tan3\cdot\frac{A}{3}$
$$= \frac{3\,tan\frac{A}{3} - tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3tan^2\frac{A}{3}}$$

माथि पत्ता लगाइएका सबै सम्बन्धहरूलाई मिश्रकोणका सम्बन्धहरू प्रयोग गरेर पनि प्रमाणित गर्न सकिन्छ, जस्तै :

$$sinA = \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right)$$
$$= sin\frac{A}{2}\ cos\frac{A}{2} + cos\frac{A}{2}\ sin\frac{A}{2}$$
$$= sin\frac{A}{2}\ cos\frac{A}{2} + sin\frac{A}{2} cos\frac{A}{2}$$
$$= 2sin\frac{A}{2}\ cos\frac{A}{2}$$
र $sinA = \sin\left(\frac{2A}{3} + \frac{A}{3}\right)$
$$= sin\frac{2A}{3}\cdot cos\frac{A}{3} + cos\frac{2A}{3}\cdot sin\frac{A}{3}$$
$$= 2sin\frac{A}{3}\cdot cos\frac{A}{3}\cdot cos\frac{A}{3} + \left(1 - 2sin^2\frac{A}{3}\right) sin\frac{A}{3}$$
$$= 2sin\frac{A}{3}\cdot cos^2\frac{A}{3} + \left(1 - 2sin^2\frac{A}{3}\right) sin\frac{A}{3}$$
$$= 2sin\frac{A}{3}\left(1 - sin^2\frac{A}{3}\right) + \left(1 - 2sin^2\frac{A}{3}\right) sin\frac{A}{3}$$
$$= 2sin\frac{A}{3} - 2sin^3\frac{A}{3} + sin\frac{A}{3} - 2sin^3\frac{A}{3}$$
$$= 3sin\frac{A}{3} - 4sin^3\frac{A}{3}.$$

बाँकी सम्बन्धहरू पनि यसै गरी स्थापित गर्नुहोस् ।

उदाहरणहरू

1. (a) यदि $tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$ भए $sin\theta, cos\theta$ र $tan\theta$को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $sin\frac{A}{3} = \frac{3}{5}$ भए $sinA$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(a) यहाँ, $tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$

अब, $sin\theta = \frac{2tan\frac{\theta}{2}}{1+tan^2\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \frac{\frac{6}{4}}{1+\frac{9}{16}}$

$= \frac{\frac{6}{4}}{\frac{25}{16}}$

$= \frac{24}{25}$

$$cos\theta = \frac{1 - tan^2\ \frac{\theta}{2}}{1 + tan^2\ \frac{\theta}{2}}$$

$= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}$

$= \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$

र $tan\theta = \frac{2tan\frac{\theta}{2}}{1-tan^2\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \frac{\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}}$

$= \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}}$

$= \frac{24}{7}$

(b) यहाँ, $sin\frac{A}{3} = \frac{3}{5}$

अब, $sinA = 3sin\frac{A}{3} - 4sin^3\frac{A}{3}$

$= 3 \times \frac{3}{5} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^3$

$= \frac{9}{5} - \frac{108}{125}$

$= \frac{225-108}{125}$

$= \frac{117}{125}$

2. यदि $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $sin15°$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

$A = 30°$ मानौं

तब, $\frac{A}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$ हुन्छ ।

अब, $cosA = 1 - 2sin^2\frac{A}{2}$

अथवा, $cos30° = 1 - 2sin^2 15°$

अथवा, $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2sin^2 15°$

अथवा, $2sin^2 15° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $2sin^2 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $sin^2 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

अथवा, $sin^2 15° = \frac{4-2\sqrt{3}}{8}$

अथवा, $sin^2 15° = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{8}$

अथवा, $sin^2 15° = \frac{(\sqrt{3})^2-2.\sqrt{3}.1+1^2}{8}$

अथवा, $(sin15°)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2$

$\therefore \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1+sin\theta-cos\theta}{1+sin\theta+cos\theta} = tan\frac{\theta}{2}$

समाधान

बायाँ पक्ष $= \frac{1+sin\theta-cos\theta}{1+sin\theta+cos\theta}$

$$= \frac{1+2sin\frac{\theta}{2}\,cos\frac{\theta}{2}-\left(1-2sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+2sin\frac{\theta}{2}\,cos\frac{\theta}{2}+2cos^2\frac{\theta}{2}\ \ -1}$$

$$= \frac{1+2sin\frac{\theta}{2}\,cos\frac{\theta}{2}-1+2sin^2\frac{\theta}{2}}{2sin\frac{\theta}{2}\ cos\frac{\theta}{2}+2cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2sin\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2}+sin\frac{\theta}{2}\right)}{2cos\frac{\theta}{2}(sin\frac{\theta}{2}+cos\frac{\theta}{2})}$$

$$= tan\frac{\theta}{2}$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

4. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right) = secA + tanA$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1+tan\frac{A}{2}}{1-1.\tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1+\frac{sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}}{1-\frac{sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}} = \frac{\frac{cos\frac{A}{2}+sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}}{\frac{cos\frac{A}{2}-sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{cos\frac{A}{2}+sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}-sin\frac{A}{2}} \times \frac{cos\frac{A}{2}+sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}+sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\left(cos\frac{A}{2}+sin\frac{A}{2}\ \right)^2}{cos^2\frac{A}{2}-sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{cos^2\frac{A}{2}+2Sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}+sin^2\frac{A}{2}}{cosA}$$

$$= \frac{1+2sin\frac{A}{2}\,cos\frac{A}{2}}{cosA}$$

$$= \frac{1+sinA}{cosA}$$

$$= \frac{1}{cosA} + \frac{sinA}{cosA}$$

$$= secA + tanA$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.2

1. (a) अपवर्तक भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (b) sinA, cosA र tanA का अनुपातहरू $\frac{A}{2}$ का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (c) $sinA, cosA$ र $tanA$ का अनुपातहरू $\frac{A}{3}$ का रूपमा के के हुन्छन्, लेख्नुहोस् ।

2. (a) यदि $tan\frac{\theta}{2} = \frac{4}{3}$ भए $sin\theta, cos\theta$ र $tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $cos\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ भए $cos\theta, sin\theta$ र $tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) यदि $sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ भए $sin\theta, cos\theta$ र $tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (d) यदि $sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए $sin\theta$ र $cos\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (e) यदि $cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $cos\theta, sin\theta$ र $tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (f) यदि $tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ भए $sin\theta, cos\theta$ र $tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (a) यदि $sin\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{2}$ भए $sin\alpha$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $cos\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए $cos\alpha$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) यदि $tan\frac{\theta}{3} = \frac{1}{5}$ भए $tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (d) यदि $sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right)$ भए $sin\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(e) यदि $cos\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)$ भए $cos\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) यदि $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(i) $cos15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(ii) $sin15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(iii) $tan15° = 2 - \sqrt{3}$

(b) यदि $cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(i) $sin22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(ii) $cos22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(iii) $tan22\frac{1}{2}° = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{sinA}{1+cosA} = tan\frac{A}{2}$

(b) $\frac{sinA}{1-cosA} = cot\frac{A}{2}$

(c) $1 + sinA = \left(sin\frac{A}{2} + cos\frac{A}{2}\right)^2$

(d) $1 - sinA = \left(cos\frac{A}{2} - sin\frac{A}{2}\right)^2$

(e) $\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha} = tan^2\frac{\alpha}{2}$

(f) $\frac{1+cos\theta+sin\theta}{1-cos\theta+sin\theta} = cot\frac{\theta}{2}$

(g) $cot\frac{A}{2} - tan\frac{A}{2} = 2cotA$

(h) $2cosec\theta = cot\frac{\theta}{2} + tan\frac{\theta}{2}$

(i) $\frac{cos^3\frac{\theta}{2} - sin^3\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2} - sin\frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{1}{2}sin\theta$

(j) $\frac{1-sec\alpha}{tan\alpha} = cot\frac{\alpha}{2}$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+sinA}{1-sinA}}$ (b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-sinA}{1+sinA}}$

(c) $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=2secA$ (d) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)=\frac{cosA}{1+sinA}$

(e) $\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2cosA}{1+sinA}$

5.3 त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको रूपान्तरण (Transformation of trigonometric Ratios)

मिश्रकोणका त्रिकोणमितीय अनुपातहरू यस प्रकार छन् :

$sinA\,cosB + cosA\,sinB = \sin(A+B)$ ……………………… (I)

$sinA\,cosB - cosA\,sinB = \sin(A-B)$ ……………………… (II)

$cosA\,cosB - sinA\,sinB = \cos(A+B)$ ……………………… (III)

र $cosA\,cosB + sinA\,sinB = \cos(A-B)$ ……………………… (IV)

समीकरण (I) र (II) जोड्दा,

$2sinA\,cosB = \sin(A+B)+\sin(A-B)$ ……………………… (V)

समीकरण (I) बाट (II) घटाउँदा,

$2cosA\,sinB = \sin(A+B)-\sin(A-B)$ ……………………… (VI)

समीकरण (III) र (IV) जोड्दा,

$2cosA\,cosB = \cos(A+B)+\cos(A-B)$ ……………………… (VII)

र समीकरण (III) बाट (IV) घटाउँदा,

$2sinA\,sinB = \cos(A-B)-\cos(A+B)$ ……………………… $(VIII)$

समीकरणहरू (V), (VI), (VII) र (VIII) ले *sine* र *cosine* का गुणनफलहरूलाई *sine* र *cosine* का योग वा अन्तरमा रूपान्तरण गर्दछन् । यी सम्बन्धहरू प्रयोग गरी *sine* र *cosine*का गुणनफलमा भएका सम्बन्धहरूलाई योग वा अन्तरमा रूपान्तरण गर्न सकिन्छ ।

माथिका सम्बन्धहरू (V), (VI), (VII) र (VIII) मा $A + B = C$

र $A - B = D$ प्रतिस्थापन गरी A र B लाई C र D का रूपमा $A=\frac{C+D}{2}$ र $B=\frac{C-D}{2}$ ले प्रतिस्थापन गर्दा निम्न सम्बन्धहरू प्राप्त हुन्छन् :

$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ …………….. (IX)

$$\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(X)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(XI)$$

र $$\cos D - \cos C = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(XII)$$

यी सम्बन्धहरू (IX), (X), (XI) र (XII) ले sine र cosine का योग वा अन्तरहरूलाई $sine$ वा $cosine$ को गुणनफलमा रूपान्तरण गर्दछन् । अतः $sine$ वा $cosine$का योग वा अन्तरमा भएका सम्बन्धहरूलाई यिनीहरूको गुणनफलमा व्यक्त गर्नुपर्दा यी सम्बन्धहरू प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

माथि स्थापित रूपान्तरणका सम्बन्धहरू विभिन्न त्रिकोणमितीय सर्वसमीकाहरू प्रमाणित गर्न महत्त्वपूर्ण मानिन्छन् ।

उदाहरणहरू

1. तलका sine र cosine का गुणनफलहरूलाई sine तथा cosine को योग वा अन्तरमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(a) $sin7Acos3A$ (b) $cos27°\ cos15°$ (c) $sin52°\ sin18°$

समाधान

(a) यहाँ, $sin7A\ cos3A$

$= \frac{1}{2}(2sin7A\ cos3A)$

$= \frac{1}{2}[\sin(7A+3A) + \sin(7A-3A)]$

$= \frac{1}{2}(sin10A + sin4A)$

(b) $cos27°\ cos15°$

$= \frac{1}{2}[2cos27°\ cos15°]$

$= \frac{1}{2}[\cos(27°+15°) + \cos(27°-15°)]$

$= \frac{1}{2}[cos42° + cos12°]$

(c) $sin52°\ sin18°$

$= \frac{1}{2}[2\ sin52°\ sin18°]$

$= \frac{1}{2}[\cos(52°-18°) - \cos(52°+18°)]$

$= \frac{1}{2}[cos34° - cos70°]$

2. **तलका योग वा अन्तरलाई गुणनफलका रूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।**

(a) $sin55° + sin25°$ (b) $cos3\theta - cos7\theta$

समाधान

(a) यहाँ, $sin55° + sin25°$

$= 2\sin\left(\frac{55°+25°}{2}\right)\cos\left(\frac{55°-25°}{2}\right)$

$= 2sin40°cos15°$

(b) $cos3\theta - cos7\theta$

$= 2\sin\left(\frac{7\theta+3\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{7\theta-3\theta}{2}\right)$

$= 2\ cos5\theta\ cos2\theta$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् : $cos15°sin75° = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= cos15°sin75°$

$= \frac{1}{2}[2cos15°sin75°]$

$= \frac{1}{2}[2sin75°cos15°]$

$= \frac{1}{2}[\sin(15° + 75°) - \sin(15° - 75°)]$

$= \frac{1}{2}[\sin 90° - \sin(-60°)]$

$= \frac{1}{2}[1 + \sin60°]$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right]$

$= \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

4. **प्रमाणित गर्नुहोस् :** $sinx \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{4}\ sin3x$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= sinx \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$$= sinx\frac{1}{2}\left[2sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{sinx}\left[\cos\left\{\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right\}-\cos\left\{\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{sinx}\left[\cos(-2\text{x})-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{sinx}\left[\cos 2\text{x}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{sinx sin2x}+\frac{1}{4}\text{sinx}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2\text{sinx sin2x})+\frac{1}{4}\ \text{sinx}$$

$$=\frac{1}{4}\ [\sin(\text{x}+2\text{x})+\ \sin(\text{x}-2\text{x})]+\frac{1}{4}\ \text{sinx}$$

$$=\frac{1}{4}\ [\sin 3\text{x}+\sin(-\text{x})]\ +\frac{1}{4}\ \text{sinx}$$

$$=\frac{1}{4}\ \sin 3\text{x}-\frac{1}{4}\text{sinx}\ +\frac{1}{4}\ \text{sinx}$$

$$=\frac{1}{4}\text{sin3x}$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

5. प्रमाणित गर्नुहोस् : $sin20°\ sin40°\ sin60°\ sin80° = \frac{3}{16}$

समाधान

बायाँ पक्ष $= sin20°\ sin40°\ sin60°\ sin80°$

$$= sin20°\ sin40°\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ sin80°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\ sin20°\ \frac{1}{2}\ 2sin40°\ sin80°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\ sin20°[\cos(40°-80°)-\cos(40°+80°)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ sin20°[\cos(40°) - \cos 120°]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ sin20°\left[\cos(40°) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ sin20°\ cos40° + \frac{\sqrt{3}}{8} sin20°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2}[2sin20°\ cos40°] + \frac{\sqrt{3}}{8} sin20°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin(20° + 40°) + sin(20° - 40°)] + \frac{\sqrt{3}}{8} sin20°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin 60° + \sin(-20°)] + \frac{\sqrt{3}}{8} sin20°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} sin20° + \frac{\sqrt{3}}{8} sin20°$$

$$= \frac{3}{16}$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

6. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{sin2A+sin5A-sinA}{cosA+cos2A+cos5A} = tan2A$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= \frac{sin2A+sin5A-sinA}{cosA+cos2A+cos5A}$

$$= \frac{sin2A + 2\cos\left(\frac{5A+A}{2}\right)\sin\left(\frac{5A-A}{2}\right)}{cos2A + 2\cos\left(\frac{5A+A}{2}\right)\cos\left(\frac{5A-A}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin2A + 2cos3Asin2A}{cos2A + 2\cos 3A \cos 2A}$$

$$= \frac{sin2A(1 + 2cos3A)}{cos2A(1 + 2\cos 3A)}$$

$$= \frac{sin2A}{cos2A} = tan2A$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

7. **प्रमाणित गर्नुहोस् :** $\frac{sin5A-sin7A+sin8A-sin4A}{cos4A-cos5A-cos8A+cos7A} = cot6A$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= \frac{sin5A-sin7A+sin8A-sin4A}{cos4A-cos5A-cos8A+cos7A}$

$$= \frac{(sin5A - sin7A) + (sin8A - sin4A)}{(cos7A - cos5A) + (cos4A + cos8A)}$$

$$= \frac{2cos\left(\frac{5A+7A}{2}\right)\sin\left(\frac{5A-7A}{2}\right) + 2cos\left(\frac{8A+4A}{2}\right)\sin\left(\frac{8A-4A}{2}\right)}{2sin\left(\frac{5A+7A}{2}\right)\sin\left(\frac{5A-7A}{2}\right) + 2sin\left(\frac{8A+4A}{2}\right)\sin\left(\frac{8A-4A}{2}\right)}$$

$$= \frac{cos6A\ sin(-A) + 2cos6A\ sin4A}{2si6A\ sin(-A) + 2sin6A\ sin2A}$$

$$= \frac{2cos6A\ (-sinA + \ sin2A)}{2sin6A\ (-sinA + \ sin2A)}$$

$$= \frac{cos6A}{sin6A}$$

$$= cot6A$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

8. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{sin^2A-sin^2B}{sinA\ cosA-\text{sinB}\ cosB} = \tan(A+B)$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= \frac{sin^2A-sin^2B}{sinA\ cosA-\text{sinB}\ cosB}$

$$= \frac{2sin^2A-2sin^2B}{2sinA\ cosA-2\text{sinB}\ cosB}$$

$$= \frac{(1-cos2A)-(1-cos2B)}{sin2A-sin2A} = \frac{cos2B-cos2A}{sin2A-sin2B}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{2A+2B}{2}\right)\sin\left(\frac{2A-2B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{2A+2B}{2}\right)\sin\left(\frac{2A-2B}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\cos(A+B)\sin(A-B)} = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$= \tan(A+B)$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.3

1. (a) $2cosAcosB$ लाई $cosine$ को योग वा अन्तरमा व्यक्त गर्नुहोस् ।
   (b) $2sin\alpha\, sin\beta$ लाई $cosine$ को योग वा अन्तरमा व्यक्त गर्नुहोस् ।
   (c) $2sinx\, cosy$ लाई $sine$ वा $cosine$ को गुणनफलका रूपमा लेख्नुहोस् ।
   (d) $sin\alpha + sin\beta$ लाई $sine$ वा $cosine$ को गुणनफलका रूपमा लेख्नुहोस् ।
   (e) $cosx - cosy$ लाई $sine$ वा $cosine$ को गुणनफलका रूपमा लेख्नुहोस् ।
   (f) $cosA + cosB$ लाई $sine$ वा $cosine$ को गुणनफलका रूपमा लेख्नुहोस् ।
   (g) $sinx - siny$ लाई $sine$ वा $cosine$ को गुणनफलका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

2. तलका योग वा अन्तरलाई गुणनफलका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(a) $sin50° + sin70°$ (b) $cos70° - cos40°$
(c) $cos70° - cos40°$ (d) $sin100° - sin50°$
(e) $sin150° + sin140°$ (f) $sin46° - sin20°$
(g) $sin84° - sin116°$ (h) $cos46° - cos20°$
(i) $cos110° + cos130°$ (j) $sin5\theta - sin7\theta$
(k) $sin5A + sin7A$ (l) $cosA + cos7A$
(m) $sin5x - sin3x$ (n) $sin3\alpha - sin\alpha$
(o) $cos5x + cos3x$ (p) $cos7\theta - cos11\theta$

3. तल दिइएका गुणनफललाई $sine$ वा $cosine$ को योग वा अन्तरमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(a) $sin50°\, cos32°$ (b) $cos72°\, sin43°$
(c) $cos61°\, cos39°$ (d) $sin61°\, sin39°$
(e) $sin36° sin24°$ (f) $sin51°\, sin10°$
(g) $cos22°\, sin50°$ (h) $cos140°\, sin40°$
(i) $2sin5\theta\, cos2\theta$ (j) $2sin2x\, cosx$
(k) $2sin9\theta\, cos7\theta$ (l) $2cos11\theta\, cos3\theta$
(m) $2cos9\theta\, cos5\theta$ (n) $cos5\alpha\, sin3\alpha$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $sin15°\, sin45° = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ (b) $cos45°\, cos15° = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$
(c) $sin105°\, cos15° = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$ (d) $cos75°\, cos105° = \frac{1}{4}$

(e) $sin15° \, cos105° = \frac{1}{4}$ (f) $2cos105° \, cos15° = -\frac{1}{2}$

(g) $2sin75° \, sin45° = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (h) $tan55° - tan35° = 2tan20°$

(i) $tan50° - tan40° = 2tan10°$ (j) $tan70° - tan20° = 2tan50°$

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $cos\theta \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{1}{4} \, cos3\theta$

(b) $2sin\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \, sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = cos2A$

(c) $sin\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \, cos\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = 1 + sin2A$

(d) $sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{2}\right) \, sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right) = 2secA$

(e) $cosec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \, cosec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2sec2\theta$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $sin20° \, sin40° sin80° = \frac{\sqrt{3}}{8}$

(b) $cos20° \, cos40° \, cos80° = \frac{1}{8}$

(c) $cos20° cos30° cos40° \, cos80° = \frac{\sqrt{3}}{16}$

(d) $sin20° \, sin30° sin40° \, sin80° = \frac{\sqrt{3}}{16}$

(e) $sin10° \, sin50° sin60° \, sin70° = \frac{\sqrt{3}}{16}$

(f) $cos20° cos40° cos60° \, cos80° = \frac{1}{16}$

(g) $8cos80° cos140° \, cos160° = 1$

(h) $cos10° cos30° cos50° \, cos70° = \frac{3}{16}$

(i) $sin70° \, sin130° sin170° = \frac{1}{8}$

7. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{sin5x - sin3x}{cos5x + cos3x} = \tan 4x$ (b) $\frac{sin3A - sinA}{cosA - cos3A} = \cot 2A$

(c) $\frac{sin2A + sin2B}{cos2A + cos2B} = \tan(A + B)$ (d) $\frac{cos10° - sin10°}{cos10° + sin10°} = \tan 35°$

(e) $\frac{cos75°+cos15°}{sin75°-sin15°} = \sqrt{3}$ (f) $\frac{cos3A-cos2A+cosA}{sin3A-sin2A+sinA}$=cot2A

(g) $\frac{\sin(A+B)-2sinA+\sin(A-B)}{\cos(A+B)-2cosA+\cos(A-B}$ = tanA (h) $\frac{sin2\theta+sin5\theta-sin\theta}{cos\theta+cos2\theta+cos5\theta} = \tan 2\theta$

(i) $\frac{cos80°+cos20°}{sin80°-sin20°} = \sqrt{3}$ (j) $\frac{sin75°+sin15°}{cos75°+cos15°} = 1$

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{sin\theta-sin3\theta+sin5\theta-sin7\theta}{cos\theta-cos3\theta-cos5\theta+cos7\theta} = \cot 2\theta$

(b) $\frac{sin5°-sin15°+sin25°-sin35°}{cos5°-cos15°-cos25°+cos35°} = cot10°$

(c) $\frac{1-cos10°+cos40°-cos50°}{1+cos10°-cos40°-cos50°} = tan5°cot20°$

(d) $\frac{1-cosA+cosB-\cos(A+B)}{1+cosA-cosB-cos(A-B)} = \tan\frac{A}{2} tan\frac{B}{2}$

9. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\mathrm{Sin}B\cos B} = \tan(A+B)$ (b) $\frac{\cos^2 A+\sin^2 B}{\sin A\cos A+\mathrm{Sin}B\cos B} = \cot(A+B)$

5.4 अनुबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिका (Conditional Trigonometric Identities)

तल दिइएका दुई ओटा सर्वसमिकाहरू अवलोकन गर्नुहोस् ।

(i) $sin^2A + cos^2A = 1$ (ii) $sinA = cosB$

के सर्वसमिका (i) A को जुनसुकै मानका लागि स्वीकार्य छ ? के जुनसुकै A र B को मानले सर्वसमिका (ii) मान्य हुन्छ त ? अवश्य पनि सर्वसमिका (i) A को जुनसुकै मानका लागि मान्य हुन्छ । तर सर्वसमिका (ii) सत्य हुनका लागि $A + B = \frac{\pi}{2}$ हुनै पर्छ अर्थात् $A + B = \frac{\pi}{2}$ हुने जुनसुकै A र B का मानको लागि सर्वसमिका (ii) मान्य हुन्छ । यसैले सर्वसमिका (ii) लाई सर्तसहितको वा अनुबन्धित सर्वसमिका भन्न सकिन्छ । अतः निश्चित सर्तका आधारमा मात्र सत्य हुने त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाहरूलाई नै अनुबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिका भनिन्छ । सर्तहरू समस्याका आधारमा फरक फरक हुन सक्छन् । यस पाठमा हामी त्रिभुजका भित्री कोणहरू A, B र C बाट बन्ने सर्त $A + B + C = \pi$ लिएर तत्सम्बन्धी

विभिन्न त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाहरू प्रमाणित गर्ने छौँ । अब, $A + B + C = \pi$ बाट बन्न सक्ने विभिन्न सम्बन्धहरू के के हुन सक्छन् छलफल गरौँ । त्यस्ता केही सम्बन्धहरू तल दिइएको छ ।

$A + B + C = \pi$

अथवा,
$A + B = \pi - C$; $B + C = \pi - A$ र $C + A = \pi - B$

त्यस्तै,
$A + B + C = \pi$

अथवा, $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$

अथवा, $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$; $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ र $\frac{C}{2} + \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$

र $A + B + C = \pi$

अथवा, $2(A + B + C) = 2\pi$

अथवा, $2A + 2B = 2\pi - 2C$; $2B + 2C = 2\pi - 2A$ र $2C + 2A = 2\pi - 2B$

माथिका सम्बन्धहरूमा sine, cosine र tangent लिँदा हुन सक्ने सम्बन्धहरूको सूची बनाउनुहोस् ।

उदाहरणहरू

1. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$cos2A + cos2B + cos2C = -[1 + 4cosA\, cosB\, cosC]$

समाधान

यहाँ, $A + B + C = \pi$

अथवा, $A + B = \pi - C$

$\therefore \sin(A + B) = \sin(\pi - C) = sinC$

र $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -cosC$

अब, बायाँ पक्ष $= cos2A + cos2B + cos2C$

$= 2cos\frac{(2A+2B)}{2} \cdot cos\frac{(2A-2B)}{2} + cos2C$

$= 2\cos(A + B) \cdot \cos(A - B) + cos2C$

$= -2\cos C \cos(A - B) + 2cos^2C - 1$

$= -2\cos C[\cos(A - B) - cosC] - 1$

$= -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] - 1$

$= -2\cos C[\cos A\cos B + \sin A\sin B + \cos A\cos B - \sin A\sin B] - 1$

$= -2\cos C[2\cos A\cos B] - 1$

$= -4cosA\ cosB\ cosC - 1$

$= -[1 + 4cosA\ cosB\ cosC$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

2. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$sinA + sinB - sinC = 4sin\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ cos\frac{C}{2}$

समाधान

यहाँ, $A + B + C = \pi$

अथवा, $A + B = \pi - C$

अथवा, $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi-C}{2}$

$\therefore \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) = cos\frac{C}{2}$

र $\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) = sin\frac{C}{2}$

अब, बायाँ पक्ष $= sinA + sinB - sinC$

$= 2sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right) - 2sin\frac{C}{2}cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\ cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right) - 2sin\frac{C}{2}cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left[cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right) - sin\frac{C}{2}\right]$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left[cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right) - cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right]$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) - \left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\right]$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} - \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$

$= 2\cos\frac{C}{2}2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

3. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$cos^2A + cos^2B + cos^2C = 1 - 2cosA\, cosB\, cosC$

समाधान

यहाँ, $A + B + C = \pi$

अथवा, $A + B = \pi - C$

$\therefore \sin(A + B) = \sin(\pi - C) = sinC$

र $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -cosC$

अब, बायाँ पक्ष $= cos^2A + cos^2B + cos^2C$

$= \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B] + cos^2C$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + cos^2C$

$= 1 + \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2A+2B}{2}\right) cos\left(\frac{2A-2B}{2}\right)\right] + cos^2C$

$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + cos^2C$

$= 1 - \cos C\ \cos(A - B) + cos^2C$

$= 1 - \cos C\,[\cos(A - B) - cosC]$

$= 1 - \cos C\,[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

$= 1 - \cos C\left[2\cos C\left(\frac{A-B+A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B-A-B}{2}\right)\right]$

$= 1 - 2cosC\, cosA \cos(-B)$

$= 1 - 2cosA\, cosB\, cosC$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

4. यदि $A + B + C = 180°$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$

समाधान

यहाँ, $A + B + C = 180°$

अथवा, $A + B = 180° - C$

अथवा, $\frac{A+B}{2} = \frac{180°-C}{2} = 90° - \frac{C}{2}$

$\therefore \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$

र $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

अब, बायाँ पक्ष $= \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}[1 - \cos A + 1 - \cos B] - \sin^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}[\cos A + \cos B] - sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2}\left[2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right] - sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - sin\frac{C}{2}cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - sin\frac{C}{2}\left[cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + sin\frac{C}{2}\right]$

$= 1 - sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right]$

$= 1 - sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$

$= 1 - sin\frac{C}{2}\cdot 2\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$= 1 - 2cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

5. यदि A, B र C त्रिभुज ABC का शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् :

$tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2} - tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2} + tan\frac{C}{2}tan\frac{A}{2} = 1$

समाधान

यहाँ, $A + B + C = \pi$

अथवा, $A + B = \pi - C$

अथवा, $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi-C}{2}$

$\therefore \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$

अथवा, $\frac{\tan\frac{A}{2} + tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2}$

अथवा, $\frac{\tan\frac{A}{2}+tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

अथवा, $tan\frac{C}{2}tan\frac{A}{2} + tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2} = 1 - tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}$

अथवा, $tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2} + tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2} + tan\frac{C}{2}tan\frac{A}{2} = 1$ प्रमाणित भयो ।

6. यदि A + B + C = π भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} + cos\frac{C}{2} = 4\cos\left(\frac{A+B}{4}\right)cos\left(\frac{B+C}{4}\right)cos\left(\frac{C+A}{4}\right)$$

समाधान

यहाँ, $A + B + C = \pi$

अथवा, $A + B = \pi - C$

$B + C = \pi - A$

$C + A = \pi - B$

अब, बायाँ पक्ष $cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} + cos\frac{C}{2}$

अथवा, $= 2\cos\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A}{2}-\frac{B}{2}}{2}\right) + cos\frac{c}{2} + cos\frac{\pi}{2}$ $\left[\therefore cos\frac{\pi}{2} = 0\right]$

$$= 2\cos\left(\frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{A-B}{4}\right) + 2cos\left(\frac{\frac{c}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}\right)cos\left(\frac{\frac{c}{2}-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{A-B}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{C+\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{C-\pi}{4}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\cos\left(\frac{A-B}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{C+\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi+C}{4}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\left[2\cos\left(\frac{\frac{A-B}{4}+\frac{\pi+C}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A-B}{4}-\frac{\pi+C}{4}}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\left[2\cos\left(\frac{A-B+\pi+C}{8}\right)\cos\left(\frac{A-B-\pi-C}{8}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\left[2\cos\left(\frac{A-B+A+B+c+C}{8}\right)\cos\left(\frac{A-B-A-B-C-C}{8}\right)\right]$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\cos\left(\frac{2(A+C)}{8}\right)\cos\left(\frac{2(B+C)}{8}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{A+B}{4}\right)cos\left(\frac{B+C}{4}\right)cos\left(\frac{C+A}{4}\right)$$

= दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

अभ्यास : 5.4

1. अनुबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिका भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
2. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

   (a) $sin2A + sin2B + sin2C = 4sinA\, sinB\, sinC$

   (b) $sin2A + sin2B - sin2C = 4cosA\, cosB\, sinC$

   (c) $cos2A - cos2B + cos2C = 1 - 4sinA\, cosB\, sinC$

   (d) $cos2A + cos2B - cos2C = 1 - 4sinA\, sinB\, cosC$

   (e) $sin2A - sin2B - sin2C = -4sinA\, cosB\, cosC$

   (f) $cos2A - cos2B - cos2C = 4cosA\, sinB\, sinC - 1$
3. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

   (a) $sinA + sinB + sinC = 4cos\frac{A}{2}\, cos\frac{B}{2}\, cos\frac{C}{2}$

   (b) $cosA + cosB + cosC = 1 + 4sin\frac{A}{2}\, sin\frac{B}{2}\, sin\frac{C}{2}$

   (c) $cosA + cosB - cosC = 4cos\frac{A}{2}\, cos\frac{B}{2}\, sin\frac{C}{2} - 1$

   (d) $cosB + cosC - cosA = 4sin\frac{A}{2}\, cos\frac{B}{2}\, cos\frac{C}{2} - 1$

   (e) $sinA - sinB + sinC = 4sin\frac{A}{2}\, cos\frac{B}{2}\, sin\frac{C}{2}$

   (f) $sinA - sinB - sinC = 4cos\frac{A}{2}\, cos\frac{B}{2}\, sin\frac{C}{2}$
4. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

   (a) $cos^2A + cos^2B - cos^2C = 1 - 2sinA\, sinB\, cosC$

   (b) $sin^2A + sin^2B + sin^2C = 2 + 2cosA\, cosB\, cosC$

   (c) $sin^2A - sin^2B + sin^2C = 2sinA\, cosB\, sinC$

   (d) $cos^2A + cos^2B - sin^2C = -2cosA\, cosB\, cosC$

   (e) $sin^2A - sin^2B - sin^2C = -2cosA\, sinB\, sinC$
5. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

   (a) $sin^2\frac{A}{2} + sin^2\frac{B}{2} - sin^2\frac{C}{2} = 1 - sin\frac{A}{2}\, sin\frac{B}{2}\, sin\frac{C}{2}$

   (b) $cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} + cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2sin\frac{A}{2}\, sin\frac{B}{2}\, sin\frac{C}{2}$

   (c) $cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} - cos^2\frac{C}{2} = 2cos\frac{A}{2}\, cos\frac{B}{2}\, sin\frac{C}{2}$

   (d) $sin^2\frac{A}{2} - sin^2\frac{B}{2} + sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2cos\frac{A}{2}\, sin\frac{B}{2}\, cos\frac{C}{2}$

(e) $sin^2\frac{A}{2} + sin^2\frac{B}{2} - sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2cos\frac{A}{2}\ cos\frac{B}{2}\ sin\frac{C}{2}$

(f) $cos^2\frac{A}{2} - cos^2\frac{B}{2} + cos^2\frac{C}{2} = 2cos\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ cos\frac{C}{2}$

6. यदि A + B + C = 180° भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2} = cot\frac{A}{2} + cot\frac{B}{2} + cot\frac{C}{2}$

(b) $tanA + tanB + tanC = tanA\ tanB\ tanC$

(c) $cotA\ cotB + cotB\ cotC + cotC\ cotA = 1$

(d) $tan2A + tan2B + tan2C = tan2A\ tan2B\ tan2C$

7. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\left(\frac{\pi-A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-B}{4}\right)\ sin\left(\frac{\pi-C}{4}\right)$

(b) $sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\sin\left(\frac{B+C}{4}\right)\ sin\left(\frac{C+A}{4}\right)$

(c) $cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} + cos\frac{C}{2} = 4\cos\left(\frac{\pi-A}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-B}{4}\right)cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)$

8. यदि $A + B + C = \pi$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{sin2A+sin2B+sin2c}{sinA+sinB+sinC} = 8sin\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{C}{2}$

(b) $\frac{sinB+sinC-sinA}{sinA+sinB+sinC} = tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

5.5 त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometric Equation)

तलका समीकरणहरू अवलोकन गर्नुहोस् ।

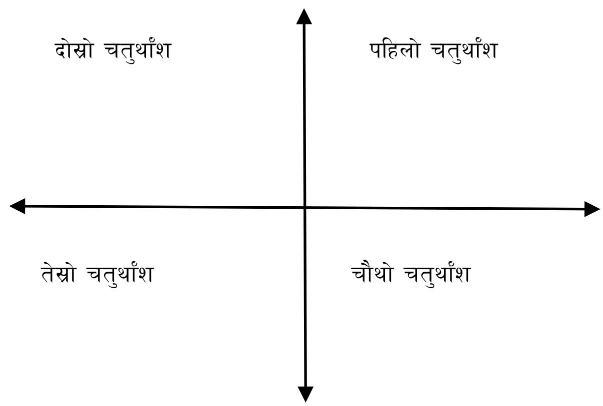
(i) $sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sqrt{2}\,sin\theta - cos\theta = 1$

(iii) $2sin^2\theta + 3cos\theta = 3$

के माथिका सबै समीकरणहरू त्रिकोणमितीय समीकरणहरू हुन्, किन ? समीकरण (i) र (ii) मा के फरक छ, छुट्याउनुहोस् ।

यसरी त्रिकोणमितीय अनुपातहरू प्रयोग गरी बनाइएका समीकरणहरूलाई त्रिकोणमितीय समीकरण भनिन्छ ।

तलको चित्र अवलोकन गर्नुहोस् ।



यी प्रत्येक चतुर्थाँशहरूमा कति डिग्रीदेखि कति डिग्रीसम्मका कोणहरू पर्दछन् ? $sine, cosine$ र $tangent$ का मानहरू कुन कुन चतुर्थाँशहरूमा धनात्मक र कुन कुन चतुर्थाँशहरूमा ऋणात्मक हुन्छन् ? छलफल गरी पहिलो चतुर्थाँशहरूमा पर्ने विशिष्टकोणहरू $0°, 30°, 45°$ र $60°$ का $sine, cosine$ र $tangent$ का मानहरू कति कति हुन्छन् ? सूची बनाउनुहोस् ।

यदि $0° \leq \theta \leq 360°$ छ भने तलका प्रत्येक अवस्थामा θ का सम्भाव्य मानहरू कति कति डिग्री हुन्छन्, बताउनुहोस् ।

(i) $sin\theta = 0$ (ii) $cos\theta = 0$ (iii) $tan\theta = 0$

(iv) $sin\theta = 1$ (v) $cos\theta = -1$ (vi) $sin\theta = -1$

(vii) $cos\theta = 1$

यदि $0° \leq \theta \leq 90°$ मा θ को मान थाहा छ भने θ को $0°$ देखि $360°$ सम्मका अन्य मानहरू पत्ता लगाउन प्रयोग गरिने सम्बन्धहरू के हुन सक्छन् ? छलफल गरी तलका प्रत्येक अवस्थामा प्राप्त गर्न सकिने त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको सूची बनाउनुहोस् ।

$\sin(180° + \theta)$ $\sin(180° - \theta)$ $\cos(180° + \theta)$

$\cos(180° - \theta)$ $\tan(180° + \theta)$ $\tan(180° - \theta)$

$\sin(360° - \theta)$ $\cos(360° - \theta)$ र $\tan(360° - \theta)$

के तपाईंहरूले $sin\theta$ र $cos\theta$ ले दिन सक्ने सबैभन्दा सानो र सबैभन्दा ठुलो मानका बारेमा अनुमान गर्नुभएको छ ? अर्थात् $x \leq sin\theta \leq y$ छ भने x र y को सम्बन्धित मान खोज्नुहोस् । के $x = -1$ र $y = 1$ हो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरणहरू

1. हल गर्नुहोस् : $tan\theta - \sqrt{3} = 0 \quad (0° \le \theta \le 90°)$

समाधान

यहाँ , $tan\theta - \sqrt{3} = 0$

अथवा, $tan\theta = \sqrt{3}$

अथवा, $tan\theta = tan60°$

$\therefore \theta = 60°$

2. हल गर्नुहोस् : $2sin\theta + \sqrt{3} = 0 \quad (0 \le \theta \le 360°)$

समाधान

यहाँ , $2sin\theta + \sqrt{3} = 0$

अथवा, $2sin\theta = -\sqrt{3}$

अथवा, $sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $sin\theta = \sin(180° + 60°)$ र $\sin(360° - 60°)$

अथवा, $sin\theta = \sin 240°$ र $\sin 300°$

अथवा, $\theta = 240°$ र $300°$

3. हल गर्नुहोस् : $cot^2x + cosec^2x = 3 \quad 0 \le x \le 180°$

समाधान

यहाँ, $cot^2x + cosec^2x = 3$

अथवा, $cot^2x + 1 + cot^2x = 3$

अथवा, $2cot^2x - 2 = 0$

अथवा, $2(cot^2x - 1) = 0$

अथवा, $(cotx - 1)(cotx + 1) = 0$

यदि, $cotx - 1 = 0$ भए

अथवा, $cotx = 1$

अथवा, $cotx = cot45°$

$\therefore x = 45°$

र यदि $cotx + 1 = 0$ भए

अथवा, $cotx = -1$

अथवा, $cotx = \cot(180° - 45°)$

अथवा, $cotx = \cot 135°$

$\therefore x = 45°$ र $135°$

4. हल गर्नुहोस् :

(a) $\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{3}(0° \leq x \leq 360°)$

(b) $\sqrt{3}sin\theta - cos\theta = 1$ $(0° \leq \theta \leq 360°)$

समाधान

(a) यहाँ, $\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{3}$

अब, यो समीकरणलाई दुवैतर्फ 2 ले भाग गर्दा

$\frac{\sqrt{3}cosx+sinx}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $sin60°\, cosx + cos60°\, sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $\sin(60° + x) = sin60°$ र $\sin(180° - 60°)$

अथवा, $\sin(60° + x) = sin60°$ र $\sin 120°$

अथवा, $60° + x = 60°$ र $60° + x = 120°$

अथवा, $x = 0°$ र $x = 60°$

$\therefore x = 0°$ र $x = 60°$

(b) यहाँ, $\sqrt{3}\, sin\theta - cos\theta = 1$

अथवा, $\sqrt{3}\, sin\theta = 1 + cos\theta$

अथवा, $(\sqrt{3}\, sin\theta)^2 = (1 + cos\theta)^2$

अथवा, $3sin^2\theta = 1 + 2cos\theta + cos^2\theta$

अथवा, $3(1 - cos^2\theta) = 1 + 2cos\theta + cos^2\theta$

अथवा, $3 - 3cos^2\theta = 1 + 2cos\theta + cos^2\theta$

अथवा, $-4cos^2\theta - 2cos\theta + 2 = 0$

अथवा, $-2(2cos^2\theta + cos\theta - 1) = 0$

अथवा, $2cos^2\theta + cos\theta - 1 = 0$

अथवा, $2cos^2\theta + 2cos\theta - cos\theta - 1 = 0$

अथवा, $2cos\theta(cos\theta + 1) - 1(cos\theta + 1) = 0$

अथवा, $(cos\theta + 1)(2cos\theta - 1) = 0$

यदि $cos\theta + 1 = 0$ भए

अथवा, $cos\theta = -1$

अथवा, $cos\theta = cos(180° + 0°)$ र $cos(180° - 0°)$

अथवा, $cos\theta = cos180°$ र $cos180°$

$\therefore \theta = 180°$

र यदि $2cos\theta - 1 = 0$ भए

अथवा, $2cos\theta = 1$

अथवा, $cos\theta = \frac{1}{2}$

अथवा, $cos\theta = cos60°$ र $\cos(360° - 60°)$

अथवा, $cos\theta = cos60°$ र $cos300°$

$\therefore \theta = 60°$ र $300°$

दिइएको समीकरणमा $\theta = 180°, 60°$ र $300°$ ले जाँच्दा,

$\sqrt{3}\, sin180° - cos180° = 1$

अथवा, $\sqrt{3} \times 0 - (-1) = 1$

अथवा,$1 = 1$ ठिक छ ।

त्यस्तै, $\sqrt{3}\, sin60° - cos60° = 1$

अथवा, $\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$

अथवा, $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

अथवा, $1 = 1$ ठिक छ ।

र $\sqrt{3}\, sin300° - cos300° = 1$

अथवा, $\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

अथवा, $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

अथवा, $-\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}) = 1$ मान्य छैन ।

अतः $\theta = 60°$ र $180°$

5. हल गर्नुहोस् : $cos3\theta - cos5\theta = sin\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 360°)$

समाधान

यहाँ, $cos3\theta - cos5\theta = sin\theta$

अथवा, $2\sin\left(\frac{5\theta+3\theta}{2}\right) sin\left(\frac{5\theta-3\theta}{2}\right) = sin\theta$

अथवा, $2\sin4\theta\ sin\theta - sin\theta = 0$

अथवा, $\sin\theta\ (2sin4\theta - 1) = 0$

यदि $\sin\theta = 0$ भए

अथवा, $\sin\theta\ = sin0°$

$\therefore \theta = 0°$

र यदि $2\sin4\theta - 1 = 0$ भए

अथवा, $2\sin4\theta\ = 1$

अथवा, $\sin4\theta\ = \frac{1}{2}$

अथवा, $sin4\theta =\ sin30°$ र $\sin(180° - 30°)$

अथवा, $sin4\theta =\ sin30°$ र $\sin 150°$

$\therefore 4\theta = 30°$ र $150°$

अथवा, $\theta = \frac{30°}{4}$ र $\frac{150°}{4}$

अथवा, $\theta = 7.5°$ र $37.5°$

$\therefore\ \theta = 7.5°$ र $37.5°$

अभ्यास 5.5

1. हल गर्नुहोस् : $0 \leq \theta \leq 90°$

(a) $sin\theta = \frac{1}{2}$

(b) $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sqrt{3}tan\theta = 1$

(d) $sec\theta = 2$

(e) $cosec\theta = \sqrt{2}$

(f) $cot\theta = \sqrt{3}$

(g) $2sin\theta - \sqrt{3} = 0$

(h) $cos\theta = 0$

(i) $cos\theta = 1$

(j) $sin\theta = 1$

2. हल गर्नुहोस् : $0 \leq \theta \leq 360°$

(a) $2cos\theta - 1 = 0$

(b) $\sqrt{3}tan\theta + 1 = 0$

(c) $\sqrt{2}sec\theta + 2 = 0$

(d) $sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

(e) $cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

(f) $tan\theta - \sqrt{3} = 0$

(g) $\sqrt{3}cosec\theta + 2 = 0$

(h) $3cot\theta - \sqrt{3} = 0$

(i) $2sin\theta + 1 = 0$

(j) $2cos\theta + 1 = 0$

3. हल गर्नुहोस् : $0 \leq x \leq 180°$

(a) $tanx - sinx = 0$

(b) $tanx + cotx = 2$

(c) $6\sin^2 x + cosx = 5$

(d) $7\sin^2 x + 3cos^2 x - 4 = 0$

(e) $2cos^2 x - 2sinx = \frac{1}{2}$

(f) $6\sin^2 x + 4cos^2 x = 5$

(g) $4\sec^2 x - 7tan^2 x = 3$

(h) $\text{cosec}x - 2sinx = 1$

(i) $\tan^2 x - 3secx + 3 = 0$

(j) $sin3x + cos3x = \frac{1}{2}$

4. हल गर्नुहोस् : $0 \leq x \leq 360°$

(a) $sinx + cosx = \sqrt{2}$

(b) $sinx + cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $sinx + cosx = 1$

(d) $\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{3}$

(e) $cosx + \frac{1}{\sqrt{3}}sinx = 1$

(f) $cosx - \sqrt{3}sinx = 1$

(g) $sinx + \sqrt{3}cosx = \sqrt{2}$

(h) $\cos x + \sqrt{3}sinx = 2$

(i) $\sqrt{3}sinx + cosx = 1$

(j) $\sqrt{3}sinx - cosx = \sqrt{2}$

5. हल गर्नुहोस् : $0 \leq \theta \leq 360°$

(a) $sin3\theta + sin2\theta - sin\theta = 0$

(b) $sin4\theta + sin2\theta = 0$

(c) $cos4\theta + cos2\theta = 0$

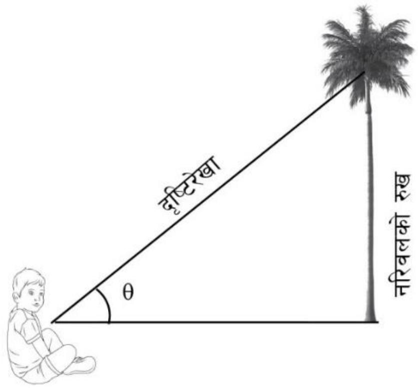
(d) $cos\theta - cos3\theta = sin2\theta$

(e) $cos\theta + cos3\theta = 2cos2\theta$

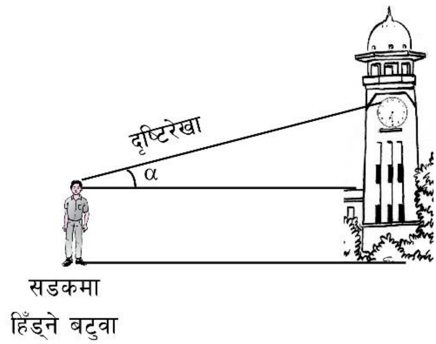
(f) $cos\theta + cos3\theta = -cos5\theta$

5.6 उचाइ र दुरी (Height and Distance)

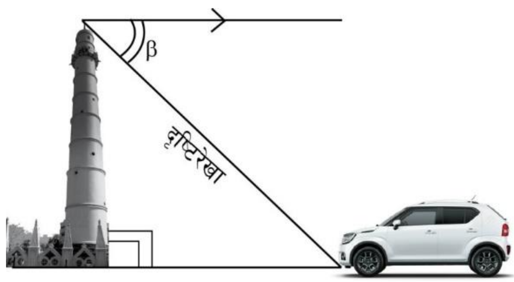
तलका चित्रहरू अवलोकन गर्नुहोस् ।



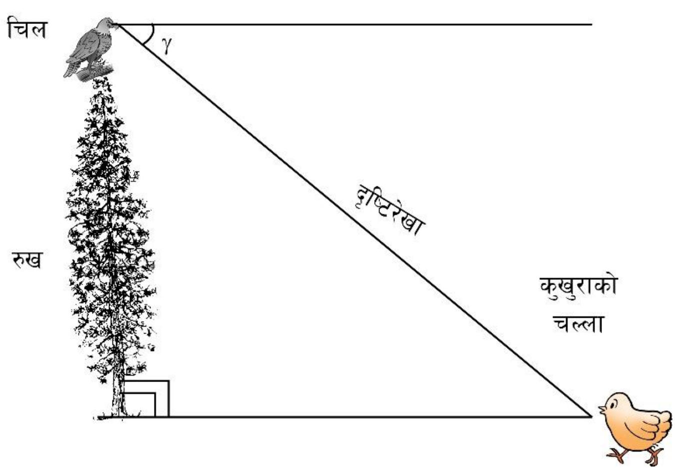
चित्र 5.6.1



चित्र 5.6.2



चित्र 5.6.3



चित्र 5.6.4

माथि दिइएका कोणहरू θ र α तथा β र γ का बारेमा छलफल गर्नुहोस् । तिनीहरूबिच के के समानता र असमानता छन् ? यस्ता अवस्थाहरूसँग मेल खान जाने अन्य दुई दुई ओटा उदाहरणहरू खोज्नुहोस् ।

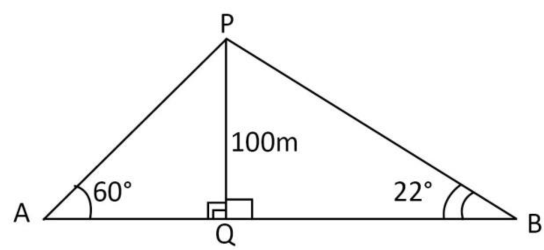
चित्र 5.6.1 र 5.6.2 मा दिइएका कोणहरू उन्नतांश कोणहरू हुन भने चित्र 5.6.3 र 5.6.4 मा दिइएका कोणहरू अवनतिकोणहरू हुन् । यसबाट उन्नतांश कोणहरू (angle of elevation) र अवनतिकोण (angle of depression) परिभाषित गर्नुहोस् ।

हामीले माथि दिइएका कोणहरू र समकोणी त्रिभुजको चित्राङ्कनद्वारा विभिन्न उचाइ र दुरी सम्बन्धी व्यावहारिक समस्याहरूको समाधान गर्न सक्छौँ । यस पाठमा एक पटकमा दुई ओटा कोणहरू मात्र समावेश गरिएका छन् अर्थात दुई ओटा उन्नतांश कोण, दुई ओटा अवनति कोण वा एउटा अवनति र अर्को उन्नतांश कोण समावेश गरी निर्माण गर्न सकिने सामान्य उचाइ र दुरी सम्बन्धी समस्याहरूको समाधानका केही उपायहरू प्रस्तुत गरिएका छन् ।

आधारभूत त्रिकोणमितीय अनुपातहरू sine, cosine र tangent तथा विशेषत tangent को प्रयोग गरी इन्जिनियरिङलगायत अन्य क्षेत्रहरूमा प्रयोग हुने उचाइ र दुरी सम्बन्धी विभिन्न समस्याहरूको व्यावहारिक समाधान धेरै समय अघिदेखि प्रचलनमा छ ।

उदाहरणहरू

1. एउटा 100m अग्लो धरहराको टुप्पोलाई सम्मुख पारेर एकै समतलमा रहेका धरहराको दुवैतिर रहेका दुई बिन्दुहरू A र B बाट हेर्दा उन्नतांश कोणहरू 60° र 22° पाइएछन् भने ती दुई स्थानबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ, PQ = 100m उचाइ भएको धरहराको टुप्पो P लाई धरहराका विपरीत दिशाका स्थानहरू A र B बाट हेर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः $\measuredangle PAQ = 60°$ र $\measuredangle PBQ = 22°$ बनेका छन् ।

दुई स्थानहरू A र B बिचको दुरी (AB)= ?

अब, समकोणी ΔPQA मा,

$$tan60° = \frac{PQ}{AQ}$$

अथवा, $\sqrt{3} = \frac{100}{AQ}$

अथवा, $AQ = \frac{100}{\sqrt{3}}$

अथवा, $AQ = 57.74m$

त्यस्तै, समकोणी ΔPQB मा

$$tan22° = \frac{PQ}{BQ}$$

अथवा, $0.404 = \frac{100}{BQ}$

अथवा, $BQ = \frac{100}{0.404}$

अथवा, $BQ = 247.52m$

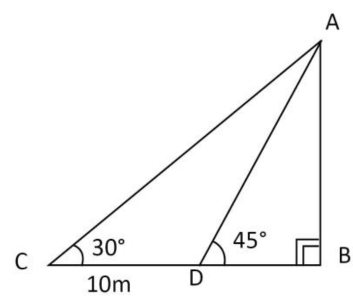
फेरि, $AB = AQ + BQ = 57.74 + 247.52 = 305.26m$

अतः दुई स्थानहरूबिचको दुरी $305.26m$ रहेछ ।

2. एउटा घरको छतलाई घरको समतलमा रही एकैतिर परेका दुई स्थानहरूबाट हेर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 30° र 45° छन् । यदि ती स्थानहरूबिचको दुरी 10m भए घरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ यहाँ, AB घरको उचाइ हो र यसको छतलाई घरदेखि सोही समतलमा रहेका एकैतिरका बिन्दुहरू C र D बाट हेर्दा उन्नतांश कोणहरू $\measuredangle ACB = 30°$ र $\measuredangle ADB = 45°$ बनेका छन् । यदि CD = 10m भए घरको उचाइ (AB) = ?



अब, समकोणी ΔABD बाट,

$$tan45° = \frac{AB}{BD}$$

अथवा, $1 = \frac{AB}{BD}$

अथवा, $BD = AB$

त्यस्तै, समकोणी ΔABC बाट,

$$tan30° = \frac{AB}{BC}$$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{CD+BD}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{10+AB}$

अथवा, $\sqrt{3}\text{AB} = 10 + \text{AB}$

अथवा, $\sqrt{3}\text{AB} - \text{AB} = 10$

अथवा, $\text{AB}(\sqrt{3} - 1) = 10$

अथवा, $AB = \frac{10}{\sqrt{3}-1}$

अथवा, $AB = \frac{10}{1.732-1}$

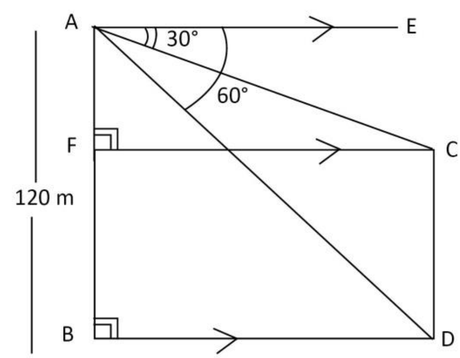
अथवा, $AB = \frac{10}{0.732}$

अथवा, $AB = 13.66m$

∴ घरको उचाइ 13.66m रहेछ ।

3. एउटा 120m अग्लो धरहराको टुप्पोबाट त्यसको अगाडि रहेको रुखको टुप्पो र फेदको अवनति कोण क्रमशः 30° र 60° बन्दछन् भने सो रुखको उचाइ र धरहरा तथा रुखबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



मानौँ, यहाँ, AB = 120m अग्लो धरहराको टुप्पोबाट धरहराको अगाडि रहेको रुख CD को टुप्पो C र फेद D मा हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः $\measuredangle EAC = 30°$ र $\measuredangle EAD = 60°$ बनेका छन् ।

चित्रमा $\measuredangle ACF = \measuredangle EAC = 30°$ र

$\measuredangle ADB = \measuredangle EAD = 60°$

$CD = FB$ र $CF = BD$ छन् ।

रुखको उचाइ (CD) = ? रुख र धरहराबिचको दुरी (BD) = ?

अब, समकोणी ΔABD बाट,

$$tan60° = \frac{AB}{BD}$$

अथवा, $\sqrt{3} = \frac{120}{BD}$

अथवा, $BD = \frac{120}{\sqrt{3}} = 69.28$

त्यस्तै, समकोणी ΔAFC बाट,

$$tan30° = \frac{AF}{FC}$$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AF}{BD}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AF}{\frac{120}{\sqrt{3}}}$

अथवा, $AF = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{120}{\sqrt{3}}$

अथवा, $AF = 40m$

फेरि, $CD \quad = FB$

$= AB - AF$

$= 120m - 40m$

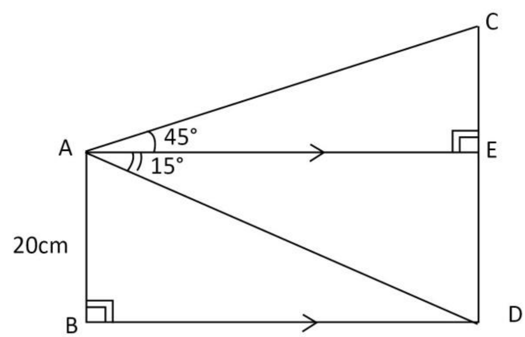
$= 80m$

∴ रुखको उचाइ = 80m र धरहरा तथा रुखबिचको दुरी = 69.28m रहेछ ।

4. एउटा 20m अग्लो घरको छतबाट एउटा टेलिभिजन टावरको टुप्पाको उन्नतांश कोण 45° र फेदको अवनति कोण 15° पाइएछ भने टेलिभिजन टावरको उचाइ कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, यहाँ, AB = 20m अग्लो घरबाट ठिक अगाडि रहेको टेलिभिजनको टावर CD को टुप्पो C मा हेर्दा उन्नतांश कोण $\measuredangle CAE = 45°$ र फेदमा हेर्दा अवनति कोण $\measuredangle EAD = 15°$ बनेका छन् ।



चित्रमा, $ED = AB = 20m$

$AE = BD$

र $\measuredangle ADB = \measuredangle EAD = 15°$

टेलिभिजन टावरको उचाइ (CD)=?

अब, समकोणी ΔABD बाट,

$tan15° = \frac{\text{AB}}{\text{BD}}$

अथवा, $0.27 = \frac{20}{BD}$

अथवा, $BD = \frac{20}{0.27}$

अथवा, $\text{BD} = 74.07m$

त्यस्तै, समकोणी ΔCEA बाट,

$tan45° = \frac{\text{CE}}{\text{AE}}$

अथवा, $1 = \frac{\text{CE}}{\text{BD}}$

अथवा, $1 = \frac{\text{CE}}{74.07}$

अथवा, $CE = 74.07m$

र, $CD = CE + ED$

अथवा, $= CE + AB$

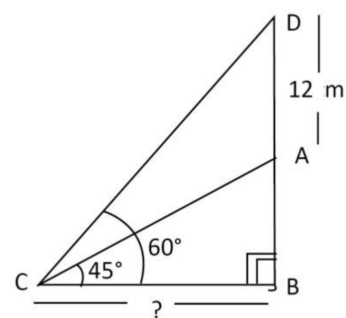
अथवा, $= 74.07m + 20m$

$= 94.07m$

$\therefore$ टेलिभिजन टावरको उचाइ $= 94.07m$ रहेछ ।

5. कुनै एउटा निश्चित बिन्दुबाट ठिक अगाडि रहेको भवनको छत र भवनमाथि ठड्याइएको ध्वजदण्डको टुप्पोमा हेर्दा क्रमशः 45° र 60° का दुई उन्नतांश कोणहरू बन्दछन् । यदि ध्वजदण्डको उचाइ 12m भए सो भवनको उचाइ र दृष्टिबिन्दु भवनबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



मानौँ यहाँ, AB उचाइ भएको घरको छतमा ठड्याइएको ध्वजदण्ड $AD = 12m$ छ । बिन्दु C बाट छतको बिन्दु A मा हेर्दा उन्नतांश कोण $\measuredangle ACB = 45°$ र ध्वजदण्डको टुप्पो D हेर्दा उन्नतांश कोण $\measuredangle DCB = 60°$ बनेको छ । भवनको उचाइ (AB) = ?

भवन र दृष्टिबिन्दुबिचको दुरी (BC)=?

अब, समकोणी ΔABC बाट,

$$tan45° = \frac{AB}{BC}$$

अथवा, $1 = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $BC = AB$

त्यस्तै, समकोणी ΔDBC मा,

$$tan60° = \frac{DB}{BC}$$

अथवा, $\sqrt{3} = \frac{12+AB}{AB}$

अथवा, $\sqrt{3}AB = 12 + AB$

अथवा, $AB(\sqrt{3} - 1) = 12$

अथवा, $AB = \frac{12}{\sqrt{3}-1}$

अथवा, $AB = 16.39m$

∴ घरको उचाइ (AB) = 16.39m र घर तथा दृष्टिबिन्दुबिचको दुरी $(BC) = AB = 16.39m$ रहेछ ।

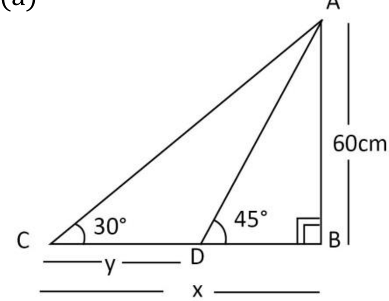
अभ्यास 5.6

1. (a) उन्नतांश कोण भनेको के हो ? चित्रसहित प्रष्ट पार्नुहोस् ।

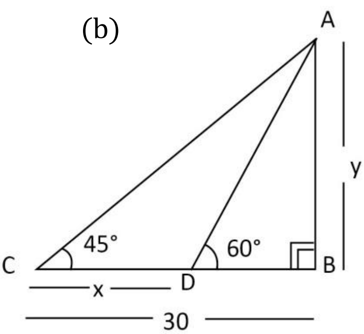
   (b) अवनति कोण भनेको के हो ? चित्रसहित प्रष्ट पार्नुहोस् ।

2. दिइएका चित्रबाट x र y का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

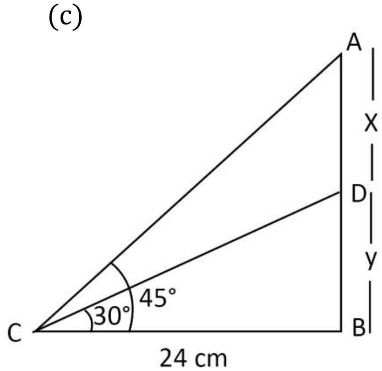
(a)



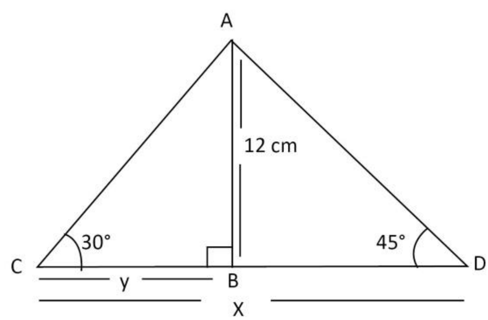
(b)



(c)



(d)



3. (a) एउटा 36 m अग्लो खम्बाको टुप्पोलाई सोही समतलका दुई विपरीत दिशामा रहेका बिन्दुहरूबाट हेर्दा 30° र 45° का उन्नतांश कोणहरू बन्छन् भने ती दुई बिन्दुहरूबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) एउटा 300m अग्लो स्तम्भको टुप्पोलाई एउटै समतलमा रहेका र विपरीत दिशामा पर्ने स्थानहरूबाट अवलोकन गर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 60° र 30° पाइयो । ती दुई स्थानहरूबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) एउटा 60m अग्लो घरको छतबाट पूर्व र पश्चिमतिर रहेका दुई स्थानको अवनति कोणहरू क्रमशः 30° र 60° पाइयो भने ती दुई स्थानबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) एउटा पहाडको टुप्पोलाई पहाडको उत्तरतिरको स्थानबाट हेर्दा उन्नतांश कोण 55° र पहाडको दक्षिणतिर रहेको स्थानबाट हेर्दा उन्नतांश कोण 35° छ । यदि ती स्थानहरूबिचको दुरी 1800 m रहेछ भने पहाडको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) एउटा धरहराको टुप्पोमा सोही समतलमा धरहराबाट एकैतिर पर्ने दुई ओटा बिन्दुहरूबाट हेर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 30° र 45° भए यदि ती स्थानहरूबिचको दुरी 30m रहेछ भने धराहराको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) कुनै एउटा निश्चित बिन्दुबाट ठिक अगाडि स्तम्भको टुप्पो हेर्दा 30°को उन्नतांश कोण पाइएको स्तम्भतिर 40m अगाडि बढेर फेरि स्तम्भको टुप्पो हेर्दा उन्नतांश कोण 45° पाइयो भने स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) एउटा स्तम्भदेखि एकैतिर पर्ने 50m को दुरीमा दुई बिन्दुहरूमा स्तम्भको टुप्पोबाट हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 45° र 65° छन् भने स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) धरहराको टुप्पोबाट एउटै दिशातर्फ 24m को दुरीमा रहेका कुनै दुई स्थान हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 60° र 45° पाइयो भने धरहराको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) कुनै 100m अग्लो चट्टानको शिखरबाट कुनै रुखको टुप्पो र फेदमा हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 30° र 52° छन् भने रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एउटा 60m अग्लो घरको छतबाट घरको सिधा अगाडि रहेको बत्तीको खम्बाको टुप्पो र फेदमा हेर्दा अवनति कोणहरू 30° र 60° रहेको छ भने खम्बाको उचाइ र खम्बादेखि घरसम्मको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) कुनै 150m अग्लो धरहरामा बसेर एउटा घरको धुरी र फेदमा हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 30° र 45° छन् भने घरको उचाइ र घर तथा धरहराबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) घरको छत र भुइँबाट ठिक अगाडि रहेको मन्दिरको टुप्पोमा हेर्दा 45° र 60°का उन्नतांश कोणहरू बनेका छन् । यदि मन्दिरको उचाइ 60m छ भने घरको उचाइ तथा घर र मन्दिरबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (a) एउटा 30m अग्लो घरको छतबाट ठिक अगाडि रहेको स्तम्भको टुप्पो र फेदमा हेर्दा क्रमशः उन्नतांश कोण 60° र अवनति कोण 30° पाइयो भने स्तम्भको उचाइ र घर तथा स्तम्भबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एउटा 15m अग्लो घरको छतबाट टेलिभिजन टावरको टुप्पो र फेद हेर्दा क्रमशः उन्नतांश कोण 45° र अवनति कोण 15° छ भने टावरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) एउटा 200m अग्लो टापुमा बसेर एउटा पहाडको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 45° र फेदमा हेर्दा अवनति कोण 20° छ भने पहाडको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) एउटा खम्बाको फेदबाट ठिक अगाडि रहेको घरको छतमा हेर्दा 60° को उन्नतांश कोण बन्छ र घरको छतबाट खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा 45° को उन्नतांश कोण बन्छ । यदि घरको उचाइ 18m भए खम्बाको उचाइ र घर तथा खम्बाबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (a) एउटा 12m अग्लो घरको छत र भुइँबाट घरको ठिक अगाडि रहेको रुखको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 30° र 45° का बन्दछन् भने रुखको उचाइ र घर रुखबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) कुनै 10m अग्लो खम्बाको फेद र टुप्पोबाट खम्बादेखि ठिक अगाडि रहेको घण्टाघरको टुप्पोको उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 45° र 22° छन् भने घण्टाघरको उचाइ र खम्बादेखि घण्टाघरको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) एउटा खम्बा 20m अग्लो छ । खम्बाको ठिक अगाडि रहेको घरको छतमा खम्बाको टुप्पोबाट 45° र फेदबाट 60° को उन्नतांश कोण बन्दछ भने घरको उचाइ र खम्बादेखि घण्टाघरसम्मको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) एउटा धरहराको टुप्पोबाट 20m अग्लो स्तम्भको फेदमा हेर्दा अवनति कोण 60° र स्तम्भको टुप्पोबाट धरहराको फेदमा हेर्दा अवनति कोण 22° पाएछ भने धरहराको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. (a) एउटा 10m अग्लो घरको छतबाट आफ्नो अगाडि रहेको स्तम्भको टुप्पो हेर्दा 60° को उन्नतांश कोण र सो टुप्पोदेखि 18m तल हेर्दा 30° को उन्नतांश कोण बन्छ भने स्तम्भको उचाइ र घरदेखि स्तम्भबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एक जना 1.5m अग्लो मानिसले अगाडि रहेको एउटा भवनको छतमा र छतमाथि राखिएको टावरको टुप्पोमा हेर्दा 45° र 75° का दुई उन्नतांश कोणहरू बनाउँछ । यदि टावरको उचाइ 27m भए भवनको उचाइ कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) कुनै एउटा ठाउँबाट 200m टाढा रहेको कुनै एउटा स्तम्भको टुप्पो हेर्दा जति डिग्रीको कोण बन्छ ठिक 125m नजिक गएर सोही टुप्पोमा हेर्दा दोब्बरकोण बन्दछ भने स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. (a) आफ्नो विद्यालयको अग्लो भवनको एकैतिर दुई स्थानबाट भवनको छतको उन्नतांश कोण क्लिनोमिटरको प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् । दुई स्थानबिचको दुरी मिटरमा लिएर भवनको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) आफ्नो टोल गाउँघरमा भएको कुनै अग्लो स्थान, स्तम्भ, टावर, धरहरा वा अग्लो अर्पाटमेन्ट वा अन्य केही प्राकृतिक उचाइ भएका स्थानको उचाइ पत्ता लगाउने (सिधै ननापी) तरिका पत्ता लगाई सोको प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् ।

एकाइ 6

भेक्टर (Vectors)

6.0 पुनरावलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरू समूहमा छलफल गर्नहोस् :

(a) खेतमा हलो र गोरु जोत्दाको अवस्थालाई गणितीय रूपमा कसरी व्याख्या गर्ने होला ?

(b) धनुषवाण चलाउँदा वाणको दिशा र वाण चलाउने व्यक्तिको स्थिति के हुन्छ होला ?

(c) एउटा वस्तुलाई फरक फरक स्थानमा एक समान बल (force) लगाउँदा प्राप्त हुने नतिजाहरू के हुन्छन् ?

(d) दुई ओटा भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ जोड्ने तरिकाहरू के के हुन् ?

(e) लहर भेक्टर (column vector), पङ्क्ति भेक्टर (row vectior), स्थिति भेक्टर (position vector), एकाइ भेक्टर (unit vector), शून्य भेक्टर (null vector), बराबर भेक्टरहरू (equal vectors), ऋणात्मक भेक्टर (negative vector), समान र असमान भेक्टरहरू (like and unlike vectors) प्रत्येकका एक एक ओटा उदाहरण लेख्नुहोस् ?

(f) यदि $\vec{a} = (4,5)$ र $\vec{b} = (-4,3)$ भए $\vec{a} + \vec{b}$ र $\vec{a} - \vec{b}$ कति हुन्छ ?

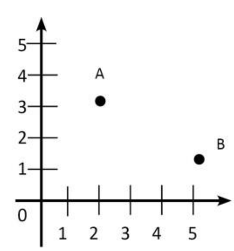
(g) हाम्रो दैनिक जीवनमा भेक्टरले के कस्ता काममा महत्त्वपूर्ण भूमिका खेल्छ कुनै दुई ओटा उदाहरणहरूका बारेमा टिप्पणी गर्नुहोस् ।

6.1 दुई ओटा भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफल (Scalar or dot product of two vectors)

शून्य (0) र उद्गम बिन्दु O(0, 0) बिच के फरक छ ? छलफल गर्नुहोस् । के दुई ओटा सङ्ख्याहरू (scalars) को गुणन गर्दा शून्य नतिजा प्राप्त हुन्छ ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् । त्यस्तै दुई ओटा भेक्टरहरूको जोड र घटाउबाट उद्गम बिन्दुको निर्देशाङ्क O(0, 0) पाइए जस्तै दुई ओटा भेक्टरहरूको गुणनफल पनि O(0, 0) पाइन्छ कि पाइँदैन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

दुई ओटा भेक्टरहरूलाई एकआपसमा गुणन गर्दा हामीले वास्तविक सङ्ख्या अथवा स्केलर पाउछौँ । यस्तो गुणनलाई दुई ओटा भेक्टरहरूको स्केलर गुणन भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 1



दिइएको लेखाचित्रको अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूको जवाफ दिनुहोस् :

(a) बिन्दु A र B का निर्देशाङ्कहरू के के हुन् ?

(b) बिन्दु A र B का स्थिति भेक्टरहरू के के हुन् ?

(c) बिन्दु A र B का x- निर्देशाङ्क र y- निर्देशाङ्कहरूलाई फरक फरक गुणन गर्नुहोस् ।

(d) बिन्दु A र B का x- निर्देशाङ्कहरू र y- निर्देशाङ्कहरूका गुणनफलहरू जोड्दा कति हुन्छ ?

(e) के उक्त गुणनफलहरूको योगफललाई सोही लेखाचित्रमा देखाउन सकिन्छ ?

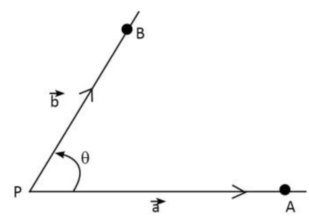
मानौँ $\vec{a} = (x_1, y_1)$ र $\vec{b} = (x_2, y_2)$ छन् ।

यहाँ, $(x_1, y_1) = x_1(1,0)+y_1(0,1)= x_1\vec{i}+ y_1\vec{j}$

र $(x_2, y_2) = x_2(1,0) + y_2(0, 1) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ पनि लेख्न सकिन्छ । जहाँ $\vec{i}$ र $\vec{j}$ क्रमशः x- अक्षमा र y- अक्षको दिशामा एकाइ भेक्टरहरूलाई जनाउँछन् ।

(x_1, y_1) र (x_2, y_2) ले एउटा वास्तविक सङ्ख्यालाई जनाउँछ । उक्त वास्तविक सङ्ख्यालाई $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को स्केलर गुणनफल भन्छन् । यसलाई (भेक्टर a) (स्केलर गुणन) (भेक्टर b) अथवा $\vec{a} \cdot \vec{b}$ बाट जनाइन्छ ।

$\therefore \vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$



मानौँ $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ र $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ छन् । जहाँ $|\overrightarrow{PA}| \neq 0$ र $|\overrightarrow{PB}| \neq 0$ छ । $\vec{a}$ र $\vec{b}$ द्वारा जनाउने रेखाखण्डहरूबिचको कोण θ छ । जहाँ $0 \leq \theta \leq \pi$ छ ।

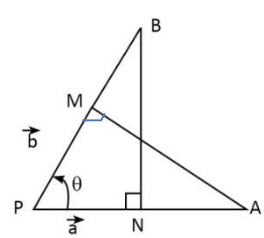
$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ले एउटा स्केलर अथवा वास्तविक सङ्ख्या दिन्छ, जसलाई $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को स्केलर गुणन अथवा $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ले जनाइन्छ ।

त्यसैले, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

यसलाई नै दुई ओटा भेक्टरहरूको स्केलर गुणन भनी परिभाषित गरिन्छ ।

ज्यामितीय रूपमा यसलाई निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ :

यहाँ,



$\overrightarrow{PA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{PB} = \vec{b}$

$\measuredangle APB = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$

$BN \perp PA, AM \perp PB$

PM $= \vec{a}$ को $\vec{b}$ मा प्रभाव (projection of $\vec{a}$ on $\vec{b}$)

$= PA \cos\theta [\cos\theta = \frac{PM}{PA}$, समकोणी ΔAMP मा]

$= |\vec{a}| \cos\theta$

अब, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\ cos\theta$

$= (|\vec{a}|) \times (|\vec{b}|cos\theta)$

$=$ ($\vec{a}$ को लम्बाइ)× ($\vec{b}$ को $\vec{a}$ मा प्रभाव (Projection of $\vec{b}$ on $\vec{a}$)

अथवा, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\ cos\theta$

$= (|\vec{b}|) \times (|\vec{a}|cos\theta)$

$=$ ($\vec{b}$ को लम्बाइ)× ($\vec{a}$ को $\vec{b}$ मा प्रभाव (Projection of $\vec{a}$ on $\vec{b}$)

त्यस्तै, $cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ हुन्छ ।

केही महत्त्वपूर्ण नतिजाहरू

(a) यदि $|\vec{a}| = a$ र $|\vec{b}| = b$ र भए $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$ हुन्छ ।

(b) यदि $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ भए, $(i)|\vec{a}| = 0$ $(ii)|\vec{b}| = 0$ वा $(iii)\vec{a}\perp\vec{b}$ हुन्छ ।

(c) यदि $\theta = 0°$ भए $\vec{a}\cdot\vec{b}$ को अधिकतम मान प्राप्त हुन्छ ।

(d) यदि $\theta = 180°$ भए $\vec{a}\cdot\vec{b}$ को न्यूनतम मान प्राप्त हुन्छ ।

(e) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ हुन्छ ।

(f) $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\,\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ हुन्छ, जहाँ $k \neq 0$ र $k \in R$ छ ।

जानी राखौँ

मानौँ $\vec{i} = (1,0)$ र $\vec{j} = (0, 1)$ क्रमशः x- अक्षको दिशामा र y- अक्षको दिशामा एकाइ भेक्टरहरू हुन् ।

(a) $\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|cos0° = 1 \times 1 \times 1 = 1$

(b) $\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}|cos0° = 1 \times 1 \times 1 = 1$

(c) $\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|cos90° = 1 \times 1 \times 0 = 0$

(d) $\vec{j}\cdot\vec{i} = |\vec{j}||\vec{i}|cos90° = 1 \times 1 \times 0 = 0$

अथवा,

$\vec{i}\cdot\vec{i} = (1, 0).(1,0) = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$

$\vec{j}\cdot\vec{j} = (0,1).(0,1) = 0 \times 0 + 1 \times 1 = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = (1, 0).(0,1) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{i} = (0,1).(1,0) = 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$

उदाहरणहरू

1. यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ भए

   a) $\vec{a}$ र $\vec{b}$ बिच बन्ने कोण

   b) $\vec{a}^2$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ छ ।

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13},$

$\vec{a}.\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= 2 \times (-3) + 3 \times 2$

$= -6 + 6$

$= 0$

(a) $\vec{a}$ र $\vec{b}$ बिचको कोण,

$$cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = 0$$

अथवा, $\theta = 90°$

[$\vec{a}.\vec{b} = 0$ भएमा $\theta = 90°$ हुन्छ ।]

(b) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$= (\sqrt{13})^2$

$= 13$

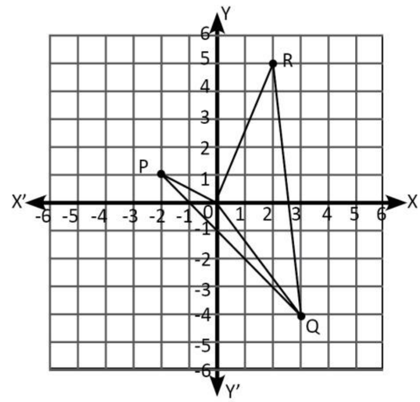
$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \text{Cos} 0°$

$= |\vec{a}|^2 \times 1 = |\vec{a}|^2$

नोट : त्यसैले $\vec{a}^2, \vec{a}.\vec{a}$ र $|\vec{a}|^2$ को नतिजा बराबर आउँछ ।

2. यदि P(-2,1), Q(3, -4) र R(2, 5) स्थिति भेन्टरहरू भए $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QR}$ को मान कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



यहाँ, $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

र $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

चित्रबाट, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$

[भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3+2 \\ -4-1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

$= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2-3 \\ 5+4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

फेरि,

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

$= 5 \times (-1) + (-5) \times 9$

$= -5 - 45$

$= -50$

3. यदि $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}5\\m\end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ र $\measuredangle AOB = 90°$ भए m को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}5\\m\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ र $\measuredangle AOB = 90°$

हामीलाई थाहा छ, $cos\measuredangle AOB = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|}$

अथवा, $cos90° = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|}$

अथवा, $0 = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|}$

अथवा, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

अथवा, $\begin{pmatrix}5\\m\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = 0$

अथवा, $5 \times 4 + m \times (-2) = 0$

अथवा, $20 - 2m = 0$

अथवा, $2m = 20$

अथवा, $m = 10$

4. यदि $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 12$, $\measuredangle AOB = 60°$ र $\overrightarrow{OA} = 4$ भए $|\overrightarrow{OB}|$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 12$

$\measuredangle AOB = 60°$

$|\overrightarrow{OA}| = 4$

$|\overrightarrow{OB}| = ?$

हामीलाई थाहा छ,
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\measuredangle AOB$

अथवा, $12 = 4 \times |\overrightarrow{OB}| \cos60°$

अथवा, $12 = 4 \times |\overrightarrow{OB}| \times \frac{1}{2}$

अथवा, $12 = 2|\overrightarrow{OB}|$

अथवा, $6 = |\overrightarrow{OB}|$

$\therefore |\overrightarrow{OB}| = 6$

5. यदि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(0,0), |\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$ र $|\vec{c}|=4$ भए $\vec{a}$ र $\vec{c}$ बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(0,0), |\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$ र $|\vec{c}|=4$, $\vec{a}=?$ $\vec{c}=?$

फेरि, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

अथवा, $\vec{a}+\vec{c}=-\vec{b}$

अथवा, $(\vec{a}+\vec{c})^2=(-\vec{b})^2$

अथवा, $(\vec{a})^2+2\vec{a}.\vec{c}+(\vec{c})^2=(-\vec{b})^2$

अथवा, $(3)^2+2\vec{a}.\vec{c}+(4)^2=(5)^2$

अथवा, $9+2\vec{a}.\vec{c}+16=25$

अथवा, $25+2\vec{a}.\vec{c}=25$

अथवा, $2\vec{a}.\vec{c}=25-25$

अथवा, $\vec{a}.\vec{c}=0$

$\vec{a}$ र $\vec{c}$ बिचको कोण $90°$ हुन्छ ।

अभ्यास : 6.1

1. (a) स्केलर गुणनको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

   (b) यदि $\vec{a}.\vec{b}=0$ भए $\vec{a}$ र $\vec{b}$ सम्बन्ध के हुन्छ ?

   (c) $\vec{a}.\vec{b}$ को अधिकतम मान प्राप्त गर्न $\vec{a}$ र $\vec{b}$ बिचको कोण कति हुन्छ ?

   (d) यदि $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ र $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ भए $\vec{a}.\vec{b}$ कति हुन्छ ?

2. (a) यदि $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ र $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ भए $\vec{a}.\vec{b}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ र $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix}$ भए $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) यदि $\vec{a}$ र $\vec{b}$ एकाइ भेक्टरहरू भए $\vec{a}.\vec{b}$ पत्ता लगाउनुहोस् जहाँ $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}$ छ ।

3. यदि A(-2,1), B(-1,-3), C(3,-2) र D(2,2) भए

   (a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ र $\overrightarrow{BD}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (d) $\overrightarrow{AC}^2$ र $\overrightarrow{CD}^2$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) यदि $\overrightarrow{AB} = \binom{2}{3}$, $\overrightarrow{OB} = \binom{a}{-2}$, $\measuredangle AOB = 90°$ भए a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $\vec{p} = \binom{2}{a}$ र $\vec{q} = \binom{3}{-1}$ एकआपसमा लम्ब भए a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि $\vec{a} = \binom{2+k}{4-k}$ र $\vec{b} = \binom{2}{3}$ एकआपसमा लम्ब भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) यदि $\left|\overrightarrow{OP}\right| = 6, \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = 24$ र $\measuredangle POQ = 60°$ भए $\left|\overrightarrow{OQ}\right|$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 30$, $\measuredangle AOB = 45°$ र $|\overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{2}$ भए $|\overrightarrow{OA}|$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = -14\sqrt{3}$, $\measuredangle OCD = 150°$ र $|\overrightarrow{OC}| = 4$ भए $|\overrightarrow{OD}|$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्

6. (a) यदि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (0,0), |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$ र $|\vec{c}| = 4$ भए $\vec{a}.\vec{c}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = (0,0), |\vec{p}| = 6, |\vec{q}| = 10$ र $\vec{p}. \vec{q} = 30$ भए $|\vec{r}|$ पत्ता लगाउनुहोस्

7. (a) कुनै भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ का लागि $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ भए $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(b) यदि $\vec{a} \perp \vec{b}$ भए $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

8. लेखाचित्रमा समबाहु त्रिभुज ABC खिच्नुहोस् र

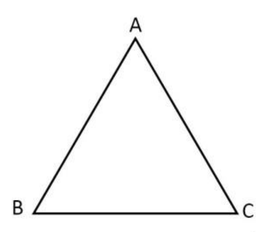
(a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$, र $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) $\overrightarrow{BC}$ को मध्य बिन्दु D पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

6.2 भेक्टर ज्यामिति (Vector Geometry)

दिइएको चित्रमा,

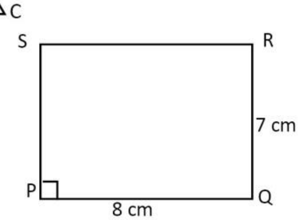


(a) के AB+BC =AC हुन्छ ?

(b) के $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ हुन्छ ?

(c) (a) र (b) मा के भिन्नता छ ?

त्यस्तै आयत PQRS मा



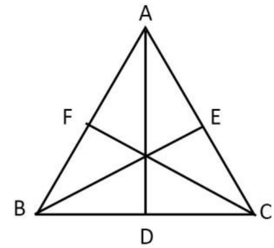
(a) PQ र PS को गुणनफल कति हुन्छ ?

(b) $\overrightarrow{PQ}$ र $\overrightarrow{PS}$ को स्केलर गुणन कति हुन्छ ?

(c) $PQ \times PS$ र $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PS}$ बिच के भिन्नता छ ?

भेक्टर ज्यामितिमा भेक्टर जोडका नियमहरू तथा दुई ओटा भेक्टरहरूको स्केलर गुणनका गुणहरू प्रयोग गरी ज्यामितीय आकृतिका गुणहरू र कथनहरूलाई प्रमाणित गर्ने गरिन्छ ।

6.2.1 (a) मध्यबिन्दु साध्य (Mid-point Theorem)



दिइएको ΔABC मा भुजाहरू BC, AC र AB का मध्य बिन्दुहरू क्रमश: D, E र F छन् ।

अब $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, र $\overrightarrow{CF}$ लाई $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ र $\overrightarrow{AE}$ का पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

यहाँ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ … … … … … (i) (भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार)

त्यस्तै $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ … … … … … (ii)

(i) र (ii) लाई जोड्दा,

अथवा, $2\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$

अथवा, $2\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} + (-\overrightarrow{DC}))$

अथवा, $2\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD})$ [∴BD=DC]

अथवा, $2\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \vec{0}$

अथवा, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

अथवा, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

त्यस्तै, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ र

$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ हुन्छ ।

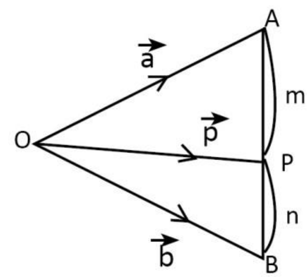
यदि $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ भए AB को मध्य बिन्दु C को स्थिति भेक्टर $\begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}$ वा $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ हुन्छ ।

(b) खण्ड सूत्र (Section formula)

(i) भित्री विभाजन सम्बन्धी साध्य (Internal division theorem)

कथन : यदि बिन्दु A को स्थिति भेक्टर $\vec{a}$, बिन्दु B को स्थिति भेक्टर $\vec{b}$ र AB लाई m:n मा विभाजन गर्ने बिन्दु P को स्थिति भेक्टर $\vec{p}$ भए $\vec{p} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ हुन्छ ।

प्रमाण



चित्रमा, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},$

$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ र AP:PB = m:n छ ।

फेरि, $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$

अथवा, $n\,\overrightarrow{AP} = m\,\overrightarrow{PB}$

अथवा, $n\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right) = m\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}\right)$

अथवा, $n\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) = m\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right)$

अथवा, $n\,\overrightarrow{OP} - n\,\overrightarrow{OA} = m\,\overrightarrow{OB} - m\,\overrightarrow{OP}$

अथवा, $m\,\overrightarrow{OP} + n\,\overrightarrow{OP} = n\,\overrightarrow{OA} + m\,\overrightarrow{OB}$

अथवा, $(m+n)\overrightarrow{OP} = n\,\overrightarrow{OA} + m\,\overrightarrow{OB}$

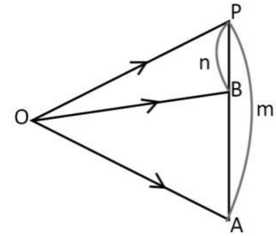
अथवा, $\overrightarrow{OP} = \frac{n\,\overrightarrow{OA}+m\,\overrightarrow{OB}}{m+n}$

अथवा, , $\overrightarrow{OP} = \frac{n\,\vec{a}+m\,\vec{b}}{m+n}$ प्रमाणित भयो ।

(ii) बाहिरी विभाजन सम्बन्धी साध्य (External division theorem)

कथन : यदि बिन्दु P ले AB लाई बाहिरबाट m:n मा विभाजन गर्छ भने विभाजन गर्ने बिन्दुको स्थिति भेक्टर, $\overrightarrow{OP} = \frac{m\,\vec{b}-n\,\vec{a}}{m-n}$ हुन्छ ।

प्रमाण



चित्रमा, PA:PB = m:n छ ।

यहाँ, $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$

अथवा, $n\,PA = m\,PB$

अथवा, $n\,\overrightarrow{PA} = m\,\overrightarrow{PB}$

अथवा, $n\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}\right) = m\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}\right)$

अथवा, $n\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\right) = m\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right)$

अथवा, $n\,\overrightarrow{OA} - n\,\overrightarrow{OP} = m\,\overrightarrow{OB} - m\,\overrightarrow{OP}$

अथवा, $m\,\overrightarrow{OP} - n\,\overrightarrow{OP} = m\,\overrightarrow{OB} + n\,\overrightarrow{OA}$

अथवा, $(m-n)\overrightarrow{OP} = m\,\overrightarrow{OB} + n\,\overrightarrow{OA}$

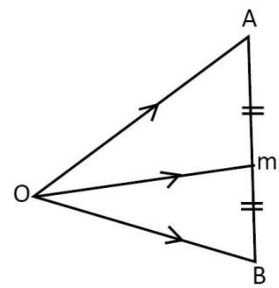
अथवा, $\overrightarrow{OP} = \frac{m\,\overrightarrow{OB} - n\,\overrightarrow{OA}}{m-n}$

अथवा, $\overrightarrow{OP} = \frac{m\,\vec{b} - n\,\vec{a}}{m-n}$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरणहरू

1. बिन्दु A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $4\vec{i} + 3\vec{j}$ र $3\vec{i} - 4\vec{j}$ छन् । AB को मध्य बिन्दु m को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्रमाण



चित्रमा, $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = 3\,\vec{i} - 4\vec{j}$

AM=MB

$\overrightarrow{OM} = ?$

मध्य बिन्दु साध्यको कथनअनुसार,

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(4\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{i} - 4\vec{j})$

$= \frac{1}{2}(7\vec{i} - \vec{j})$

$= \frac{7}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

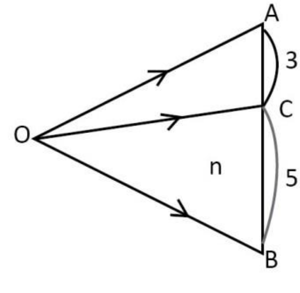
2. बिन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $3\vec{i} - \vec{j}$ र $4\vec{i} - 7\vec{j}$ छन् । निम्न अवस्थामा बिन्दुहरू C र D का स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) C ले AB लाई भित्री रूपमा 3:5 को अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

   (b) D ले AB लाई बाह्य रूपमा 2:1 को अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

समाधान

(a) यहाँ,



$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$

$AC : CB = 3 : 5$

$\overrightarrow{OC} = ?$

भित्री विभाजन सम्बन्धी साध्यअनुसार

$\overrightarrow{OC} = \frac{5\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+5}$

अथवा, $\overrightarrow{OC} = \frac{5(3\vec{i}-\vec{j})+3(4\vec{i}-7\vec{j})}{8}$

अथवा, $\overrightarrow{OC} = \frac{15\vec{i}-5\vec{j}+12\vec{i}-21\vec{j}}{8}$

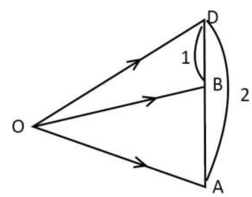
अथवा, $\overrightarrow{OC} = \frac{27\vec{i}-26\vec{j}}{8}$

अथवा, $\overrightarrow{OC} = \frac{27}{8}\vec{i} - \frac{13}{4}\vec{j}$

(b) यहाँ,

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$



$DA : DB = 2 : 1 (m:n)$

$\overrightarrow{OD} = ?$

भेक्टरको बाहिरी विभाजन सम्बन्धी साध्यअनुसार,

$\overrightarrow{OD} = \frac{2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{2-1}$ $\left[\frac{m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OA}}{m-n}\right]$

अथवा, $= \frac{2(4\vec{i}-7\vec{j})-(3\vec{i}-\vec{j})}{2-1}$

अथवा, $= \frac{8\vec{i}-14\vec{j}-3\vec{i}+\vec{j}}{1}$

$= 5\vec{i} - 13\vec{j}$

वैकल्पिक विधि

$DA : DB = 2 : 1$

$\frac{DA}{DB} = \frac{2}{1}$

$\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD})$

$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

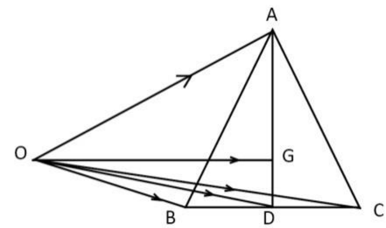
$\overrightarrow{OD} = 2(4\vec{i} - 7\vec{j}) - (3\vec{i} - \vec{j})$

$= 8\vec{i} - 14\vec{j} - 3\vec{i} + \vec{j}$

$= 5\vec{i} - 13\vec{j}$

3. चित्रमा, ΔABC को माध्यिका AD लाई बिन्दु G ले $AG:GD = 2:1$ को अनुपातमा विभाजन गरेको छ, प्रमाणित गर्नुहोस् :

G को स्थिति भेक्टर $= \frac{1}{3}$(A, B र C को स्थिति भेक्टरको योगफल)



अथवा, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

समाधान

यहाँ $AG:GD=2:1$

अथवा, $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

अथवा, $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$

अथवा, $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = 2\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG}\right)$

अथवा, $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OG}$

अथवा, $\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

अथवा, $3\overrightarrow{OG} = 2 \times \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + \overrightarrow{OA}$[मध्य बिन्दु साध्यअनुसार]

अथवा, $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$

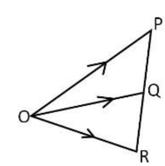
अथवा, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास: 6.2.1

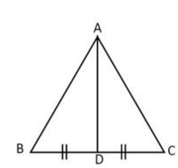
1. (a) भेक्टरको मध्य बिन्दु साध्यको कथन लेख्नुहोस् ।

   (b) बिन्दु C ले AB लाई $m_1: m_2$ को अनुपातमा भित्री रूपमा विभाजन गर्छ भने C को स्थिति भेक्टर A र B को स्थिति भेक्टरका पदमा लेख्नुहोस् ।

   (c) चित्रमा $PR:PQ=m:n$ भए $\overrightarrow{OP}$ लाई $\overrightarrow{OQ}$ र $\overrightarrow{OR}$ को पदमा लेख्नुहोस् ।



2. (a) यदि बिन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमश: $2\vec{i} + 5\vec{j}$ र $4\vec{i} - 3\vec{j}$ भए AB को मध्यबिन्दु C को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।



   (b) चित्रमा $BD = DC$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ र $\overrightarrow{AC} = 7\vec{i} + 9\vec{j}$ भए $\overrightarrow{AD}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) यदि, $\overrightarrow{OA} = 7\vec{i} + 3\vec{j}, \overrightarrow{OB} = 2\vec{j} - \vec{i}$ र $AC = CB$ भए $\overrightarrow{OC}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

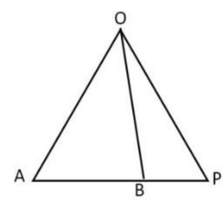
3. (a) A(2,-3) र B(3,2) रेखाखण्ड AB को छेउका बिन्दुहरू हुन् । M ले AB लाई 2:3 को अनुपातमा भित्रबाट विभाजन गरेको छ भने M को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि P र Q का स्थिति भेक्टरहरू $2\vec{i} - 3\vec{j}$ र $3\vec{i} - 2\vec{j}$ छन् भने PQ लाई भित्रपट्टिबाट 3:2 को अनुपातमा विभाजन गर्ने बिन्दु M को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

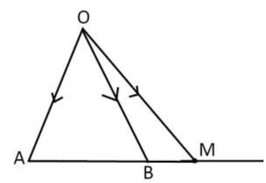
(c) यदि P र Q का स्थिति भेक्टरहरू $2\vec{i} - \vec{j}$ र $5\vec{i} + 2\vec{j}$ छन् भने PQ लाई बाहिरबाट 1:2 को अनुपातमा विभाजन गर्ने बिन्दु R को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि C र D का स्थिति भेक्टरहरू $6\vec{i} + 2\vec{j}$ र $7\vec{i} - 3\vec{j}$ छन् भने CD लाई बाहिरबाट 4:5 को अनुपातमा विभाजन गर्ने बिन्दु R को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

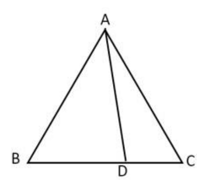
4. (a) चित्रमा बिन्दु P ले AB लाई 3:4 को अनुपातमा विभाजन गरेको छ । $\overrightarrow{OP}$ लाई $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{OB}$ का पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।



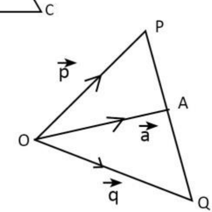
(b) चित्रमा $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ र $\overrightarrow{OB} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ र M ले AB लाई बाहिरबाट 5:2 को अनुपातमा विभाजन गरेको छ भने $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(4\vec{b} - 9\vec{a})$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



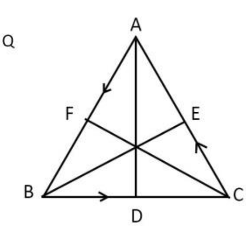
(c) चित्रमा $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ भए $\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AD}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



5. चित्रमा यदि $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\vec{a} = \frac{1}{4}(3\vec{p} + \vec{q})$



6. चित्रमा ΔABC का भुजाहरू AB,BC र AC का मध्य बिन्दुहरू क्रमशः F,D र E छन् । $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = (0,0)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



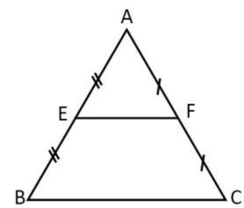
7. मध्य बिन्दु साध्य र खण्ड सूत्रका लागि भेक्टरको त्रिभुज नियम आवश्यक छ वा छैन ? आवश्यक भए कसरी ? व्याख्या गर्नुहोस् ।

6.2.3 त्रिभुज सम्बन्धी साध्यहरू (Theorems related to triangle)

हामीले ज्यामितिमा त्रिभुजका साध्यहरू प्रमाणित गरे झैँ भेक्टरको स्केलर गुणन र भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम प्रयोग गरी त्रिभुजका केही साध्यहरू प्रमाणित गर्न सक्छौँ, जुन निम्नअनुसार छन् :

साध्य 1: त्रिभुजका दुई ओटा भुजाको मध्य बिन्दु जोड्ने रेखा तेस्रो भुजासँग समानान्तर र त्यसको आधा हुन्छ ।

मानौँ ΔABC मा AB र AC का मध्यबिन्दुहरू जोड्ने रेखा EF छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने

$EF = \frac{1}{2}BC$ र EF//BC

प्रमाण

यहाँ, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$ [भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमका कारण]

अथवा, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [E र F क्रमशः AB र AC का मध्य बिन्दुहरू भएकाले]

अथवा, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

अथवा, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

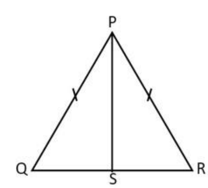
$\therefore$ EF//BC [$EF=k\overrightarrow{BC}$, $k=\frac{1}{2}$ भएकाले]

अथवा, $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

$\therefore EF = \frac{1}{2}BC$ प्रमाणित भयो ।

साध्य 2: समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षबिन्दु र आधारको मध्य बिन्दु जोड्ने रेखा आधारमा लम्ब हुन्छ ।

मानौँ PQR एउटा समद्विबाहु त्रिभुज र QR को मध्य बिन्दु S हो ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : $PS \perp QR$

प्रमाण

(i) $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$ [भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमबाट]

$= \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

(ii) $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})$ [मध्य बिन्दु साध्यअनुसार]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ})$

(iii) $\overrightarrow{QR}.\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}).(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ})$

$= \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{PR})^2 - (\overrightarrow{PQ})^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{PR}|^2 - |\overrightarrow{PQ}|^2\right)$

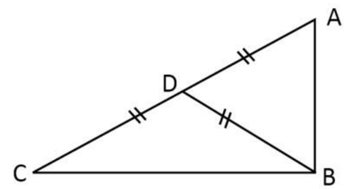
$= \frac{1}{2}(PR^2 - PQ^2)$

$= 0$ [∴ PR = PQ, ΔPQR समद्विबाहु त्रिभुज भएकाले]

∴ PS⊥QR [$\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{QR}$=0 भएकाले]

साध्य 3: समकोणी त्रिभुजको कर्णको मध्यबिन्दु शीर्षबिन्दुहरूबाट समदुरीमा पर्छ ।

मानौँ समकोणी त्रिभुज ABC मा
कर्ण AC को मध्य बिन्दु D छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : AD = DC = BD

प्रमाण

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$ [∡ABC = 90° भएकाले]

अथवा, $(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = 0$ [भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमानुसार]

अथवा, $(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}) = 0$

अथवा, $(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA}) = 0$ [DA = CD]

अथवा, $(\overrightarrow{BD})^2 - (\overrightarrow{DA})^2 = 0$

अथवा, $|\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 = 0$

अथवा, $BD^2 = DA^2$

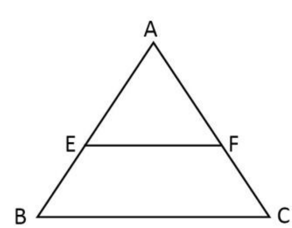
अथवा, BD = DA

तर, $DA = DC$

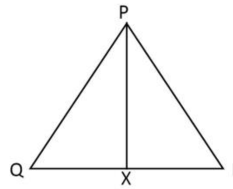
∴ AD = DC = BD प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 6.2.2

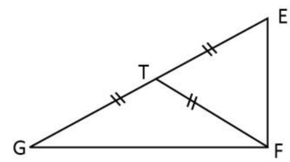
1. (a) चित्रमा ΔABC का भुजाहरू AB र AC का मध्य बिन्दुहरू क्रमशः E र F छन् । EF र BC को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।



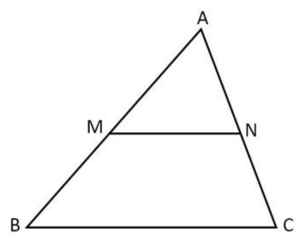
(b) चित्रमा ΔPQR को मध्यिका PX हो ।
PQ = PR छ । PX, PQ र PR को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।



(c) चित्रमा ΔEFG दिइएको छ, जहाँ GT=ET=FT छ ।
EF र GF को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।



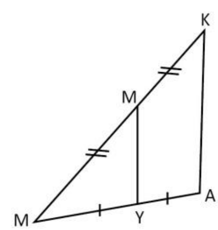
2. (a) चित्रमा ΔABC का भुजाहरू AB र AC का मध्य बिन्दुहरू क्रमशः M र N छन् । $MN=\frac{1}{2}BC$ र MN//BC हुन्छ भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।



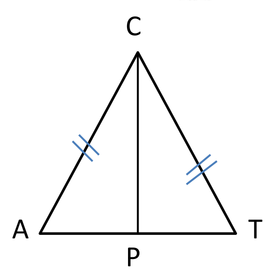
(b) चित्रमा ΔKAM का भुजाहरू KM र AM का मध्य बिन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्ड MY छ ।
भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् :

(i) MY//KA

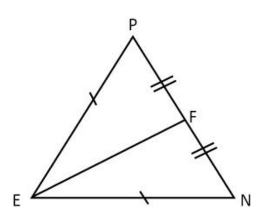
(ii) $MY=\frac{1}{2}AK$



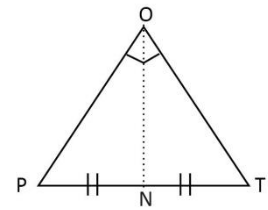
3.(a) चित्रमा त्रिभुज CAT मा CA = CT छ ।
भुजा AT को मध्यिका CP छ ।
भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् : $CP\perp AT$



(b) चित्रमा EP = EN र PF = ,FN छ ।
भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् : $EF\perp PN$

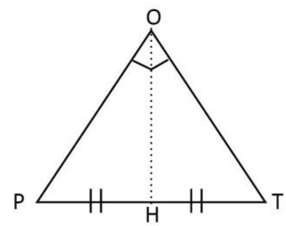


4.(a) चित्रमा समकोणी त्रिभुज RAM को कर्ण RM को मध्य बिन्दु T छ । भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् : RT=AT=MT



(b) चित्रमा POT एउटा समकोणी त्रिभुज र PT को मध्य बिन्दु H छ । भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् :

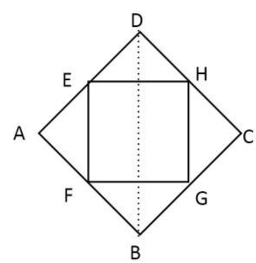
OH = PH = TH



6.2.3 चतुर्भुज तथा अर्धवृत्त सम्बन्धी साध्यहरू (Theorems on quadrilateral and semi-circle)

साध्य 4: चतुर्भुजका भुजाहरूका मध्य बिन्दुहरू क्रमशः जोड्दै जाँदा बन्ने चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

चित्रमा चतुर्भुज ABCD का भुजाहरू AB, BC, CD र AD का मध्य बिन्दुहरू क्रमशः F,G,H र E छन् । F,G,H र E लाई क्रमशः जोडी चतुर्भुज EFGH बनेको छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : EFGH एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

रचना : BD जोडौँ

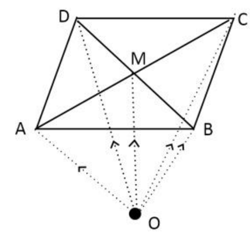
प्रमाण

1. ΔABD मा $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ [ΔABD मा भुजा AB र AD का मध्य बिन्दुहरू जोड्ने रेखा EF भएकाले]
2. ΔBCD मा $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ [ΔBCD मा भुजाहरू BC र DC का मध्य बिन्दुहरू क्रमशः G र H भएकाले, साध्य 1 अनुसार]
3. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BD}$ [तथ्य 1 र 2 बाट]
4. $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{BD}|$ र $|\overrightarrow{EF}| // |\overrightarrow{BD}|$ [$\overrightarrow{EF}$ र $\overrightarrow{BD}$ का मान र दिशाहरू बराबर भएकाले]
5. EH = FG र EH//FG [बराबर र समानान्तर रेखाखण्डहरू जोड्ने रेखाखण्डहरू पनि एकआपसमा बराबर र समानान्तर हुने भएकाले]
6. EFGH एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । [सम्मुख भुजाहरू बराबर र समानान्तर भएकाले]

प्रमाणित भयो ।

साध्य 5: समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

चित्रमा ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । विकर्ण BD को मध्य बिन्दु M छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : विकर्ण AC को मध्य बिन्दु M हो ।

रचना : मानौँ बिन्दुहरू A,B,C,D र M का स्थिति भेक्टरहरू $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ र $\overrightarrow{OM}$ छन् जहाँ O उद्गम बिन्दु छ ।

प्रमाण

1. ΔOBD मा $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$ [मध्य-बिन्दु साध्यअनुसार]

   अथवा, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD})$ [ΔOAD मा $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$ भएकाले]

   अथवा, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})$ [स.च.ABCD मा $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ भएकाले]

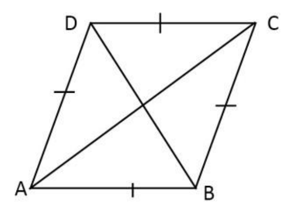
   अथवा, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

2. AC को मध्य बिन्दु M हो । [मध्यबिन्दु साध्यअनुसार $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ भएकाले]

   प्रमाणित भयो ।

साध्य 6: समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू समकोण हुनेगरी समद्विभाजित हुन्छन् ।

चित्रमा, ABCD एउटा समबाहु चतुर्भुज हो ।
AC र BD, समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू हुन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : AC⊥BD

प्रमाण

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [ΔABC मा भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]
2. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ [ΔDAB मा भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]
3. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ [तथ्य 1 र 2 को दुवै पक्षमा स्केलर गुणन गर्दा

   अथवा, $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

   अथवा, $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

   अथवा, $(\overrightarrow{AB})^2 - (\overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

   अथवा, $|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

अथवा, $AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

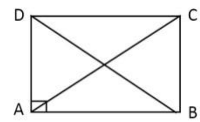
अथवा, $0 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ [AB = BC भएकाले]

4. AC⊥DB [$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$=0 भएकाले]

प्रमाणित भयो ।

साध्य 7: आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।

चित्रमा, ABCD एउटा आयत हो । जहाँ AC र BD विकर्णहरू हुन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : AC = BD

प्रमाण

1. ΔABC मा,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ [भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

अथवा, $(\overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$

अथवा, $(\overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{BC})^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

अथवा, $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 0$ [AB⊥BC भएकाले]

अथवा, $AC^2 = AB^2 + BC^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(i)$

2. पुनः ΔBCD मा,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

अथवा, $(\overrightarrow{BD})^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2$

अथवा, $(\overrightarrow{BD})^2 = (\overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{CD})^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

अथवा, $|\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 0$ [BC ⊥ CD भएकाले]

अथवा, $BD^2 = BC^2 + CD^2$

अथवा, $BD^2 = BC^2 + AB^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(ii)$[AB = CD भएकाले]

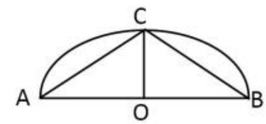
1. $AC^2 = BD^2$[(i) र (ii) बाट]

अथवा, AC=BD

प्रमाणित भयो ।

साध्य 8: वृत्तार्धको (अर्धवृत्तमा बनेको) कोण एक समकोण हुन्छ ।

चित्रमा, O अर्धवृत्तको केन्द्र र C परिधिमा पर्ने कुनै एउटा बिन्दु हो ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\measuredangle ACB = 90°$

प्रमाण

1. AO = OB = OC [एउटै अर्धवृत्तका अर्धव्यासहरू भएकाले]

2. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})$

$= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO})$

$= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA})$ [$\therefore \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA}$ भएकाले]

$= (\overrightarrow{OC})^2 - (\overrightarrow{OA})^2$

$= |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^2$

$= OC^2 - OA^2$ [$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$]

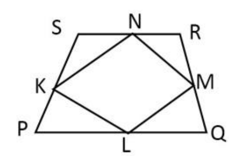
$= 0$

2. $\measuredangle ACB = 90°$ [$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$ भएकाले]

प्रमाणित भयो ।

अभ्यास : 6.2.3

1. (a) चित्रमा, बिन्दुहरू K,L,M र N क्रमशः चतुर्भुज PQRS का भुजाहरू PS, PQ, QR र RS का मध्य बिन्दुहरू हुन् । KLMN कस्तो प्रकारको चतुर्भुज हो, लेख्नुहोस् ।



   (b) अर्धवृत्तमा बनेको परिधि कोण कति हुन्छ ?

   (c) समबाहु चतुर्भुज ABCD मा विकर्ण AC र BD छन् । $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

2. (a) चतुर्भुज ABCD का भुजाहरू AB, BC, CD र AD का मध्य बिन्दुहरू क्रमशः N,E,S र T छन् । NEST एउटा समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

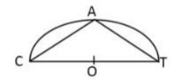
   (b) समानान्तर चतुर्भुज POST का विकर्णहरू समद्विभाजित हुन्छन् भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

3. (a) आयत NEWS का विकर्णहरू बराबर हुन्छन् भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(b) समबाहु चतुर्भुज REST का विकर्ण समकोण हुनेगरी समद्विभाजित हुन्छन् भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

4. (a) अर्धवृत्तमा बनेको कोण एक समकोण हुन्छ भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(b) चित्रमा O अर्धवृत्तको केन्द्र हो । ∡CAT एक समकोण हुन्छ भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।



5. भेक्टर ज्यामिति र ज्यामितिमा प्रमाणित गर्ने साध्यहरूमा के फरक छ ? उदाहरणसहित छोटो प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् । उक्त प्रतिवेदनलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

एकाइ 7

स्थानान्तरण (Transformation)

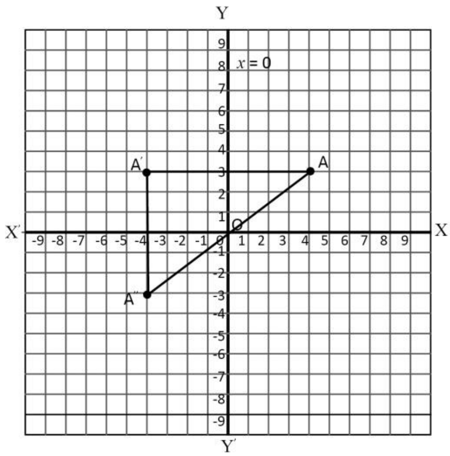
7.0 पुनरावलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

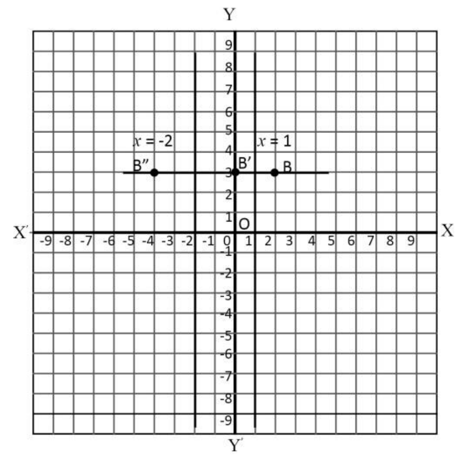
- फलन (Function) र स्थानान्तरणबिच के सम्बन्ध छ ?
- परावर्तनमा आकृति र प्रतिबिम्बको दुरीमा के सम्बन्ध हुन्छ ? त्यस्तै त्यसमा वस्तु (object) र प्रतिबिम्ब (image) आकारहरूबिच कस्तो सम्बन्ध हुन्छ ? आफ्नो वरिपरिका उदाहरणका आधारमा छलफल गर्नुहोस् ।
- एउटा चित्रलाई कुनै बिन्दु (centre) बाट एउटा निश्चित कोणमा घडीको सुई सुल्टो अथवा उल्टो दिशामा घुमाउँदा के कस्ता अवस्थाहरू प्राप्त होलान ? यसरी प्राप्त हुने चित्रलाई के भनिन्छ ?
- एउटा त्रिभुजाकार प्रिज्मलाई दिइएको दिशामा निश्चित दुरीमा सर्नुलाई के भनिन्छ ?
- फरक फरक नापो (scale) मा खिचिएका नेपालका नक्साहरू कुन गणितीय क्रियाका कारण प्राप्त हुन्छन् होला ?
- दुई ओटा मेट्रिक्सहरूको गुणन कुन अवस्थामा सम्भव छ ?
- वृत्तको केन्द्र र परिधिमा पर्ने कुनै बिन्दुबिचको दुरीलाई के भनिन्छ ?
- साइकलको पाङ्ग्रा घुमाउँदा कुन स्थानान्तरणलाई व्याख्या गर्न सकिन्छ ? परावर्तन (reflection), परिक्रमण (rotation), विस्थापन (translation) तथा विस्तार (enlargement) को कक्षा 9 मा अध्ययन गर्दा के कस्ता सूत्रहरू प्रयोग गरिएका थिए ? सूची बनाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7.1 संयुक्त स्थानान्तरण (Composition of transformation/combined transformation)

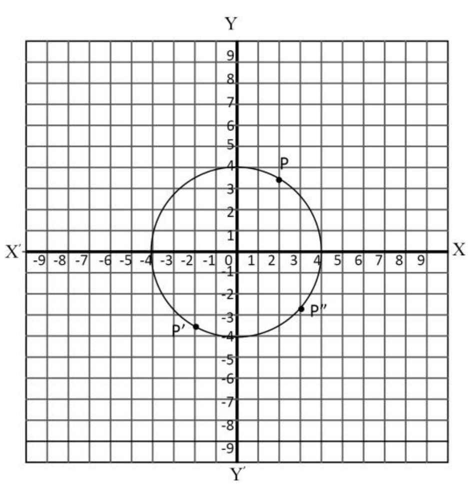
तल दिइएका लेखाचित्रहरूको अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको जवाफ दिनुहोस् ।



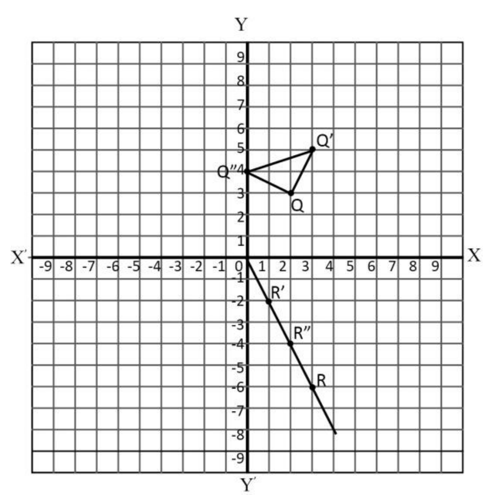
चित्र 7.1(a)



चित्र 7.1 (b)



चित्र 7.1 (c)



चित्र 7.1 (d)

चित्र 7.1 (a)

1. बिन्दुहरू A, A' र A" का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।
2. कुन कुन रेखामा परावर्तन गराउँदा A बाट A' र A' बाट A" प्राप्त भएका छन् ?

3. के दुवै परावर्तनले जनाउने रेखाहरू एकआपसमा प्रतिच्छेदित छन् ?

4. बिन्दु A को प्रतिबिम्ब A" हुन कुन एकल स्थानान्तरणले कार्य गर्छ ?

चित्र 7.1(b)

1. बिन्दुहरू B, B' र B" का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।
2. कुन कुन रेखामा परावर्तन गराउँदा B बाट B' र B' बाट B" प्राप्त भएका छन् ?
3. के दुवै परावर्तनले जनाउने रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर छन् ?
4. बिन्दु B बाट प्रतिबिम्ब B" हुन कुन एकल स्थानान्तरणले काम गर्छ ?

चित्र 7.1(c)

1. बिन्दुहरू P, P' र P" कुन बिन्दुको वरिपरि परिक्रमण गरिरहेका छन् ?
2. P, P' र P" का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।
3. P बाट P' र P' बाट P" प्रतिबिम्ब पाउन कुन कुन स्थानान्तरण प्रयोग भएका छन् ?
4. बिन्दु P को प्रतिबिम्ब P" हुन कुन एकल स्थानान्तरणले काम गर्छ ?

चित्र 7.1(d)

1. बिन्दुहरू Q, Q' र Q" का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।
2. Q बाट Q' र Q' बाट Q" पाउन कुन कुन स्थानान्तरण प्रयोग भएका छन् ?
3. बिन्दु Q को प्रतिबिम्ब Q" हुन कुन स्थानान्तरण प्रयोग भएको हुन्छ ?
4. R, R' र R" का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।
5. R बाट R' र R' बाट R" पाउन प्रयोग भएको स्थानान्तरणको नाम, केन्द्र र नापो लेख्नुहोस् ।
6. बिन्दु R बाट R" पाउन प्रयोग भएको एकल स्थानान्तरणको नाम, केन्द्र र नापो लेख्नुहोस् ।

माथि दिइएका स्थानान्तरणहरू संयुक्त स्थानान्तरणका उदाहरणहरू हुन् । कुनै वस्तुलाई r_1 र r_2 स्थानान्तरणहरूले क्रमशः स्थिति A बाट A' र A' बा A" मा पुऱ्याउँछन् भने A बाट A" पुऱ्याउने एकल स्थानान्तरण ($r_2 o r_1$) लाई संयुक्त स्थानान्तरण भनिन्छ ।

चित्र 7.1(a) मा दुई परावर्तनका अक्षरहरू प्रतिच्छेदन भएका छन् । जहाँ r_1 ले रेखा $x = 0$ मा हुने परावर्तन र r_2 ले रेखा $y = 0$ मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछन् । यसरी प्राप्त हुने संयुक्त परावर्तनलाई अक्षहरू प्रतिच्छेदन भएको बिन्दु केन्द्र बिन्दु र अक्षहरूबिचको कोणको दुई गुणाको कोणमा भएको परिक्रमणमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । उक्त चित्रमा भएको संयुक्त स्थानान्तरण उद्गम बिन्दुको वरिपरि 180° मा भएको परिक्रमणको समतुल्य हुन्छ ।

चित्र 7.1(b) मा परावर्तनका अक्षहरू समानान्तर छन् । यस्तो अवस्थामा अक्षहरूबिचको दुरीको दुई गुणा हुने गरी संयुक्त परावर्तनले कुनै वस्तुलाई विस्थापन गर्दछ । यहाँ r_1 ले $x = 1$ र r_2ले $x = -2$

मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछन् । r_2or_1 ले $2\binom{-2-1}{0} = 2\binom{-3}{0} = \binom{-6}{0}$ द्वारा हुने विस्थापनलाई जनाउँछ ।

$y = k_1$ र $y = k_2$ मा हुने परावर्तनलाई क्रमशः r_1 र r_2 द्वारा जनाउने हो भने r_1 र r_2 को संयुक्त स्थानान्तरण निम्नअनुसार विस्थापन हुन्छ । $r_2or_1 = 2\binom{0}{k_2-k_1}$ र $r_1or_2 = 2\binom{0}{k_1-k_2}$

चित्र न. 7.1(c) मा r_1र r_2 ले क्रमशः उद्गम बिन्दुको वरिपरि 180° र 90° धनात्मक दिशामा हुने परिक्रमणलाई जनाउँछन् । उक्त स्थानान्तरण r_2or_1 ले उद्गम बिन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा (180°+90°) = 270° को परिक्रमणलाई जनाउँछ ।

चित्र 7.1(d) को पहिलो अवस्थामा Q बाट Q' र Q' बाट Q'' प्राप्त गर्न विस्थापनहरू क्रमशः $T_1=\binom{1}{2}$ र $T_2=\binom{-3}{-1}$ लाई जनाउँछन् । यिनीहरूको संयुक्त स्थानान्तरण $T_2oT_1=\binom{1+(-3)}{2+(-1)}=\binom{-2}{1}$ द्वारा हुने विस्थापनलाई जनाउँछ ।

T_2oT_1 र T_1oT_2 ले दिने संयुक्त स्थानान्तरण एउटै हुन्छ ।

चित्र 7.1 (d) को दोस्रो अवस्थामा दुई ओटा विस्तारहरू $E_1\left[(0,0),\frac{1}{3}\right]$ र $E_2[(0,0),2]$ को संयुक्त स्थानान्तरण $E_2oE_1= E\left[(0,0), 2\times\frac{1}{3}\right]$ ले जनाइन्छ ।

हामीले दुई ओटा फरक फरक प्रकृतिका स्थानान्तरणबाट पनि संयुक्त स्थानान्तरण पाउन सक्छौँ ।

उदाहरणहरू

1. यदि r_1ले रेखा $y=2$ मा हुने परावर्तन, r_2 ले रेखा $x + y = 0$ मा हुने परावर्तन $T_1 = \binom{1}{2}$, $T_2 = \binom{-4}{3}$ विस्थापनहरू र E_1 [(1, 2), 2] र E_2[(1, 2)5] विस्तारलाई जनाउँछन् भने तल दिइएका बिन्दुको संयुक्त स्थानान्तरणपश्चात्को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) $r_1or_2 \leftarrow (2, 3)$ (b) $r_2or_1 \leftarrow (4, -5)$

(c) $T_1oT_2 \leftarrow (7, 8)$ (d) $E_1oE_2 \leftarrow (2,4)$

समाधान

(a) यहाँ, r_1 ले रेखा $y = 2$ मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ त्यसैले $(x, y) \xrightarrow{r_1} (x,2\times 2-y)=(x, 4-y)$

त्यस्तै, $(x, y) \xrightarrow{r_2} (-y,-x)$

$\therefore r_1or_2(2,3) = r_1(r_2(2,3))$

$= r_1(-3,-2)$

$= (-3,4-(-2))$

$= (-3,4+2)$

$= (-3,6)$

(b) यहाँ, $T_1 = \binom{1}{2}$ र $T_2 = \binom{-4}{3}$

$T_1oT_2(7,8) = T_1(T_2(7,8))$

$= T_1(7 + (-4), 8 + 3)$

$= T_1(3,11)$

$= (3 + 1, 11 + 2)$

$= (4,13)$ हुन्छ ।

अथवा, $T_1oT_2 = \binom{1}{2} + \binom{-4}{3} = \binom{1-4}{2+3} = \binom{-3}{5}$

$\therefore T_1oT_2\ (7,8) = (7 + (-3), 8 + 5)$

$= (4,13)$ हुन्छ ।

(c) यहाँ, $E_1[(1,2), 2]$ र $E_2[(1,2), 5]$ छन् ।

$E_1 o\, E_2 = E[(1,2), 2 \times 5]$

अथवा, $E_1 o\, E_2 = E[(1,2), 10]$ हुन्छ ।

$(x, y) \xrightarrow{E[(1,2),10]} (10(x - 1) + 1, 10(y - 2) + 2)$

$= (10x - 9, 10y - 18)$

$\therefore\quad E_1oE_2\ (2,4) = (10 \times 2 - 9, 10 \times 4 - 18)$

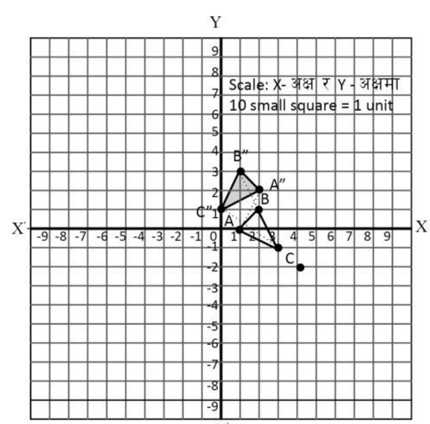
$= (20 - 9, 40 - 18)$

$= (11, 22)$ हुन्छ ।

2. शीर्षबिन्दुहरू A(1, 0), B(2, 1) र C(3, -1) भएको त्रिभुजलाई $T\binom{1}{2}$ ले विस्थापन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

उक्त प्रतिबिम्बलाई फेरि x = 2 मा परावर्तन गर्नुहोस् । ABC र अन्तिम प्रतिबिम्ब A"B"C" लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान



यहाँ, $P(x, y) \xrightarrow{T\binom{1}{2}} P'(x+1, y+2)$

त्यसैले, $A(1,0) \xrightarrow{T\binom{1}{2}} A'(2, 2)$

$B(2,1) \xrightarrow{T\binom{1}{2}} B'(3, 3)$

$C(3, -1) \xrightarrow{T\binom{1}{2}} C'(4, 1)$

फेरि, $P(x, y) \xrightarrow{x=2} (2\times2-x, y) = (4-x, y)$

अब, $A'(2,2) \overset{x=2}{\rightarrow} A''(4\text{-}2,2) = A''(2,2)$

$B'(3,3) \overset{x=2}{\rightarrow} B''(4\text{-}3,3) = B''(1,3)$

$C'(2,2) \overset{x=2}{\rightarrow} C''(4\text{-}4,1) = C''(0,1)$

ΔABC रA"B"C" लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा चित्रमा दिइए जस्तै आकृतिहरू देखापर्छन् ।

3. E ले केन्द्र(-3, -4) बाट हुने नापो 2 भएको विस्तारीकरण र R ले y=0 मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ । संयुक्त स्थानान्तरण EoR ले P(x, y) लाई कुन बिन्दुमा स्थानान्तरण गर्दछ ? शीर्षबिन्दुहरू A(2, 0), B(3, 1) र C(1, 1) भएको ΔABC लाई EoR द्वारा स्थानान्तरण गर्नुहोस् । ΔABC र प्राप्त प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, E[(-3, -4), 2] र R(y=0) दिइएको छ ।

हामीलाई थाहा छ, $P(x, y) \xrightarrow{E[(a,b),k]} P'(k(x\text{-}a)+a,\ k(y\text{-}b)+b)$

र $P(x, y) \overset{y=0}{\rightarrow} P'(x, -y)$

यहाँ, EoR(x,y) = E[R(x ,y)]

$$= E(x, -y)$$
$$= [2(x-(-3))-3, 2(-y-(-4))-4)]$$
$$= 2(x+3)-3,\ 2\,(y+4)-4)$$
$$= (2x+6-3, 2y+8-4)$$
$$= (2x+3, 2y+4)$$

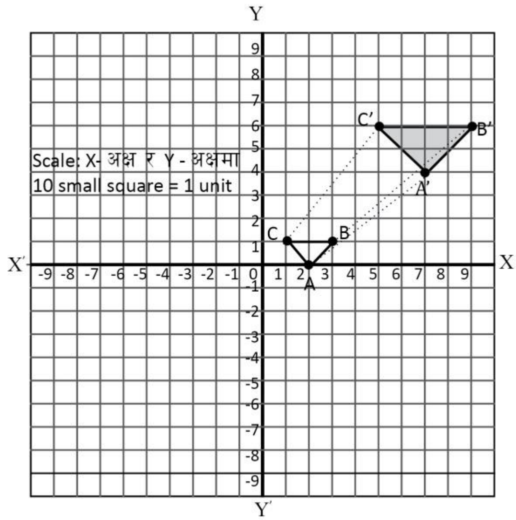
त्यसैले EoR ले P(x, y) लाई P' (2x + 3, -2y + 4) मा स्थानान्तरण गर्दछ ।
त्यसैले,

$A(2,0) \xrightarrow{EoR} A'(2\times2+3,\ 2\times0+4)$
$= A'(7,4)$

$B(3,1) \xrightarrow{EoR} B'(2\times3+3,\ 2\times1+4)$
$= B'(9,6)$

$C(1,1) \xrightarrow{EoR} C'(2\times1+3,\ 2\times1+4)$
$= C'(5, 6)$

ΔABC र ΔA'B'C' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



4. यदि R_1 ले उद्गम बिन्दुको वरिपरि +90° मा हुने परावर्तन र R_2 ले उद्गम बिन्दुको वरिपरि -270° मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछन् भने संयुक्त स्थानान्तरण R_2oR_1 ले केलाई जनाउँछ ? R_2oR_1 द्वारा शीर्षबिन्दुहरू A(-4, 0), B(-6, 2), C(-4, 3) र D(2, 5) भएको चतुर्भुजलाई स्थानान्तरण गर्नुहोस् । प्राप्त प्रतिबिम्ब र वस्तुलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $R_1 = [(0,0) + 90°]$ र $R_2 = [(0,0) - 270°]$

$R_2oR_1 = [(0,0) - 270° + 90°]$

$= [(0,0) - 180°]$

त्यसैले संयुक्त स्थानान्तरणले उद्गम बिन्दुको वरिपरि 180° मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ ।

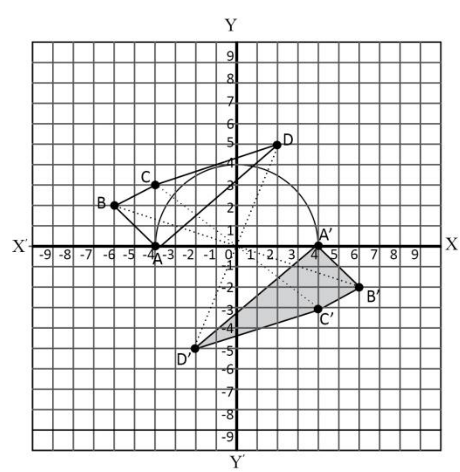
फेरि, $P(x, y) \overset{RoR_1[(0,0)-180°]}{\rightarrow} P'(-x, -y)$

त्यसैले, $A(-4,0) \overset{R_2oR_1}{\rightarrow} A'(4,0)$

$B(-6,2) \overset{R_2oR_1}{\rightarrow} B'(6-2)$

$C(-4,3) \overset{R_2oR_1}{\rightarrow} C'(4-3)$

$D(2,5) \overset{R_2oR_1}{\rightarrow} D'(-2,-5)$



अभ्यास 7.1

1. (a) रेखाहरू $x = 3$ र $x = 5$ मा हुने परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरणले कुन स्थानान्तरण दिन्छ ?

   (b) परिक्रमण $R_1[(0,0),80°]$ र R_2 [(0,0), 100°] ले दिने संयुक्त स्थानान्तरण R_1oR_2 के हुन्छ ?

   (c) विस्तार $E_1[(a,b),k_1]$ र E_2 $[(a,b),k_2]$ को संयुक्त स्थानान्तरण E_1oE_2 के हुन्छ ?

   (d) यदि विस्थापनहरू $T_1\binom{a_1}{b_1}$, र $T_2\binom{a_2}{b_2}$ भए T_1oT_2 कति हुन्छ ?

2. तल दिइएको तालिकामा स्थानान्तरणहरूको विवरण दिइएको छ ।

R_1	x- अक्षमा परावर्तन
R_2	y-अक्षमा परावर्तन
R_3	x=3 मा हुने परावर्तन
R_4	y=-2 मा हुने परावर्तन
r_1	उद्गम बिन्दु वरिपरि 90° मा हुने धनात्मक परिक्रमण
r_2	उद्गम बिन्दु वरिपरि 270° मा हुने धनात्मक परिक्रमण
r_3	उद्गम बिन्दु वरिपरि 180° मा हुने धनात्मक परिक्रमण
T_1	$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ को विस्थापन
T_2	$\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$ को विस्थापन
E_1	केन्द्र (0,0) र नापो -2 भएको विस्तार
E_2	केन्द्र (0,0) र नापो $\frac{3}{2}$ भएको विस्तार
E_3	केन्द्र (2,3) र नापो 3 भएको विस्तार
E_4	केन्द्र (2,3) र नापो $\frac{2}{3}$ भएको विस्तार

तालिकामा दिइएको विवरणका आधारमा निम्न स्थानान्तरणहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) $R_1oR_2(4, 6)$ (b) $R_2oR_1(4, 6)$ (c) $R_1oR_4(-2, 3)$

(d) $R_3oR_2(-3, -4)$ (e) $r_1or_3(2, -3)$ (f) $r_2or_3(2, 4)$

(g) $r_1or_2(-3, 5)$ (h) $T_1oT_2(3, 4)$ (i) $T_2oT_1(-4, -8)$

(j) $E_1oE_2(5, 6)$ (k) $E_2oE_1(-2, 3)$ (l) $E_4oE_3(-1, 5)$

3.(a) शीर्षबिन्दुहरू A(2, -1), B(2, 1) र C(4, -1) भएको ΔABC लाई पहिले रेखा $y – x = 0$ मा परावर्तन गर्नुहोस् । प्राप्त प्रतिबिम्बलाई पुनः उद्गम बिन्दुको वरिपरि अर्धपरिक्रमण गराउनुहोस् । प्राप्त अन्तिम प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" र ΔABC लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(b) शीर्षबिन्दुहरू A(1, 2), B(4, -1) र C(2, 5) भएको त्रिभुजलाई क्रमशः रेखा $x = -3$ र $y = 4$ मा परावर्तन गरिएको छ । उक्त संयुक्त स्थानान्तरणबाट प्राप्त प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" र ΔABC लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(c) ΔMNP का शीर्षबिन्दुहरू M(1, 1), N(3, 1) र P(2, 3) को प्रतिबिम्ब उद्गम बिन्दुको वरिपरि 90° धनात्मक परिक्रमणअनुसार पत्ता लगाउनुहोस् । प्राप्त प्रतिबिम्बलाई पुनः (-1, 2) केन्द्र र नापो 2 भएको विस्तारद्वारा विस्तारीकरण गर्नुहोस् । अन्तिम प्रतिबिम्ब ΔM"N"P" र वस्तु ΔMNP लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4.(a) शीर्षबिन्दुहरू A(1, 2), B(4, -1) र C(2, 5) भएको त्रिभुजलाई रेखाहरू $r_1(x = 4)$ र $r_2(x = -1)$ मा लगातार परावर्तन गरिएको छ । दुवै स्थानान्तरणहरूले जनाउने संयुक्त स्थानान्तरण r_2or_1 पत्ता लगाउनुहोस् । r_2or_1 द्वारा प्राप्त प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' र वस्तु ΔABC लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(b) शीर्षबिन्दुहरू A(2, 2), B(6, 2), C(6, 6 र D(2, 6) भएको चतुर्भुज ABCD लाई पहिले x-अक्षमा र त्यसपछि y-अक्षमा परावर्तन गराउँदा संयुक्त स्थानान्तरणद्वारा बन्ने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । वस्तु र प्रतिबिम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् साथै संयुक्त स्थानान्तरण के हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

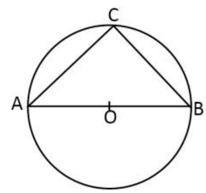
(c) A(3, 0), B(4, 2), C(2, 4) र D(1, 2) छन् । यसलाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि +180° मा परिक्रमण गरेपछि प्राप्त प्रतिबिम्बलाई पुनः उद्गमबिन्दुको वरिपरि 90° ले धनात्मक दिशामा परावर्तन गरिएको छ । संयुक्त स्थानान्तरणद्वारा प्राप्त प्रतिबिम्ब चतुर्भुज A'B'C'D' र चतुर्भुज ABCD लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. हाम्रो दैनिक जीवनमा परावर्तन, परिक्रमण विस्थापन र विस्तार प्रयोग भएका दुई दुई ओटा उदाहरणहरू खोजी गर्नुहोस् । एकै पटक दुई ओटा अथवा एकपछि अर्को प्रयोग भएको उदाहरण पनि खोजी गरी प्राप्त नतिजाका बारेमा छोटकरीमा लेख्नुहोस् ।

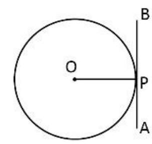
7.2. विपरीत स्थानान्तरण र विपरीत वृत्त (Inversion Transformation and Inversion Circle)

तल दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गरी उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

- केन्द्र (0,0) र अर्धव्यास 4 एकाइ भएको वृत्तको समीकरण के हुन्छ ?
- समीकरण $(x-2)^2+(y+3)^2 = 49$ ले जनाउने वृत्तको केन्द्र र अर्धव्यास कति कति हुन्छ ?
- चित्रमा O वृत्तको केन्द्र हो । $\measuredangle$ACB को मान कति हुन्छ ?

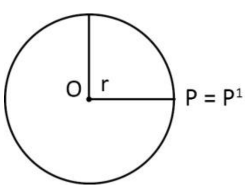


- O केन्द्र बिन्दु भएको वृत्तमा बिन्दु P स्पर्श बिन्दु र AB स्पर्श रेखा हो । OP र AB को सम्बन्ध के हुन्छ ?

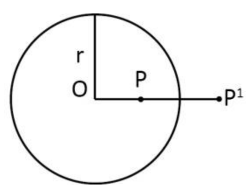


- त्रिभुजहरूको समरूपता र रेखीय सममिति भन्नाले के बुझिन्छ ?

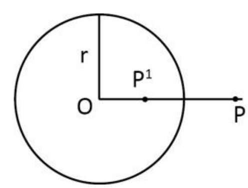
स्थानान्तरण ज्यामितिले एउटा समतलमा रहेका ज्यामितीय आकृतिमा प्रत्येक बिन्दुलाई त्यो आकृतिको प्रतिबिम्बमा रहेका बिन्दुहरूमा एक एक सङ्गतिता (one to one correspondence) का आधारमा मापन गर्छ । त्यस्तै उत्क्रम (inversion) ले वृत्तको अवधारणाका आधारमा वस्तु “P”लाई प्रतिबिम्ब “P'”मा स्थानान्तरण गर्दछ ।



चित्र 7.1 (a)



चित्र 7.1(b)



चित्र 7.1 (c)

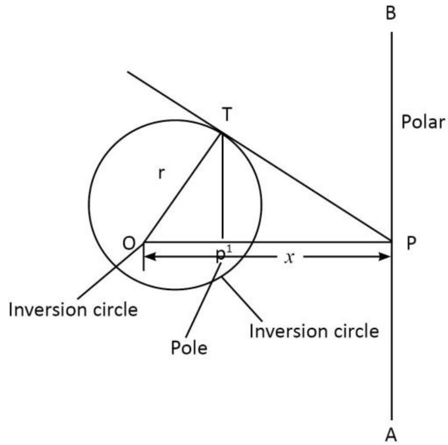
माथि दिइएका चित्रहरूमा O वृत्तको केन्द्र हो । त्यस्तै वृत्तको अर्धव्यास r छ । वस्तु (P) र यसको प्रतिबिम्ब (P^1) को अवस्था वृत्तको केन्द्र O को सापेक्ष (a), (b) र (c) मा देखाइएको छ ।

चित्र 7.1 (a) मा P र P' एउटै स्थानमा छन् अथवा वृत्तको परिधिमा छन् ।

चित्र 7.1(b) मा बिन्दु P वृत्तको भित्री क्षेत्रमा छ भने P' वृत्तको बाहिरी क्षेत्रमा छ ।

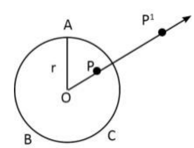
चित्र 7.1 (c) मा बिन्दु P वृत्तको बाहिरी क्षेत्रमा छ भने बिन्दु P' भित्री क्षेत्रमा छ ।

प्रत्येक चित्रमा $OP \times OP' = r^2$ सर्त मान्य हुन्छ । यहाँ $P \rightarrow P'$ अथवा $P' \rightarrow P$ मा P र P' लाई वृत्तका सापेक्ष उत्क्रम (inversion) बिन्दुहरू भनिन्छ ।



माथि दिइएको चित्रमा वृत्तको केन्द्र O लाई उत्क्रम केन्द्र (inversion centre) र वृत्तलाई उत्क्रम वा विपरीत वृत्त (inversion circle) भन्दछन् । रेखा AB लाई ध्रुवीय अक्ष (polar) र बिन्दु P लाई ध्रुव (pole) भन्छन् ।

* परिभाषा: मानौँ ABC एउटा वृत्त जसको केन्द्र (0,0) र अर्धव्यास 'r' एकाइ छ । कुनै बिन्दु P (केन्द्रबाहेक) का लागि एक समान बिन्दु P' वृत्तको केन्द्र बिन्दु जोड्ने रेखामा पर्छ र O, P, P' ले $OP \times OP' = r^2$ अवस्थालाई सन्तुष्ट गर्छन् । यदि r = 1 एकाइ भए $OP \times OP' = 1$ अथवा, $OP' = \frac{1}{OP}$ हुन्छ । बिन्दु P' लाई वृत्तका सापेक्ष बिन्दु P को उत्क्रम (inversion) बिन्दु भन्दछन् ।



उदाहरणका लागि केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्त र रेखा AB छन् । केन्द्रबिन्दु O, P र P' समरेखीय बिन्दुहरू छन् । OP लाई व्यास मानी खिचिएको वृत्तमा कुनै बिन्दु Q र यसको उत्क्रम (inversion) बिन्दु रेखा AB मा Q' छ ।

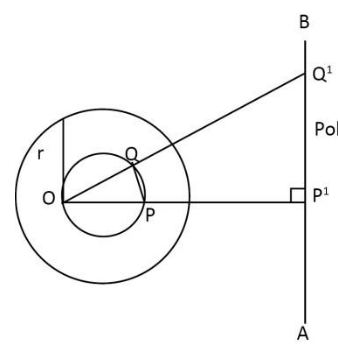
हामीलाई थाहा छ, $OP \times OP' = r^2$ र $OQ \times OQ' = r^2$

जहाँ r वृत्तको अर्धव्यास हो ।

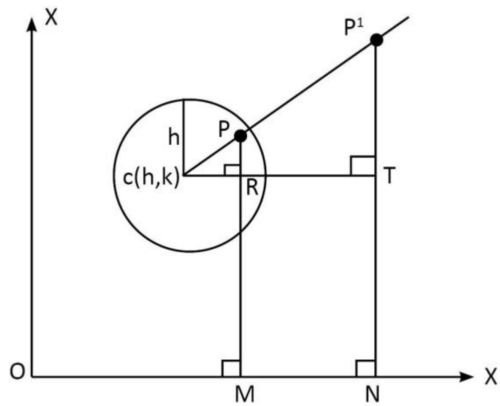
त्यसैले $OP \times OP' = OQ \times OQ'$

अथवा, $\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'}$

यो सम्बन्ध समरूप त्रिभुजहरू OQP र OP'Q' का सङ्गती भुजाहरूको अनुपात लिएर पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ ।



दिइएको बिन्दुको उत्क्रम बिन्दु (inversion point) पत्ता लगाउने तरिका



मानौं C(h,k) वृत्तको केन्द्र र r अर्धव्यास छ । केन्द्र C बाहेक कुनै बिन्दु P को उत्क्रम बिन्दु (inversion point) P' छ । P र P' का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (x, y) र (x', y') छन् ।

C, P र P' समरेखीय बिन्दुहरू हुन् । PM⊥OX र P'N⊥OX खिचौँ ।

त्यस्तै, CR⊥PM र CT⊥P'N खिचौँ

ΔCRP र ΔCTP' समरूप त्रिभुजहरू हुन् ।

यहाँ, ΔCRP मा, CR=x-h, PR=y-k र CP=$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$ छन् ।

त्यस्तै, ΔCTP' मा, CT=x'-h, र P'T=y'-k हुन्छ ।

समरूप त्रिभुजका सङ्गती भुजाहरूको अनुपात लिँदा,

$$\frac{CT}{CR}=\frac{P'T}{PR}=\frac{CP'}{CP}$$

अथवा, $\frac{CT}{CR}=\frac{P'T}{PR}=\frac{CP'}{CP}\times\frac{CP}{CP}$

अथवा, $\frac{CT}{CR}=\frac{P'T}{PR}=\frac{r^2}{CP^2}$ [∴ CP×CP'=r^2]

अथवा, $\frac{x'-h}{x-h}=\frac{y'-k}{y-k}=\frac{r^2}{(x-h)^2+(y-k)^2}$

अथवा, $\frac{x'-h}{x-h}=\frac{r^2}{(x-h)^2+(y-k)^2}$ र $\frac{y'-k}{y-k}=\frac{r^2}{(x-h)^2+(y-k)^2}$

[पहिलो र दोस्रो अनुपातलाई क्रमशः तेस्रोसँग बराबर गर्दा]

अथवा, , $x'-h=\frac{r^2(x-h)}{(x-h)^2+(y-k)^2}$ र $y'-k=\frac{r^2(y-k)}{(x-h)^2+(y-k)^2}$

अथवा, $x'=\frac{r^2(x-h)}{(x-h)^2+(y-k)^2}+h$ र $y'=\frac{r^2(y-k)}{(x-h)^2+(y-k)^2}+k$

यदि वृत्तको केन्द्र उद्गम बिन्दु भएमा (h,k)=(0,0) हुन्छ ।

त्यसैले, $x' = \frac{r^2x}{x^2+y^2}$ र $y' = \frac{r^2y}{x^2+y^2}$ हुन्छ ।

उदाहरणहरू

1. वृत्त $x^2+y^2 = 9$ का सापेक्ष तल दिइएका बिन्दुहरूको उत्क्रम बिन्दु (inversion point) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) (3,0) (b) (0,3) (c) (6,9) (d) (-3,-6)

समाधान

यहाँ वृत्त $x^2 + y^2 = 9$

अथवा, $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2$ को

केन्द्र (h, k) = (0, 0) र अर्धव्यास r = 3 एकाइ छ ।

(a) यहाँ (x, y) = (3,0), (x', y')=?

हामीलाई थाहा छ, $x' = \frac{r^2x}{(x-h)^2+(y-k)^2} + h$

$= \frac{9\times3}{(3-0)^2+(0-0)^2} = 3$

$y' = \frac{r^2y}{(x-h)^2+(y-k)^2} + k$

$= \frac{9\times0}{(3-0)^2+(0-0)^2}$

$= 0$

$(x', y') = (3,0)$

$\therefore$ (3, 0) को वृत्त $x^2+y^2 = 9$ का सापेक्ष उत्क्रम बिन्दु (inversion point) (3, 0) नै हुन्छ ।

(b) यहाँ (x,y) = (0, 3), (x', y') = ?

हामीलाई थाहा छ, $x' = \frac{r^2x}{(x-h)^2+(y-k)^2}$

$= \frac{9\times0}{(0-0)^2+(3-0)^2} = 0$

र $y' = \frac{r^2y}{(x-h)^2+(y-k)^2}$

$= \frac{9\times3}{(0-0)^2+(3-0)^2} = 3$

$\therefore$ (x', y') = (0, 3)

(c) यहाँ (x, y) = (6, 9), (x', y') = ?

हामीलाई थाहा छ, $x' = \frac{r^2x}{(x-h)^2+(y-k)^2} + h$

$= \frac{9\times6}{(6-0)^2+(9-0)^2}+0$

$= \frac{9\times6}{36+81}$

$= \frac{54}{117}$

$= \frac{6}{13}$

र $y' = \frac{r^2y}{(x-h)^2+(y-k)^2} + k$

$= \frac{9\times9}{(6-0)^2+(9-0)^2}+0$

$= \frac{9\times9}{117}$

$= \frac{9}{13}$

$\therefore (x',y') = (\frac{6}{13},\frac{9}{13})$.

(d) यहाँ (x,y) = (-3,-6), (x',y') = ?

हामीलाई थाहा छ, $x' = \frac{r^2x}{(x-h)^2+(y-k)^2} + h$

$= \frac{9\times(-3)}{(-3-0)^2+(-6-0)^2}+0$

$= \frac{-27}{9+36}$

$= \frac{-27}{45}$

$= \frac{-3}{5}$

र $y' = \frac{r^2y}{(x-h)^2+(y-k)^2} + k$

$= \frac{9\times(-6)}{(-3-0)^2+(-6-0)^2} + 0$

$= \frac{-54}{45}$

$= \frac{-6}{5}$

$\therefore (x', y') = (\frac{-3}{5},\frac{-6}{5})$.

2. बिन्दु (4,5) को केन्द्र (2,3) र उत्क्रम (inversion) अर्धव्यास 4 एकाइ भएको वृत्तका सापेक्ष उत्क्रम बिन्दु (inversion point) पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, केन्द्र (h, k) = (2,3), अर्धव्यास (r) = 4 एकाइ

बिन्दु P(x, y) = (4, 5), x = 4, y = 5, उत्क्रम बिन्दु (inversion point) P'(x', y') = ?

हामीलाई थाहा छ, $x' = \frac{r^2(x-h)}{(x-h)^2+(y-k)^2} + h$

अथवा, $x' = \frac{4^2 \times (4-2)}{(4-2)^2+(5-3)^2} + 2$

$= \frac{16 \times 2}{4+4} + 2$

$= \frac{32}{8} + 2$

$= 4 + 2 = 6$

$y' = \frac{r^2(x-h)}{(x-h)^2+(y-k)^2} + k$

$= \frac{4^2 \times (5-3)}{8} + 3$

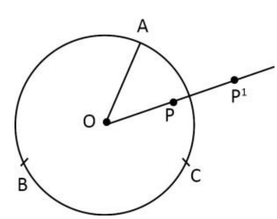
$= \frac{16 \times 2}{8} + 3$

$= 4 + 3 = 7$

∴ दिइएको वृत्तको सापेक्ष बिन्दु (4, 5) को उत्क्रम बिन्दु (inversion point) (4, 4) हुन्छ ।

अभ्यास : 7.2

1. दिइएको चित्रका आधारमा तल दिइएका अवधारणाहरू व्याख्या गर्नुहोस् ।



(a) उत्क्रम वा विपरित वृत्त (inversion circle)

(b) उत्क्रम अर्धव्यास (inversion radius)

(c) बिन्दु P को उत्क्रम (inversion) बिन्दु

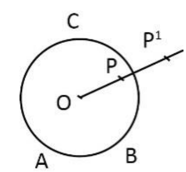
(d) बिन्दु P' को उत्क्रम (inversion) बिन्दु

(e) OP, OP' र OA बिचको सम्बन्ध

2. तल दिइएको जानकारीका आधारमा उत्क्रम (inversion) बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

	बिन्दु	उत्क्रम वृत्तका समीकरण	उत्क्रम बिन्दु
(a)	A (3, 4)	$x^2 + y^2 =1$	A' = ?
(b)	B (4, 0)	$x^2 + y^2 = 4$	B' = ?
(c)	C (-7, 0)	$x^2 + y^2 = 49$	C' = ?
(d)	D (0, 45)	$x^2 + y^2 = 25$	D' = ?
(e)	E $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$x^2 + y^2 = 1$	E' = ?
(f)	F $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$	$x^2 + y^2 = 16$	F' = ?
(g)	G (-4, -5)	$x^2 + y^2 = 10$	G' = ?

3. (a) चित्रमा, उत्क्रम (inversion) वृत्त ABC को केन्द्र O र P को उत्क्रम (inversion) बिन्दु P' छ । यदि वृत्तको समीकरण $x^2+y^2 = 36$ र OP = 4 एकाइ भए OP' पत्ता लगाउनुहोस् ।



(b) एउटा उत्क्रम (inversion) वृत्तको केन्द्र C(2, 3) र परिधिमा पर्ने बिन्दु A(6, 7) छ । बिन्दु Q' को उत्क्रम (inversion) बिन्दु Q छ । यदि OQ = 8 एकाइ भए OQ' पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. तल दिइएको अवस्थामा प्रत्येक बिन्दुको उत्क्रम बिन्दु (inversion point) पत्ता लगाउनुहोस् ।

	बिन्दु (point)	उत्क्रम वृत्त (inversion circle) को समीकरण	उत्क्रम बिन्दु (inversion point)
(a)	M(0, 4)	$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$	M' = ?
(b)	N(3, 4)	$x^2 + y^2 - 4x - 6y – 23 = 0$	N' = ?
(c)	P(-1, -3)	$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11= 0$	P' = ?

7.3 मेट्रिक्सको प्रयोग गरी स्थानान्तरण (Transformation using matrix)

एउटा 2 ×1 मेट्रिक्स प्रयोग गरी स्थानान्तरण बिन्दु (x,y) लाई मेट्रिक्सका रूपमा लेख्दा $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ को क्रम 2×1 हुन्छ । बिन्दु P(x,y) लाई विस्थापन भेक्टर T$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा प्रतिबिम्ब (x+a, y+b) हुन्छ । यसलाई मेट्रिक्सको जोडका रूपमा लेख्दा $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

यस प्रकारको स्थानान्तरणलाई 2×1 मेट्रिक्स प्रयोग गरी स्थानान्तरण भनिन्छ ।

2×2 मेट्रिक्स प्रयोग गरी स्थानान्तरण

- बिन्दु P(x, y) लाई x- अक्षमा परावर्तन गर्दा प्राप्त प्रतिबिम्ब के हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।
- त्यस्तै बिन्दु P(x, -y) लाई x+y=0 रेखामा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्ब के हुन्छ ?

P'(-x, -y) लाई क्रमशः x र y को रूपमा युगपद रेखीय समीकरण बनाउँदा कस्तो हुन्छ ? उक्त समीकरणहरूलाई मेट्रिक्सको गुणनका रूपमा कसरी लेख्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

हामीलाई थाहा छ, P(x', y) लाई x + y = 0 रेखामा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्ब P'(-y, -x) प्राप्त हुन्छ ।

P'(-y, -x) लाई x र y को रूपमा युगपद रेखीय समीकरण बनाउँदा

-y = 0.x + (-1)y………………(i)

-x = (-1).x + 0.y……………..(ii) प्राप्त हुन्छ ।

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्सको रूपमा व्यक्त गर्दा,

$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ हुन्छ ।

जहाँ, $\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ र $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लाई क्रमशः प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स, स्थानान्तरण मेट्रिक्स र वस्तु मेट्रिक्स भनिन्छ ।

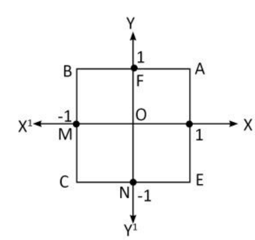
त्यसैले, प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स = स्थानान्तरण मेट्रिक्स × वस्तु मेट्रिक्स

अथवा $(I)_{2\times n} = (M)_{2\times 2} \times (O)_{2\times n}$

यहाँ n ले वस्तु र प्रतिबिम्बमा भएका शीर्षबिन्दुहरूको सङ्ख्यालाई जनाउँछ । n को मान रेखाखण्ड, त्रिभुज र चतुर्भुजका लागि क्रमशः 2, 3 र 4 हुन्छ ।फरक फरक स्थानान्तरणमा प्रयोग गरिने 2×2 मेट्रिक्सहरूको विवरण तल तालिकामा दिइए झैँ हुन्छ । $(I)_{2\times n} = (m)_{2\times 2} \times (O)_{2\times n}$सूत्र प्रयोग गरी पुस्टि गर्नुहोस् ।

क्र.स.	स्थानान्तरण	वस्तु बिन्दु	प्रतिबिम्ब बिन्दु	2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स
1.	x- अक्षमा हुने परावर्तन	P(x, y)	P'(x, -y)	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$
2.	y- अक्षमा हुने परावर्तन	P(x, y)	P'(-x, +y)	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
3.	x-y=0 रेखामा हुने परावर्तन	P(x, y)	P'(x, y)	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$
4.	x+y=0 रेखामा हुने परावर्तन	P(x, y)	P'(-y, -x)	$\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$
5.	$[(0,0) + 90°]$ अथवा $[(0,0) + 270°]$ मा हुने परिक्रमण	P(x, y)	P'(-y + x)	$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$
6.	$[(0,0) - 90°]$ अथवा $[(0,0) - 270°]$ मा हुने परिक्रमण	P(x, y)	P'(+y, -x)	$\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$
7.	$[(0,0), 180°]$ मा हुने परिक्रमण	P(x, y)	P'(-x,-y)	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$
8.	$[(0,0), k]$ द्वारा हुने विस्तार	P(x, y)	P'(kx, ky)	$\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}$

एकाइ वर्ग



चित्रमा OEAF, OFBM, OMCN र ONDE छन् । OEAF लाई मात्र एकाइ वर्ग भनी परिभाषित गरिन्छ । उक्त वर्गलाई मेट्रिक्सका स्वरूपमा लेख्दा, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ हुन्छ ।

उदाहरणहरू

1. बिन्दु (4, 3) लाई विस्थापन भेक्टर $\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा हुने प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, वस्तु बिन्दु = (4, 3), विस्थापन भेक्टर= $\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ प्रतिबिम्ब बिन्दु = ?

अब विस्थापनलाई 2 x 1 को मेट्रिक्सको स्वरूपमा लेख्दा

प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स = वस्तु मेट्रिक्स + विस्थापन भेक्टर (मेट्रिक्स)

अथवा, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+(-4) \\ 3+2 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

∴ प्रतिबिम्ब =(0,5)

2. यदि A(1, 3), B(4, 3) र C(3, 0) त्रिभुज ABC का शीर्ष बिन्दुहरू हुन भने ΔABC का शीर्षबिन्दुहरूलाई मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गरी प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, वस्तु मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

स्थानान्तरण मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स = ?

हामीलाई थाहा छ ,

प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स = (स्थानान्तरण मेट्रिक्स) x (वस्तु मेट्रिक्स)

अथवा, $(I)_{2\times3} = (m)_{2\times2} \times (o)_{2\times3}$

अथवा, $(I)_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+0 & 4+0 & 3+0 \\ 0+6 & 0+6 & 0+0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

∴ A'(1,6), B'(4,6) र C' (3,0) प्रतिबिम्ब निर्देशाङ्कहरू हुन् ।

3. आयत $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ लाई एकाइ वर्गमा स्थानान्तरण गर्ने 2 × 2 मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, वस्तु मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times4}$

प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times4}$

मानौँ स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}_{2\times2}$

हामीलाई थाहा छ , $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times4} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}_{2\times2} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} m_{11}\times0 & m_{12}\times0 & m_{11}\times3+m_{12}\times0 & m_{11}\times4+m_{12}\times1 & m_{11}\times1+m_{12}\times1 \\ m_{21}\times0 & m_{22}\times0 & m_{21}\times3+m_{22}\times0 & m_{21}\times4+m_{22}\times1 & m_{21}\times1+m_{22}\times1 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3m_{11} & 4m_{11}+m_{12} & m_{11}+m_{12} \\ 0 & 3m_{21} & 4m_{21}+m_{22} & m_{21}+m_{22} \end{pmatrix}$

क्रमागत सदस्यहरूको मान बराबर गर्दा,

अथवा, $3m_{11} = 1$

अथवा, $m_{11} = \frac{1}{3}$

र $3m_{21} = 0$

अथवा, $m_{21} = 0$

पुनः $m_{11} + m_{12} = 0$

अथवा, $m_{12} = -m_{11} = -\frac{1}{3}$

फेरि, $m_{21} + m_{22} = 1$

अथवा, $m_{22} = 1 - m_{21} = 1 - 0 = 1$

अतः स्थानान्तरण मेट्रिक्स, $m = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$

4. रेखा y = x मा परावर्तन गरेपछि उद्गम बिन्दुको वरिपरि 90° धनात्मक दिशामा परिक्रमण गराउँदा हुने संयुक्त स्थानान्तरण रेखा y-अक्षमा हुने परावर्तनसँग समतुल्य हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, रेखा y = x मा हुने परावर्तनसँग सम्बन्धित मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ = A मानौँ

उद्गम बिन्दुको वरिपरि 90° धनात्मक दिशामा हुने परिक्रमणसँग सम्बन्धित मेट्रिक्स

= $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ = B मानौँ

y-अक्षमा हुने परावर्तन = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = C मानौँ

यहाँ, AB = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{pmatrix} 0\times0+1\times1 & 0\times-1+1\times0 \\ 1\times0+0\times1 & 1\times-1+0\times0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq C$

तर BA $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\times0+(-1)\times1 & 0\times1+(-1)\times0 \\ 1\times0+0\times1 & 1\times1+0\times0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 -1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

= C° प्रमाणित भयो ।

गणितीय क्रियामा (fog)(x) मा g को काम पहिले र f को काम पछि हुन्छ तर BA मा मेट्रिक्स गुणनको नियम लाग्छ ।

5. बिन्दु (x, y) लाई (3x, x-3y) मा स्थानान्तरण गर्ने 2×2 मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, वस्तु मेट्रिक्स (O)= $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times1}$

प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स (I)= $\begin{pmatrix} 3x \\ x-3y \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब मेट्रिक्सलाई x र y को पदमा युगपत रेखीय समीकरण बनाउँदा,

3x=3×x+0×y……………………………………….(i)

x-3y=1×x+(-3)×y…………………………………(ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्सका स्वरूपमा लेख्दा,

$\begin{pmatrix} 3x \\ x-3y \end{pmatrix}_{2\times1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

∴ 2 × 2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ हुन्छ ।

अभ्यासः 7.3

1. (a) कुनै वस्तुलाई x-अक्षमा परावर्तन गर्ने 2×2 मेट्रिक्स लेख्नुहोस् ।

(b) कुनै वस्तुको [+90°, (0,0)] परिक्रमणसँग सम्बन्धी मेट्रिक्स लेख्नुहोस् ।

(c) कुनै (2×2) क्रमको मेट्रिक्सलाई (2×2) क्रमको मेट्रिक्सले गुणन गर्दा कुन क्रमको मेट्रिक्स प्राप्त हुन्छ ?

(d) मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ले कुन स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ?

2. बिन्दु A(-4, 6) लाई तल दिइएका मेट्रिक्सहरूद्वारा स्थानान्तरण गर्नुहोस् ।

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

3.(a) रेखाखण्ड PQ का निर्देशाङ्कहरू P(3, 4) र Q(8, 4) छन् । PQ लाई मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा प्राप्त प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।

(b) A(2, 3), B (2, 6), C (5, 2) र D (5, 6) शीर्षबिन्दुहरू भएको आयतलाई मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा चतुर्भुज A'B'C'D' प्राप्त हुन्छ । A', B', C' र D' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) एकाइ वर्गलाई मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा चतुर्भुज प्राप्त हुन्छ । O', A', B' र C' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) समानान्तर चतुर्भुज $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ लाई एकाइ वर्गमा स्थानान्तरण गर्ने मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एकाइ वर्ग $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ लाई समानान्तर चतुर्भुज $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ मा स्थानान्तरण गर्ने एउटा 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) एकाइ वर्गलाई समानान्तर चतुर्भुज $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ मा स्थानान्तरण गर्ने एउटा 2×2 मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

5.(a) उद्गम बिन्दु वरिपरि -90° मा परिक्रमण गरी रेखा x = 0 मा परावर्तन गर्दा हुने संयुक्त स्थानान्तरण y = -x मा हुने परावर्तनसँग समतुल्य हुन्छ भनी मेट्रिक्स स्थानान्तरणद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(b) मेट्रिक्स स्थानान्तरण प्रयोग गरी उद्गम बिन्दुको वरिपरि + 90° धनात्मक दिशामा परिक्रमण गरी y-अक्षमा परावर्तन गर्दा हुने संयुक्त स्थानान्तरण रेखा y = x मा हुने परावर्तनसँग समतुल्य हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

6.(a) बिन्दु (x, y) लाई (2x - y, 3x + 4y) मा स्थानान्तरण गर्ने 2×2 मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) बिन्दु (x, y) लाई (x - 2y, 2x - 3y) मा स्थानान्तरण गर्ने मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. कुनै एउटा त्रिभुजाकार आकृतिको टुक्रालाई लेखाचित्रमा राखी उक्त त्रिभुजका शीर्षबिन्दुका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त त्रिभुजलाई फरक फरक कुनै चार ओटा 2 x 2 मेट्रिक्सद्वारा स्थानान्तरण गर्नुहोस् । यसरी स्थानान्तरणबाट प्राप्त प्रतिबिम्बहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । उक्त लेखाचित्रबाट ती त्रिभुजहरू काट्नुहोस् । वस्तु र प्रतिबिम्बहरूलाई एउटै चार्टपेपरमा टाँसी आफूले गरेको काम कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

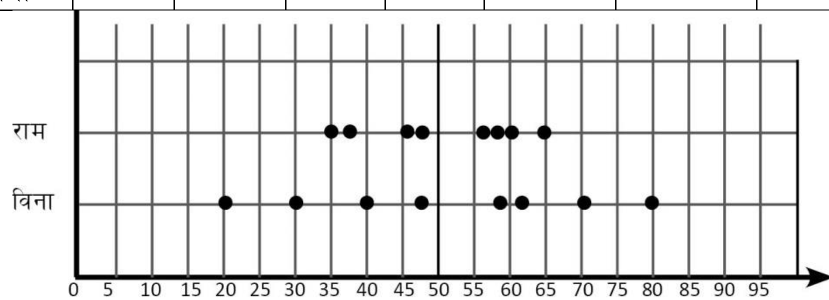
एकाइ 8

तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

8.0 पुनरावलोकन (Review)

कक्षा 9 का दुई जना विद्यार्थीहरूले आठ ओटा विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई तल लेखा चित्रमा देखाइएको छ :

विद्यार्थी	विषय र प्राप्ताङ्क							
	नेपाली	अङ्ग्रेजी	गणित	विज्ञान	सामाजिक	जनसङ्ख्या	शिक्षा	अर्थशास्त्र
राम	65	59	60	58	47	46	38	35
बिना	48	30	40	80	20	70	59	61



राम र बिनाको प्राप्ताङ्क विवरण

माथिका विवरणहरू अध्ययन गरी निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) राम र बिनाको कुल प्राप्ताङ्क कति कति छ ? औसत अङ्कहरू पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) कसको प्राप्ताङ्कको वितरण बढी छरिएको छ ?

(ग) दुई विद्यार्थीहरूमध्ये कसको उपलब्धि राम्रो देखिन्छ, किन ?

(घ) तथ्याङ्कहरूमा भएको एकरूपता (consistency) वा विविधता (variability) मापन गर्ने विधिहरू कुन कुन छन् ? ती मध्ये उपयुक्त विधि कुन हो ?

(ङ) यी दुई जनाको प्राप्ताङ्कको तुलना कसरी गर्न सकिन्छ ?

तथ्याङ्कमा विचरणशीलताले सामान्यतया छरिएको (scatterness), विविधता (variability) विचलन (deviation), उतारचढाब आदिलाई जनाउँछ । केन्द्रीय प्रकृतिको नाप (measure of central tendency) ले औसत मानलाई मात्र जनाउँछ । उक्त मानले श्रेणीका विभिन्न पदहरूमा भएको भिन्नता वा फरकलाई देखाउन सक्दैन । उक्त भिन्नता वा फरकलाई देखाउन विचरणशीलताको मापन गरिन्छ । विचरणशीलताको मापनले केन्द्रीय मूल्य (मान) बाट श्रेणीका अन्य मूल्य वा मानहरू के कति हदसम्म छरिएर रहेका छन् भन्ने जानकारी दिन्छ । यसरी तथ्याङ्कमा श्रेणीका विभिन्न पदहरू केन्द्रीय मान (मध्यक, मध्यिका, रीत) बाट

कति टाढा, कति ठुला वा साना छन् र एक आपसमा कति सम्बन्धित छन् भनी हेर्नका लागि गरिने मापनलाई विचरणशीलताको मापन (Measure of disperson) भनिन्छ ।

विचरणशीलताको मापन गर्ने विभिन्न विधिहरू छन् । तीमध्ये विस्तार (range), चतुर्थांशीय विचलन (quartile deviation), मध्यक विचलन (mean deviatio) र स्तरीय विचलन (standard deviation) प्रमुख विधिहरू हुन् । व्यक्तिगत श्रेणी (individual series) र खण्डित, श्रेणी (discrete series) को चतुर्थांशीय विचलन मध्यक विचलन र स्तरीय विचलन निकाल्ने विधिहरू अगिल्लो कक्षामा सिकिसकेका छौँ । यस पाठमा निरन्तर वा अविच्छिन्न श्रेणीको (continuous series) चतुर्थांशीय विचलन, मध्यक विचलन र स्तरीय विचलन निकाल्ने विधिका बारेमा अध्ययन गर्ने छौँ ।

8.1 चतुर्थांशीय विचलन (Quartile Deviation)

कुनै एउटा विद्यालयका कक्षा ९ मा अध्ययनरत विद्यार्थीहरूले गणित विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्नअनुसार छ :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
0-10	8
10-20	12
20-30	15
30-40	9
40-50	6
50-60	10

माथिको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् । यी मानहरूले के के जनाउँछन् छलफल गर्नुहोस् ।

चतुर्थांशीय मानहरू भन्नाले पहिलो चतुर्थांश (Q_1) दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) भन्ने बुझिन्छ । माथि दिइएको तथ्याङ्क वर्गीकृत तथ्याङ्क वा निरन्तर श्रेणी (continuous series) मा भएकाले (Q_1), (Q_2) र (Q_3) पत्ता लगाउन निम्नानुसार तालिकामा राख्नुपर्दछ :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f)
0-10	8	8
10-20	12	20
20-30	15	35
30-40	9	44
40-50	6	50
50-60	10	60
	$\sum f = N = 60$	

यहाँ, जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या (N) = 60

अब, Q_1 पर्ने स्थान = $\left(\frac{N}{4}\right)$ औँ पद

= $\left(\frac{60}{4}\right)$ औँ पद

= 15 औँ पद

यहाँ, सञ्चित बारम्बारता महलमा 15 औँ पद वा सोभन्दा माथिल्लो सङ्ख्या 20 हो । सञ्चित बारम्बारता 20 सँग सम्बधित प्राप्ताङ्क श्रेणी (10-20) हो । अविच्छिन्न श्रेणीमा Q_1 को वास्तविक मान निम्न सूत्र प्रयोग गरेर निकालिन्छ ।

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times i \ldots\ldots..(i)$$

यहाँ, L = Q_1 पर्ने श्रेणीको तल्लो सीमा (lower limit)

c.f = Q_1 पर्ने श्रेणीभन्दा अगिल्लो श्रेणी अन्तरको सञ्चित बारम्बारता

f = Q_1 पर्ने श्रेणी अन्तरको बारम्बारता

i = श्रेणी अन्तर

माथिको तालिकाबाट,

L = 10, c.f = 8, f = 12, i = 10

तसर्थ, समीकरण (i) बाट

$$Q_1 = 10 + \frac{\frac{60}{4} - 8}{12} \times 10$$

$$= 10 + \frac{15 - 8}{12} \times 10$$

$$= 10 + \frac{7}{12} \times 10$$

$$= 10 + 5.83 = 15.83$$

त्यस्तैगरी,

Q_2 पर्ने स्थान = $2\left(\frac{N}{4}\right)$ औँ पद

= $2 \times \left(\frac{60}{4}\right)$ औँ पद = 30 औँ पद

यहाँ सञ्चित बारम्बारता महलमा 30 औँ पद वा सोभन्दा माथिल्लो सङ्ख्या 35 हो । सञ्चित बारम्बारता 35 सँग सम्बन्धित श्रेणी (20-30) हो । अविच्छिन्न श्रेणीमा Q_2 को वास्तविक मान निकाल्न निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

$$Q_2 = L + \frac{2\left(\frac{N}{4}\right) - cf}{f} \times i \ldots\ldots..(ii)$$

यहाँ, $L = Q_2$ पर्ने श्रेणीको तल्लो सीमा (lower limit)

$c.f = Q_2$ पर्ने श्रेणीको सञ्चित बारम्बारताभन्दा अगिल्लो श्रेणीको बारम्बारता

$f = Q_2$ पर्ने श्रेणीको बारम्बारता

$I = Q_2$ पर्ने श्रेणीको अन्तर

माथिको तालिकाबाट,

L = 20, c.f = 20, f =15, i =10

तसर्थ, समीकरण (ii) बाट

$$Q_2 = 20 + \frac{2\left(\frac{60}{4}\right) - 20}{15} \times 10$$

$$= 20 + \frac{30 - 20}{15} \times 10$$

$$= 20 + \frac{10}{15} \times 10$$

$$= 20 + 6.67$$

$$= 26.67$$

अब, Q_3 पर्ने स्थान $= 3\left(\frac{N}{4}\right)$ औँ पद

$= 3 \times \left(\frac{60}{4}\right)$ औँ पद $= 45$ औँ पद

यहाँ, सञ्चित बारम्बारता महलमा 45 औँ पद वा सोभन्दा माथिल्लो सङ्ख्या 50 हो । सञ्चित बारम्बारता 50 सँग सम्बन्धित श्रेणी (40-50) हो । अविच्छिन्न श्रेणीमा Q_3 को वास्तविक मान निकाल्न निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

$$Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - cf}{f} \times i \ldots\ldots..(iii)$$

यहाँ, $L=Q_3$ पर्ने श्रेणीको तल्लो सीमा (lower limit)

c.f = Q_3 पर्ने श्रेणीको सञ्चित बारम्बारताभन्दा अगिल्लो श्रेणीको बारम्बारता

f = Q_3 पर्ने श्रेणीको बारम्बारता

i = Q_3 पर्ने श्रेणीको अन्तर

माथिको तालिकाबाट,

L = 40, c.f = 44, f = 6, i =10

तसर्थ, समीकरण (iii) बाट

$$Q_3 = 40 + \frac{3\left(\frac{60}{4}\right) - 44}{6} \times 10$$

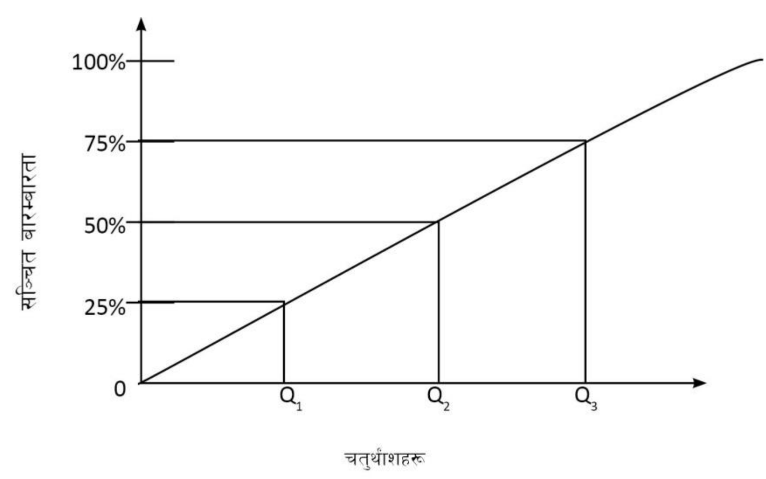
$$= 40 + \frac{45 - 44}{6} \times 10$$

$$= 40 + \frac{1}{6} \times 10 = 40 + 1.67 = 41.67$$

अतः माथिको तथ्याङ्कको चतुर्थाँशीय मानहरू Q_1 = 15.83, Q_2 = 26.67 र Q_3 = 41.67 हुन्छन् । अब माथिल्लो वा तेस्रो चतुर्थाँश (Q_3) र तल्लो वा पहिलो चतुर्थाँश (Q_1) बिचको अन्तरलाई 2 ले भाग गरी चतुर्थाँशीय विचलनको मान पत्ता लगाउन सकिन्छ । अतः पहिलो र तेस्रो चतुर्थाँशको फरकको आधालाई चतुर्थाँशीय विचलन (quartite deviation) भनिन्छ ।

अर्थात् Q.D = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

के Q_1, Q_2 र Q_3 को सम्बन्धलाई लेखाचित्रको माध्यमबाट पनि देखाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।



यहाँ दिइएको लेखाचित्रका आधारमा निम्न निष्कर्षमा पुग्न सकिन्छ :

- Q_1 भनेको तथ्याङ्कको जम्मा बारम्बारतामा 25% पदको मान हो । अर्थात $\frac{N}{4}$औँ मान हो । यसलाई तल्लो चतुर्थांश (lower quartile) पनि भनिन्छ ।
- Q_2 भनेको कुल बारम्बारताको 50% पदको मान हो । अर्थात $\frac{2(N)}{4} = \frac{N}{2}$ औँ मान हो । यसरी आउने मान मध्यिका नै हो । अर्थात मध्यिका दोस्रो चतुर्थांश (Secnd quartile) को मान हो ।
- Q_3 भनेको कुल बारम्बारताको 75% पदको मान हो अर्थात् 3N औँ मान हो । यसलाई माथिल्लो चतुर्थांश (upper quartile) पनि भनिन्छ ।
- तथ्याङ्कमा पहिलो चतुर्थांश (Q_1) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) बिचको फरकको आधालाई चतुर्थांशको विचलन वा भिन्नता (quartile deviation) भनिन्छ । यसलाई ग्याल्टोन (galton) ले प्रतिपादन गरेका हुन् । चतुर्थांशीय भिन्नतालाई साङ्केतिक रूपमा निम्नअनुसार लेखिन्छ ।

$$\text{चतुर्थांशीय विचलन (Q.D)} = \frac{\text{माथिल्लो चतुर्थांश } (Q_3) - \text{ तल्लो चतुर्थांश } (Q_1)}{2}$$

i.e. $Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

अब, माथिको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय विचलन (quartile deviation)

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{41.67 - 15.83}{2}$$

$$= \frac{25.84}{2} = 12.912$$

तसर्थ चतुर्थांशीय विचलन (Q.D)= 12.912

पुनः माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) र तल्लो चतुर्थांशको (Q_1) को सापेक्षिक फरकको मापन चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (coefficient of quartile feviation) हो ।

$$\text{चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{41.67 - 15.83}{41.67 + 15.83} = \frac{25.84}{57.50} = 0.449$$

तसर्थ यहाँ चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क 0.449 हुन्छ ।

उदाहरणहरू

1. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

तौल (kg)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
मानिसको सङ्ख्या	12	19	5	10	9	6

समाधान

यहाँ, दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय भिन्नता गणना गर्न सञ्चित बारम्बारता तालिकामा राख्दा,

तौल (kg)	मानिसको सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f)
10-20	12	12
20-30	19	31
30-40	5	36
40-50	10	46
50-60	9	55
60-70	6	61
	$\sum f = N = 61$	

हामीलाई थाहा छ, $Q_1 = \frac{N}{4}$ औँ पद

$= \frac{61}{4}$ औँ पद $= 15.25$ औँ पद

अतः Q_1 पर्ने श्रेणी = (20-30)

अब, $Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times i$

$$= 20 + \frac{15.25 - 12}{19} \times 10 \quad [\because L = 20, cf = 12, f = 19, i = 10]$$

$= 20 + 1.71 = 21.71$

तसर्थ, $Q_1 = 21.71$ kg

पुनः Q_3 $= \frac{3N}{4}$ औँ पद

$= 3 \times 15.25$ औँ पद

$= 45.75$ औँ पद

अतः Q_3 पर्ने श्रेणी = (40-50)

$$\therefore Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times i$$

$$= 40 + \frac{45.75 - 36}{10} \times 10$$

$$= 40 + 9.75$$

$$= 49.75 \text{ kg}$$

अब, सूत्रअनुसार चतुर्थांशीय विचलन/भिन्नता (Quartile Deviation) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{49.75 - 21.71}{2}$$

$$= \frac{28.04}{2} = 14.02$$

∴ चतुर्थांशीय भिन्नता (Q.D) = 14.02

चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (Coefficent of Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{49.75 - 21.71}{49.75 + 21.71}$$

$$= \frac{28.04}{71.46} = 0.39$$

अभ्यास 8.1

1. (a) विचरणशीलता भनेको के हो ? उदाहरणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

   (b) विचरणशीलता मापनका विधिहरूको सूची बनाउनुहोस् ।

   (c) चतुर्थांशीय विचलनको परिभाषा दिनुहोस् ।

   (d) चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्कको परिभाषा दिनुहोस् ।

(e) चतुर्थांशीय विचलनका गुण र दोषहरू लेख्नुहोस् ।

(f) चतुर्थांशीय विचलन र चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्कबिच भिन्नता उल्लेख गर्नुहोस् ।

2. (a) यदि एउटा तथ्याङ्कको पहिलो चतुर्थांश 35 र तेस्रो चतुर्थांश 75 छ भने, चतुर्थांशीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि एउटा तथ्याङ्कको पहिलो चतुर्थांश 45 र तेस्रो चतुर्थांश 55 छ भने चतुर्थांशीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(a)

प्राप्ताङ्क	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	15	10	8	6	2

(b)

चिमको आयु (घण्टामा)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250	1250-1500	1500-1750	1750-2000
चिम सङ्ख्या	1	3	7	12	25	39	11	2

(c)

उमेर (वर्षमा)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
सङ्ख्या	23	22	17	13	13	12

4. कक्षा 8 मा अध्ययनरत 28 जना विद्यार्थीले गणित विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्न लिखित छ । उक्त तथ्याङ्कका आधारमा (10-20) को पहिलो वर्गान्तर लिएर बारम्बारता तालिका बनाई चतुर्थांशीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् :

48, 50, 34, 29, 56, 40, 14, 62, 28, 70, 22, 30, 38, 74, 13, 47, 20, 53, 64, 34, 75, 66, 60, 21, 45, 57, 15, 41

8.2 मध्यक भिन्नता (Mean Deviation)

कुनै एउटा विद्यालयका कक्षा 10 मा रहेका 38 जना छात्र र 38 जना छात्राको उचाइ निम्नअनुसार प्रस्तुत गरिएको छ ।

उचाइ (इन्चमा)	60-62	62-64	64-66	66-68	68-70	70-72
छात्र सङ्ख्या	4	6	12	8	7	3
छात्रा सङ्ख्या	5	4	10	3	12	6

माथिको तथ्याङ्क अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) छात्र र छात्राको औसत उचाइ कति कति छ ?

(b) विद्यार्थीहरूमध्ये छात्र वा छात्रा कसको उचाइमा एकरूपता देखिन्छ, किन ?

(c) छात्र वा छात्राको उचाइको तुलना कसरी गर्न सकिन्छ ?

माथिको तथ्याङ्कबाट छात्र वा छात्राको उचाइमा भएको एकरूपता वा विविधता छुट्याउन मध्यक भिन्नता (mean deviation) को प्रयोग गरिन्छ । सबै विचलनहरूको औसत नै मध्यक विचलन वा भिन्नता हो । विस्तार (range) तथ्याङ्कको अधिकतम र न्यूनतम मानमा आधारित हुन्छ भने चतुर्थांशीय विचलन पनि तथ्याङ्कको पहिलो र तेस्रो चतुर्थांशमा आधारित भएर निकालिन्छ । तसर्थ विस्तार र चतुर्थांशीय भिन्नता केन्द्रीय मान र अन्य मानहरूका बिचको भिन्नतालाई राम्रोसँग मापन गर्न सक्दैन । यस्ता कमजोरीहरूलाई हटाउन मध्यक विचलनको प्रयोग गरिन्छ ।

मध्यक विचलन/भिन्नता केन्द्रीय प्रवृत्तिका नापहरू मध्यक, मध्यिका र रीत तीनै औसतमध्ये कुनै एकको सापेक्षमा निकाल्न सकिन्छ । तापनि मध्यकबाट निकालिएको मध्यक भिन्नता बढी विश्वसनीय हुन्छ । तसर्थ मध्यक भिन्नता यी तीनमध्ये कुनै एउटा विचलनबाट लिएको भिन्नताको योगफललाई तथ्याङ्कको सङ्ख्याले भाग गरेर आउने परिणाम हो । यसमा भिन्नताको निरपेक्ष मानलाई मात्र लिइन्छ ।

अविच्छिन्न वा निरन्तर श्रेणी (Continuous series) को मध्यक भिन्नता

मानौँ, x_1, x_2, x_3, …………x_n वर्गान्तरका मध्य मानहरू हुन् । यिनीहरूसँग सम्बन्धित आवृत्ति (बारम्बारता) हरू क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots f_n$ छन् अर्थात् x_1 को आवृत्ति f_1, x_2 को आवृत्ति f_2, …. र x_n को आवृत्ति f_n छन् भने यसको मध्यक भिन्नता (M.D) $=\frac{\sum f|D|}{\sum f}$ हुन्छ ,

जहाँ, D = M-A, मध्यमान र औसत मानको अन्तर

f = सम्बन्धित पदको बारम्बारता

A = दिइएको श्रेणीको औसत मान (मध्यक वा मध्यिका)

$\sum f$ = जम्मा पद सङ्ख्या वा बारम्बारताको योगफल

$\sum f|D|$ = प्रत्येक मध्यमान र औसतको अन्तरको निरपेक्ष मान र सम्बन्धित आवृत्तिको गुणनफलको योगफल

मध्यक भिन्नतालाई मध्यक वा मध्यिकबाट निकाल्न सकिन्छ ।

(क) मध्यक भिन्नता $(M.D) = \frac{\sum f|m-\bar{x}|}{N}$ (मध्यकबाट) निकाल्न सकिन्छ ।

जहाँ, m = मध्यमान, $\bar{X}$= श्रेणीको मध्यक

f = आवृत्ति N = जम्मा पद सङ्ख्या

(ख) मध्यक भिन्नता $(M.D) = \frac{\sum f|m-Md|}{N}$ (मध्यकबाट)

जहाँ, m = मध्यमान, Md = श्रेणीको मध्यिका

f = बारम्बारता र N = जम्मा पद बारम्बारता सङ्ख्या

मध्यक भिन्नता विचरणशीलता मापनको निरपेक्ष मान हो । दुई वा सोभन्दा बढी श्रेणीहरूको विचरणशीलताको तुलना गर्न मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (coefficient of mean deviation) को प्रयोग गरिन्छ । मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क मध्यक वा मध्यिकाको सापेक्षमा दुई तरिकाबाट निकालिन्छ ।

(क) मध्यकबाट लिइएको मध्यक भिन्नता र मध्यकबिचको अनुपातलाई मध्यकबाट मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क भनिन्छ । यसलाई विचरशीलताको मध्यक गुणाङ्क पनि भनिन्छ ।

$$\text{मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क} = \frac{\text{मध्यकबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यक}}$$

अर्थात, $\text{Coefficient of M.D} = \frac{\text{M.D from mean}}{\bar{X}}$

(ख) मध्यिकाबाट लिइएको मध्यक भिन्नता र मध्यिकाबिचको अनुपातलाई मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क भनिन्छ । यसलाई विचरशीलताको मध्यिका गुणाङ्क पनि भनिन्छ ।

$$\text{मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क} = \frac{\text{मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यिका}}$$

अर्थात्, $\text{Coefficient of M.D} = \frac{\text{M.D from median}}{\text{Md}}$

मध्यक भिन्नता गणना गर्ने चरणहरू

1. दिइएको श्रेणीको मध्यक वा मध्यिका गणना गर्ने
2. श्रेणीको मध्यक वा मध्यिकाबाट प्रत्येक पदको भिन्नता वा अन्तर निकाल्ने
3. अन्तरबाट प्राप्त चिह्नहरू सबै धनात्मक लिने (absolute values)
4. उक्त अन्तरबाट प्राप्त पूर्ण अङ्कहरूबाट औसत पत्ता लगाउने ।

2. दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	6	5	4

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यक निकाल्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	मध्यमान (m)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	f×m
0-10	5	2	10
10-20	15	3	45
20-30	25	6	150
30-40	35	5	175
40-50	45	4	180
		N =∑f = 20	∑fm = 560

मध्यक $(\bar{x}) = \frac{\sum fm}{N} = \frac{560}{20} = 28$

अब,

मध्यकबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउँदा,

प्राप्ताङ्क (x)	मध्यमान (m)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	$\lvert D\rvert=\lvert m-\bar{x}\rvert$	$f\lvert D\rvert$
0-10	5	2	23	46
10-20	15	3	13	39
20-30	25	6	3	18
30-40	35	5	7	35
40-50	45	4	17	68
		N =∑f = 20		∑f |D| = 206

∴ सूत्रअनुसार, मध्यम भिन्नता (M.D.) = $\frac{\sum f|D|}{\bar{X}} = \frac{206}{20} = 10.3$

मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{M.D}{\bar{x}}$

$= \frac{10.3}{28}$ = 0.367 = 0.37

तसर्थ, मध्यक भिन्नता (M.D) = 10.3 र मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क 0.37 हुन्छ ।

3. एउटा विद्यालयका कक्षा 10 मा अध्ययनरत 100 जना विद्यार्थीहरूको उचाइ निम्नअनुसार छ :

उचाइ (से.मि.)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
विद्यार्थी सङ्ख्या	9	13	25	30	13	10

माथिको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र सोको गुणाङ्कसमेत पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा राख्दा,

उचाइ (cm)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता(cf)
95-105	9	9
105-115	13	22
115-125	25	47
125-135	30	77
135-145	13	90
145-155	10	100
	N =∑f = 100	

अब, मध्यिका (Md) = $\frac{N}{2}$ औँ पद

$= \frac{100}{2}$ औँ पद = 50 औँ पद

∴ मध्यिका पर्ने वर्गान्तर = 125-135

सूत्रअनुसार, वर्गीकृत र अविच्छिन्न तथ्याङ्कमा मध्यिका (Md) = $L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$ हुन्छ

यहाँ, $L = 125, \frac{N}{2} = 50, cf = 47, f = 30, i = 10$

$\therefore Md = 125 + \frac{50 - 47}{30} \times 10$

$= 125 + 1 = 126$ cm

अब, मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउन,

उचाइ (x) cm	मध्यमान (m)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	|D|=|m-Md|	f|D|
95-105	100	9	26	234
105-115	110	13	16	208
115-125	120	25	6	150
125-135	130	30	4	120
135-145	140	13	14	182
145-155	150	10	24	240
		$N = \sum f = 100$		$\sum f\|D\| = 1134$

सूत्रअनुसार,

मध्यक भिन्नता (M.D) $= \frac{\sum f|D|}{N} = \frac{1134}{100} = 11.34$

तसर्थ मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता (M.D) = 11.34

फेरि, मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{M.D.}{Md}$

$= \frac{11.34}{126} = 0.09$

$\therefore$ मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क = 0.09 हुन्छ ।

अभ्यास : 8.2

1. (a) मध्यक भिन्नताको परिचय दिनुहोस् ।

   (b) मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क भनेको के हो ? यसको प्रयोग उदाहरणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

(c) मध्यक भिन्नताका गुण र दोषहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।

(d) मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क गणना गर्दा के केको सापेक्षमा गर्न सकिन्छ ? कुन विधि बढी उपयुक्त होला ? कारणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

2. (a) तल दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

वर्गान्तर	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
बारम्बारता	6	8	11	14	8	3

(b) कक्षा 10 का 50 जना विद्यार्थीहरूको उचाइ तल तालिकामा दिइएको छ । दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

उचाइ (cm)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
विद्यार्थी सङ्ख्या	6	8	11	14	8	3

(c) तल दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र सोको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

उचाइ	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	6	10	20	10	6	4

3. तल दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a)

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारम्बारता	2	18	24	20	19	5

(b)

तौल (kg)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
मानिसको सङ्ख्या	7	3	6	4	8	2

(c)

प्राप्ताङ्क	$5 \le x < 10$	$10 \le x < 15$	$15 \le x < 20$	$20 \le x < 25$	$25 \le x < 30$
विद्यार्थी सङ्ख्या	7	4	5	6	3

4. (a) तल दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यक र मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् । 20 वर्ष र 20 वर्षभन्दा माथिकाले मात्र सर्वेक्षणमा भाग लिएका छन् ।

उमेर (वर्ष)	मानिसको सङ्ख्या
30 भन्दा कम	3
40 भन्दा कम	64
50 भन्दा कम	196
60 भन्दा कम	349
70 भन्दा कम	489
80 भन्दा कम	540
90 भन्दा कम	542

(b) एउटा बगैँचाका 50 ओटा विरुवाको उचाइ विवरण निम्नअनुसार छ । जम्मा 48 cm सम्म उचाइ भएका विरुवाहरू मात्र सर्वेक्षणमा छन् ।

उचाइ	बिरुवाको सङ्ख्या
0 cm भन्दा माथि	50
8 cm भन्दा माथि	42
16 cm भन्दा माथि	35
24 cm भन्दा माथि	30
32 cm भन्दा माथि	18
40 cm भन्दा माथि	6

माथिको तथ्याङ्कका आधारमा

(i) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

(ii) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

5. एउटा सर्वेक्षणमा 20 जनाको समूहमा रहेका व्यक्तिहरूको तौल (कि.ग्रा.) मा निम्नअनुसार पाइयो । यो तथ्याङ्कलाई 10 को वर्गान्तर तालिका निर्माण गरी मध्यक र मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता एवम् मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

59, 71, 45, 44, 35, 21, 29, 42, 37, 49, 58, 69, 55, 39, 79, 50, 65, 52, 60, 64

8.3 स्तरीय भिन्नता (Standard deviation)

दुई जना विद्यार्थीहरू X र Y ले 100 पूर्णाङ्कको 6 ओटा परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्नअनुसार छ ।

विद्यार्थी / परीक्षा	1	2	3	4	5	6
X	56	72	48	69	64	81
Y	63	74	45	57	82	63

माथिका तथ्याङ्कका आधारमा निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) दुई विद्यार्थीहरूको औसत प्राप्ताङ्क कति कति छ ?

(b) X र Y का विचलनहरू कति कति छन् ?

(c) कुन तरिकाबाट विचलन निकाल्दा बढी विश्वासनीय हुन्छ ?

(d) यदि उपलब्धिको एकरूपता (consistency) लाई आधार मानेर पुरस्कृत गर्दा कुन विद्यार्थीले पुरस्कार पाउँछ, किन ?

माथिको तथ्याङ्कको विचलन विभिन्न विधिहरूबाट निकाल्न सकिन्छ । तापनि स्तरीय भिन्नताबाट विचलन निकाल्दा बढी विश्वासनीय, र स्थिर परिणाम प्राप्त हुन्छ । मध्यकबाट लिएको भिन्नताको वर्गको औसतको वर्गमूललाई नै स्तरीय भिन्नता (standard deviation) भनिन्छ । त्यसैले यसलाई मध्यक भिन्नताको वर्गको औसतको वर्गमूल (root mean square deviation) पनि भनिन्छ । यसलाई ग्रिक अक्षर सिग्मा (σ) ले जनाइन्छ । स्तरीय भिन्नताको अवधारणा कार्ल्स पियर्सन, (1823) ले ल्याएका हन् । विचरणशीलताको भिन्नताले तथ्याङ्कको वितरणको एकरूपताको मात्रा निर्धारण गर्दछ । स्तरीय भिन्नता जति सानो हुन्छ त्यति नै एकरूपताको मात्रा अधिक हुन्छ । त्यसैले स्तरीय भिन्नताले कुनै पनि तथ्याङ्कको वितरणमा मध्यकले कति राम्रोसँग तथ्याङ्कको प्रतिनिधित्व गर्न सक्छ भन्ने बताउँछ ।

निरन्तर वा अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous series) को स्तरीय भिन्नता

निरन्तर वा अविच्छिन्न श्रेणीमा तीन ओटा तरिका प्रयोग गरी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

(A) वास्तविक मध्यक विधि (Actual mean method)

मानौं, कुनै निरन्तर श्रेणीका वर्गान्तरका मध्यबिन्दुहरू $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ ती मध्यबिन्दुहरूसँग सम्बन्धित बारम्बारताहरू क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ र दिइएको तथ्याङ्कबाट निकालिएको वास्तविक मध्यक ($\bar{x}$) छ ।

यदि $d = m - \bar{x}$ (मध्यमान र मध्यकको अन्तर) भए,

स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum f(m-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$ हुन्छ ।

यसलाई स्तरीय भिन्नता निकाल्ने प्रत्यक्ष विधि (Direct method) पनि भनिन्छ ।

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (Coefficient of standard deviation)

स्तरीय भिन्नता (S.D) विचरणशीलताको निरपेक्ष मान हो भने स्तरीय भिन्नतामा आधारित तुलनात्मक मापन स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क हो । दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कहरूको विविधता वा एकरूपता तुलना गर्न स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क प्रयोग गरिन्छ । यसलाई सूत्रमा निम्नअनुसार लेखिन्छ ।

$$\text{स्तरीय भिन्नता (S.D) को गुणाङ्क} = \frac{\text{स्तरीय भिन्नता}}{\text{मध्यक}}$$

अर्थात, S.D को गुणाङ्क $= \frac{\sigma}{\bar{x}}$ हुन्छ ।

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क जति सानो हुन्छ, त्यति नै बढी तथ्याङ्कमा एकरूपता वा स्थिरता वा कम विविधता भएको हुन्छ । त्यसको विपरीत स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क ठुलो भएमा तथ्याङ्कमा एकरूपता नभएको वा बढी विविधतायुक्त भएको जनाउँछ । त्यसैले विभिन्न तथ्याङ्कहरूको तुलनात्मक अध्ययन गर्दा स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क सानो भएको राम्रो मानिन्छ ।

वास्तविक मध्यक वा प्रत्यक्ष विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्दा अपनाउने प्रक्रिया :

1. प्रत्येक वर्गान्तरको मध्यबिन्दु निकाल्ने
2. मध्यक निकाल्न $\bar{x} = \frac{\sum fm}{N}$ सूत्र प्रयोग गर्ने
3. प्रत्येक मध्यमान (m) र मध्यक $(\bar{x})$ बिचको अन्तर निकाल्ने i.e. $d = (m-\bar{x})$
4. मान d को वर्ग (d^2) पत्ता लगाउने
5. बारम्बारता (f) र d^2 गुणन गर्ने i.e. $f \times d^2$
6. स्तरीय भिन्नता निकाल्न $S.D = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$ सूत्र प्रयोग गर्ने .

4. दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा प्रत्यक्ष विधिबाट स्तरीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारम्बारता (f)	4	6	10	20	6	4

समाधान

यहाँ, दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यक निकाल्न

वर्गान्तर (x)	मध्यममान (m)	बारम्बारता (f)	f×m
0-10	5	4	20
10-20	15	6	90
20-30	25	10	250
30-40	35	20	700
40-50	45	6	270
50-60	55	4	220
		$N = \sum f = 50$	$\sum f m = 1550$

$\therefore$ मध्यक $\bar{x} = \frac{\sum fm}{N} = \frac{1550}{50} = 31$

अब, स्तरीय भिन्नता निकाल्दा,

वर्गान्तर (x)	मध्यममान (m)	बारम्बारता (f)	$d = m-\bar{x}$	fd^2
0-10	5	4	-26	2704
10-20	15	6	-16	1536
20-30	25	10	-6	360
30-40	35	20	4	320
40-50	45	6	14	1176
50-60	55	4	24	2304
		N = 50		$\sum fd^2 = 8400$

सूत्रअनुसार, स्तरीय भिन्नता (S.D. or σ) $= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

$= \sqrt{\frac{8400}{50}} = \sqrt{168}$

$= 12.96$

अब, स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{S.D}{\bar{x}}$

$$= \frac{12.96}{31}$$

$$= 0.41$$

तसर्थ, स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क 0.41 हुन्छ ।

(B) अनुमानित मध्यक विधि (Assumed mean method)

वास्तविक मध्यकबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्न कठिन र बढी समय लाग्ने हुन्छ । यस्तो अवस्थामा कुनै एउटा सङ्ख्यालाई मध्यक मानेर स्तरीय भिन्नता निकाल्ने गरिन्छ ।

मानौँ, m_1, m_2, m_3, …..m_n वर्गान्तरका मध्यमानहरू छन् । ती मध्यमानसँग सम्बन्धित बारम्बारताहरू क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \ldots fn$ छन् र अनुमानित मध्यक A छ भने,

स्तरीय भिन्नता (S.D or σ) $= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$ हुन्छ ।

जहाँ, d = m-A (मध्यमान र अनुमानित मध्यकको अन्तर)

अनुमानित मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्न अपनाउने चरणहरू

1. प्रत्येक श्रेणीका वर्गान्तरको मध्यमान निकाल्ने
2. मध्यमानहरूबाट उचित मध्यक (A) अनुमान गर्ने
3. अनुमानित मध्यक (A) र मध्यमान (m) को विचलन (d) निकाल्ने
4. मान d को वर्ग (d^2) पत्ता लगाउने
5. प्रत्येक बारम्बारता (f) र d को गुणनफल निकाल्ने
6. प्रत्येकमा बारम्बारता (f) र d^2 को गुणनफल निकाल्ने
7. स्तरीय भिन्नता (SD) $= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$ सूत्र प्रयोग गर्ने ।

5. कुनै विद्यालयका 28 जना विद्यार्थीहरूको तौल यस प्रकार छ :

तौल (kg)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	7	10	5	3

दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, अनुमानित मध्यक (A)= 35

यहाँ, अनुमानित मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्न,

तौल (kg)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	d = m-35	d^2	fd	fd^2
10-20	3	15	-20	400	-60	1200
20-30	7	25	-10	100	-70	700
30-40	10	35	0	0	0	0
40-50	5	45	+10	100	50	500
50-60	3	55	+20	400	60	1200
	N = 28				$\sum fd$ =-20	$\sum fd^2$ = 3600

अब, सूत्रअनुसार,

स्तरीय भिन्नता (S.D) $= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd^2}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{3600}{28} - \left(\frac{-20}{28}\right)^2} = \sqrt{128.57 - 0.51}$

$= \sqrt{128.06} = 11.316$

पुनः मध्यक $(\bar{x}) = A + \frac{\sum fd}{N} = 35 - \frac{20}{28} = 34.29$

अतः स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{SD}{\bar{x}} = \frac{11.32}{34.29} = 0.33$

(C) पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

मानौँ, $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ वर्गान्तरका मध्यमानहरू हुन्, ती मध्यमानहरूसँग सम्बन्धित बारम्बारताहरू क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \ldots.. f_n$ छन् ।

यदि अनुमानित मध्यक (assumed mean) =A छ भने,

स्तरीय भिन्नता (S.D. or σ) $= \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times c$

जहाँ, d = m-A (मध्यमान र अनुमानित मध्यकको अन्तर)

र $d' = \frac{d}{c} = \frac{m-A}{c}$ हुन्छ ।

C = वर्गान्तर (Class interval)

पद विचलन विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्ने प्रक्रिया

1. प्रत्येक वर्गान्तरको मध्यमान (m) निकाल्ने
2. मध्यमानहरूबाट अनुमानित मध्यक (A) अनुमान गर्ने

3. अनुमानित मध्यक (A) र मध्यमान (m) को अन्तर (d) निकाल्ने साथै d लाई वर्गान्तर (c) ले भाग गरी d' निकाल्ने

4. d' को वर्ग (d'^2) निकाल्ने

5. d' र f को गुणनफल (fd') निकाल्ने

6. d'^2 र f को गुणनफल (fd'^2) निकाल्ने

7. सूत्र प्रयोग गरी S.D. $=\sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N}-\left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2}\times c$ निकाल्ने

6. कुनै परीक्षामा विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क यस प्रकार छ :

प्राप्ताङ्क	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	6	10	17	11	9	3

माथिको तथ्याङ्कका आधारमा स्तरीय भिन्नता र यसको गुणााङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको तथ्याङ्कबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउँदा, मानौँ अनुमानित मध्यक (A) = 55

प्राप्ताङ्क (x)	वि.स. (*f*)	मध्यमान (m)	$d'=\frac{m-55}{10}$	fd'	fd'^2
20-30	4	25	-3	-12	36
30-40	6	35	-2	-12	24
40-50	10	45	-1	-10	10
50-60	17	55	0	0	0
60-70	11	65	1	11	11
70-80	9	75	2	18	36
80-90	3	85	3	9	27
	N=60			$\sum fd'=4$	$\sum fd'^2=144$

यहाँ, N=60, $\sum fd'=4$, $\sum fd'^2=144$, c =10

अब, सूत्रअनुसार,

स्तरीय भिन्नता (S.D) $=\sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N}-\left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2}\times c$

$=\sqrt{\frac{144}{60}-\left(\frac{4}{60}\right)^2}\times 10$

$$= \sqrt{2.4 - 0.0044} \times 10$$

$$= \sqrt{2.39956} \times 10$$

$= 1.548 \times 10 \ = 15.48$

तसर्थ, स्तरीय भिन्नता (S.D) = 15.48

पुनः मध्यक ($\bar{x}$) $= A + \frac{\sum fd'}{N} \times c$

$= 55 + \frac{4}{60} \times 10$

= 55.67

अब, S.D. को गुणाङ्क $= \frac{S.D}{\bar{x}} = \frac{15.48}{55.67}$ = 0.28

विचरणशीलताको गुणाङ्क (Coefficient of variation)

स्तरीय भिन्नता विचरणशीलताको निरपेक्ष मान हो । स्तरीय भिन्नतासँग सम्बन्धित विचरणशीलताको सापेक्षित मानलाई नै विचरशीलताको गुणाङ्क (coefficient of variation) भनिन्छ । स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्कलाई 100 ले गुणन गर्दा विचरशीलताको गुणाङ्क (coefficient of variation) (C.V) आउँछ । यो तथ्याङ्कको तुलनात्मक अध्ययन विधि हो । दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कको बिचमा विविधता वा एकरूपता तुलना गर्न विचरणशीलताको गुणाङ्कको प्रयोग गरिन्छ । यदि विचरणशीलनताको गुणाङ्क बढी भएमा तथ्याङ्कको वितरणमा विविधता भएको देखिन्छ भने विचरणशीलताको गुणाङ्क कम भएमा तथ्याङ्कमा एकरूपता वा स्थितरता वा कम विविधता भएको हुन्छ । विचरणशीलताको गुणाङ्कलाई सङ्केतमा C.V. ले जनाइन्छ । यसलाई सूत्रमा निम्नअनुसार लेख्न सकिन्छ :

विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V.) = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

जहाँ, C.V= विचरणशीलताको गुणाङ्क,

σ = स्तरीय भिन्नता र

$\bar{x}$ = तथ्याङ्कको मध्यक

7. एउटा कारखानामा काम गर्ने 20 जना कामदारहरूको दैनिक खर्च तल दिइएको छ । सो तथ्याङ्कका आधारमा मध्यक, स्तरीय भिन्नता, स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

खर्च (x) रु. मा	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
कामदार सङ्ख्या	2	3	6	5	4

समाधान

यहाँ दिइएको तथ्याङ्कबाट,

खर्च (रु.)	कामदार सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	fm	$d=f-\bar{x}$	d^2	fd^2
30-40	2	35	70	-23	529	1058
40-50	3	45	135	-13	169	507
50-60	6	55	330	-3	9	54
60-70	5	65	335	7	49	245
70-80	4	75	300	17	289	1156
	$N=\sum f=20$		$\sum fm=1160$			$\sum fd^2=3020$

अब,

सूत्रअनुसार, $\bar{x}=\frac{\sum fm}{N}=\frac{1160}{20}=58$

स्तरीय भिन्नता (S.D) $=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

$=\sqrt{\frac{3020}{20}}=\sqrt{151}=12.29$

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (Coeff. of S.D) $=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{12.29}{58}=0.21$

विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V) $=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100\%$

$=0.21\times100\%=21\%$

अभ्यास 8.3

1. (a) परिभाषा दिनुहोस् :
   (i) स्तरीय भिन्नता
   (ii) स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क
   (iii) विचरणशीलताको गुणाङ्क

   (b) स्तरीय भिन्नताका गुण र दोषहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।

   (c) मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नताबिच फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (d) स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्कबिच फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. तल दिइएको तथ्याङ्कको आधारमा स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a)

उमेर (वर्ष)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
मानिसको सङ्ख्या	16	23	28	18	10	5

(b)

दैनिक ज्याला (रु.)	100-125	125-150	150-175	175-200	200-225
कामदार सङ्ख्या	75	57	81	19	12

(c)

वर्गान्तर	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
बारम्बारता	7	7	10	15	7	6

3. (a) कक्षा दशको एकाइ परीक्षामा 40 जना विद्यार्थीहरूले पाएको अङ्क निम्न तालिकामा दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कबाट स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस ।

प्राप्ताङ्क (x)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	4	8	10	16	6	6

(b) तल दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

वर्गान्तर	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54
बारम्बारता	2	3	4	7	2	1

(c) एउटा कार्यालयमा काम गर्ने 100 जना कर्मचारीको खाजा खर्च निम्नअनुसार छ :

खर्च (रु.)	60-63	63-66	66-69	69-72	72-75
कर्मचारी	5	18	42	27	8

उक्त तथ्याङ्कबाट स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

4. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट निम्न विधि प्रयोग गरी स्तरीय भिन्नता र विचरशीलताको गुणाङ्क (C.V.) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) प्रत्यक्ष विधि (b) अनुमानित मध्यक विधि (c) विचलन विधि

वर्गान्तर	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारम्बारता	15	13	18	16	10

5. एउटा सुपर मार्केटमा काम गर्ने 114 जना कर्मचारीहरूको दैनिक ज्याला निम्नअनुसार छ :

ज्याला (रु.)	1200-1250	1250-1300	1300-1350	1350-1400	1400-1450
कामदार सङ्ख्या	20	26	32	21	15

(a) कर्मचारीहरूको औसत ज्याला कति रहेछ ?

(b) उक्त तथ्याङ्कको स्तरीय भिन्नता निकाल्नुहोस् ।

(c) सो तथ्याङ्कको विचरणशीलताको गुणाङ्क कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (a) एउटा गाउँमा भएका विभिन्न उमेर समूहका मानिसहरूको विवरण यस प्रकार छ :

उमेर (वर्षमा)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
पुरुष सङ्ख्या	18	45	31	28	22	16	9	4	2
महिला सङ्ख्या	10	42	30	20	27	9	14	2	4

यस तथ्याङ्कका आधारमा निम्न प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(i) महिला र पुरुषको औसत उमेर कति कति छ ?

(ii) महिला र पुरुषको उमेर स्तरीय विचलन कति कति छ ?

(iii) महिला र पुरुषमध्ये कसको उमेर बढी स्थिर छ ?

(b) दुई ओटा नयाँ मोडेल A र B का फ्रिजहरूको आयु यस प्रकार रहेको छ :

समय (वर्षमा)	फ्रिजको सङ्ख्या	
	मोडेल A	मोडेल B
0-2	5	2
2-4	16	7
4-6	13	12
6-8	7	19
8-10	5	9
10-12	4	1

उपर्युक्त तथ्याङ्कका आधारमा पत्ता लगाउनुहोस् :

(i) प्रत्येक मोडेलको फ्रिजको औसत आयु कति कति छ ?

(ii) दुईमध्ये कुन मोडेलको आयुमा एकरूपता छ ?

(iii) कुन मोडेलको फ्रिज किन्दा उपयुक्त हुन्छ, किन ?

7. कक्षा 10 मा अध्ययनरत 30 जना विद्यार्थीहरूको एकाइ परीक्षाको प्राप्तङ्क निम्नअनुसार छ :

10, 11, 18, 20, 18, 18, 17, 16, 14, 12, 10, 22, 24, 28, 23,14, 16, 20, 23, 26, 28, 29, 9, 4, 8, 12, 5, 9, 8, 10,

दिइएको तथ्याङ्कलाई 5 को वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई स्तरीय भिन्नता, यसको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्कसमेत निकाल्नुहोस् ।

उत्तरहरू

अभ्यास : 1.1.1

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.1.2

1.(a) $-1 < y < 1$ (b) $-1 < y < 1$ (c) $-\infty < y < \infty$

2(a) 2π (b) 2π (c) π

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास : 1.1.3

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2.(a) gof = {(1, 3), (3, 1), (4, 3)}, fog = {(2, 5), (5, 2), (1, 5)

(b) gof = {(5, 5) (6, 6)}, fog = {(2, 2), (3, 3)}

(c) f = {(8, 2), (16, 4) (24, 6), (32, 8)

3(a) $6 - x^2, -x^2 - 4x$ (b) $2 + 3x^2, 4 + 12x + 9x^2$

(c) $10x + 12, 10x - 1$

4.(a) 21, -3 (b) 2, 196 (c) 1, -41

5.(a) $g(x) = 2x + 3$ (b) $2x + 3$ (c) $x - 1$

6.(a) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = (x + 3)^3$ Or $f(x) = \frac{1}{x^3}, g(x) = (x + 3)$

(b) $f(x) = x^5, g(x) = 2x - 3$ Or $f(x) = (x + 7)^5, g(x) = 2x - 10$

7.(a) 2 (b) 1

8.(a) $320t^2 + 420$ (b) 1700 (c) 3 hrs

अभ्यास 1.1.4

Q.N. 1 र 2 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3.(a) {(1, 1), (4, 2) (9, 3) (16, 4), (25, 5)}

(b) {(4, 1) (6, 3) (7, 4), (8, 5)}

(c) {(2, 8), (3, 27) (4, 64), (5, 125), (6, 216)}

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5.(a) 3 (b) 2 (c) 5.5

6.(a) $\frac{-11}{7}$ (b) 5, 13 (c) 4

7.(a) $\frac{11}{4}$ (b) 16

8 र 9 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.2.1

1.(a) 3 (b) f(x) = q(x) × d(x) + r(x) (c) भागफल

2.(a) $x^3 + 2x + 3 + \frac{5}{x}$ (b) $2x + 4 + \frac{6}{x} + \frac{7}{x^2}$ (c) $x^3 + 4x^2 + 3x + 7 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}$

3.(a) $(x^2 + 3x + 9)$ (b) $(x^2 + 4x + 4)$ (c) $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

(d) $x^2 – 3x + 1$ (e) $x^2 + x + 1$

4.(a) $4x^2 + x + 2$ (b) $4x^2 – 4$ (c) $–x^3 + 6x^2 + 6x + 14$

(d) $3x^3 + 5x^2 + 8x – 14$

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.2.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2.(a) $x^2 – 5x + 3$, 9 (b) $x^2 – x – 2$ (c) $5x^3 – 15x^3 + 14x – 137$, 416

(d) $x^6 – x^4 – x^3 + x^2 – x + 1$,

3.(a) भागफल $= 2x^2 + x – \frac{5}{2}$; शेष $= \frac{-13}{8}$

(b) भागफल $= 4x^3 + x^2 - \frac{11}{4}x - \frac{11}{16}$; शेष $= \frac{117}{64}$

(c) भागफल $= 4x^3 – 6x^2 + 6x – 2$; शेष = 11

अभ्यास 1.2.3

1.(b) $f\left(\frac{-d}{c}\right)$ 2.(a) 1 (b) 5 3. (a) 12 (b) 29.33

(c) 473 (d) 681 4.(a) 8 (b) -13 (c) $\frac{-1}{3}$ (d) 14

5. (a) $\frac{-25}{3}$ (b) $\frac{5}{7}$

अभ्यास 1.2.4

1(b) f(c) (b) $f(x) = d(x) \times q(x)$

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3.(a) 8 (b) 2 (c) 11

4.(a) 16 (b) -36 (c) -13

अभ्यास 1.3.1

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2.(a) yes (b) yes (c) yes (d) no (e) yes

3.(a) 6, 74 (b) -3, -26 (c) 4, 37 (d) -3, $\frac{-80}{3}$

4. (a) 2 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) $\frac{4}{7}$

5. (a) 106 (b) 21 (c) 11 (d) 14 (e) 29

6. (a) 6, 4 (b) 4, 3 (c) 1, 3 (d) 5, 2

7. (a) 28 (b) 24 (c) 207 (d) -107

10.(a) 5, 12, 19 (b) 5, 15, 25 11.(a) 7 (b) 6

12.(a) 12 (b) 20 (c) $\frac{3}{2}$ 13.(a) -6 (b) 35 (c) 32

14.(a) 5, 8, 11, 14, 17 (b) -14, -10, -6, -2, 2 (c) 6, 11

(d) 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3

15.(a) 9 (b) -7 (c) 4 16.(a) 5 (b) 9

17.(a) Rs. 95 (b) Rs. 60,000 19.(i)(a) 4n – 3 (b) 37

(ii)(a) 3n+1 (b) 31

अभ्यास 1.3.2

1.(a) 175 (b) -272 (c) -1104 (d) 210 (e) 250.5 (f) 108

2.(a) 1030 (b) 1010 (c) 4 3.(a) -5, 4, 345 (b) -3, 5, 890

4.(a) 704 (b) 1829 5.(a) 3, 10 (b) 38, 260

6.(a) 2, 26 (b) 1, 200 7.(a) 1275 (b) 1050 (c) 1640

8.(a) 135 (b) 126 (c) 467 9.(a) 55 (b) 110

10.(a) 25 (b) 100

अभ्यास 1.3.3

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2.(a) yes (b) Yes (c) Yes (d) No

3. (a) $\frac{15}{4}, \frac{15}{256}$ (b) -96, -6144 (c) 81, 59049

4.(a) 8 (b) 6 (c) 6 (d) 10 5.(a) 3 (b) 1594323 (c) $\left(\frac{11}{7}\right)^{\frac{1}{10}}$ (d) 3

6.(a) $\frac{-5+\sqrt{185}}{10}$ (b) $\frac{6\pm\sqrt{116}}{10}$ (c) 18, 549

7.(a) 39366 (b) 36864 8.(a) 512 (b) 256

9.(a) 24, 36, 54 (b) 8, 12, 18 10.(a) 12 (b) 18 (c) $\frac{1}{32}$ (d) $8\sqrt{\frac{4}{3}}$

11.(a) 9, 27, 81 (b) 4, 8, 16, 32 (c) $4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 12.(a) 6 (b) 5

13.(a) 4, 64 (b) 10, 40 14.(a) $2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{16}, 1$ or $\frac{-1}{16}, -1$

अभ्यास 1.3.4

1.(a) 1093 (b) $\frac{-1023}{4}$ (c) $\frac{255}{128}$ (d) 3069 (e) $(128+\sqrt{2})\sqrt{2}$

(f) $\frac{259}{9}$ 2.(a) 299584 (b) 88 (c) 3 3.(a) 9 (b) 1533

4.(a) 6 (b) 5 5.(a) 31 (b) 7.37 6) 8

7.(a) 2 (b) 7 8.(a) 1093 (b) 4.49 9.(a) 63

(b) 3280

अभ्यास 1.4.1

1, 2, 3, शिक्षलाई देखाउनुहोस् ।

4.(a) $x - y + 2 \geq 0, x + y - 3 \leq 0$ (b) $x \leq 2$ (c) $x-y-1 \leq 0$

(d) $3x-2y-6 \leq 0$ 5) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6.(a) Minimum 11 at (5, 1), Maximum 14 at (6, 2)

(b) Minimum 8 at (0, 2), Maximum 16 at (0, 4)

(c) Minimum 0 at (0, 0), Maximum 8 at (0, 2)

(d) Minimum 6 at (0, 1.5), Maximum 12 at (0, 3)

अभ्यास 1.4.2

1, 2, 3, शिक्षलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.2.5

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2.(a) (x – 1) (x – 4) (3x – 4) (b) (x + 2) (x + 3) (x – 5)

(c) (x – 2) (x – 3) (x – 4)

3.(a) (x – 1) (x – 1) (x – 2) (b) (x+2) (x +6) (2x– 3)

(c) (x – 1) (x – 3) (x – 4)

4.(a) -2, 2,3 (b) 1, 3, 4 (c) $-2, \frac{1}{2}, 3$ (d) 1, 2, 3

अभ्यास 2.1

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 2.2

1.(a) i) – 5 देखि 6 सम्म ii) x = 2 (b) ii) – 4 देखि 6 सम्म ii) x = 3

(c) iii) – 4 देखि 4 सम्म ii) x = 3 (d) iv) – 4 देखि 6 सम्म ii) x = 1

2.(a) निरन्तर	(i) – 4 देखि – 2 सम्म	विच्छिन्न
	(ii) – 2 देखि – 1 सम्म	x = -2
	(iii) – 1 देखि – 1 सम्म	x = -1
	(iv) 1 देखि 2 सम्म	x = 1
	(v) 2 देखि 4 सम्म	x = 2
(b) निरन्तर	-3 देखि 2 सम्म	अविच्छिन्न
	2 देखि 4 सम्म	x = 2
(c) निरन्तर	-4 देखि -3 सम्म	x = -3
	-3 देखि 1 सम्म	x = -1
	1 देखि 2 सम्म	x = 2
	2 देखि 4 सम्म	

(d) निरन्तर -4 देखि -1 सम्म $x = -1$

-1 देखि 1 सम्म $x = 1$

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 2.3

प्रश्न 1 र 2 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3.(a) 3.99 (b) 6.04 (c) 4, 6

अभ्यास 3.1

1. (a) -8 (b) 54 (c) 1 (d) -7 (e) -20 (f) 4xy

2. (a) 6 (b) -12 (c) $a^2 + b^2$ (d) 28 (e) 42 (f) 8

3. (a) -3 (b) 4 (c) 0,6 (d) ±5

4. (a) -503 (b) 260 (c) -735

6. (a) |MN| = 140 (b) |NM| = 150

7. (a) 34 (b) 508

अभ्यास 3.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) $\begin{pmatrix} \frac{-9}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{-2}{17} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} cosA & sinA \\ -sinA & CosA \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$

3. (क) p = 3, q = 3 (ख) x = 2, y = 1 (ग) m = 2, n = 7

4. (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-41}{6} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

अभ्यास 3.3

1.(a) $(x, y) = \left(\frac{221}{19}, \frac{-65}{19}\right)$ (b) (3, -2) (c) Infinite solution (d) (1,0)

2.(a) (x, y) = (8, 1) (b) (x, y) = (-6, -5) (c) (x, y) = (3, 3)

(d) (x, y) – (2, 1) (e) (x, y) = (2, -1) 3.(a) (x, y) = (-32, -5)

(b) $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ (c) (x, y) = (8, 4) (d) $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{15}{2}\right)$

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 3.4

1. (a) $x = 2$, y = 3 (b) $x = 0$, y = -1 (c) $x = 7$, y = 2
   (d) $x = -3$, y = 0 (e) $x = 1$, y = 0 (f) $x = -2$, y = 5
2. (a) $x = -3$, y = 2 (b) $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{1}{6}$
   (c) $x = 15$, y = 7 (d) $x = 3$, y = -1

अभ्यास 4.1

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (a) 60° (b) 36.87° (c)14.25° (d) 30° (e) 60°
3. (a) 157° (b) 178° (c) 173° (d) 117° (e) 120°
6. (a) -4 (b) $-\frac{25}{3}$ (c) 1 (d)-3
7. (a) 3x+4y-25 = 0 (b) 2x+5y-29 = 0 (c) 4x+y-9 = 0 (d) 3x+5y+7 = 0
8. (a) 5x-2y = 0 (b) 7x-5y-34 = 0 (c) 9x+5y-33 = 0 (d) 11x+4y-10 = 0
9. (a) 5x+y-1 = 0 र x-5y-21 = 0
   (b) 11x-y-23 = 0 र x+11y+9 = 0
   (c) 5x-y-13 = 0 र x+5y+13 = 0
   (d) $(2-\sqrt{3})x-y = 0$ र $(2-\sqrt{3})x-y = 0$
10. (a) x-y+2 = 0 (b) 6x-7y+26 = 0 (c) 4x+8y-35 = 0 (d)3x + 2y – 13 = 0

अभ्यास 4.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (a) $abx^2+(a^2-b^2)xy-aby^2 = 0$ (b) $2x^2+3xy+y^2 = 0$
   (c) $\sqrt{3}xy-y^2 = 0$ (d) $x^2+2y^2+3xy+x+3y-2 = 0$
3. (a) 4x+y = 0 र x+y = 0 (b) x-4y = 0 र 4x-y = 0 (c) x-4y = 0 र x-y = 0
   (d) 2x-y = 0 र x-y = 0 (e) 3x-y =0 र x-y = 0 (f) x+y = 0 र x-y = 0
4. (a) 45°, 135° (b) 45°, 135° (c) 90° (d) α र 180°-α
   (e) 8°, 172° (f) 26.6° र 153.4°

7. (a) -11 (b) ± 3 (c) $-\frac{7}{2}$ (d) 1 वा 2

8. (a) 2 (b) 16 (c) ± 4 (d) 25

9. (a) $x^2+3xy+2y^2 = 0$ (b) $5x^2+7xy+2y^2 = 0$ (c) $6x^2+5xy+y^2 = 0$
(d) $5x^2-8xy+3y^2 = 0$

10. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 4.2

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 4.4

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्

2. (a) $x^2+y^2 = 25$ (b) $x^2+y^2-4x-6y-3 = 0$
(c) $x^2+y^2+6x+8y-11 = 0$ (d) $x^2+y^2-2y-35 = 0$
(e) $x^2+y^2-4x+10y-20 = 0$ (f) $x^2+y^2-10x+16 = 0$
(g) $x^2+y^2+4x-6y-3 = 0$ (h) $x^2+y^2+-6x-8y = 0$
(i) $x^2+y^2-2ax-24y = 0$ (j) $x^2+y^2-2ax-2by+b^2 = 0$

3. (a) (0,0), 4 (b) (0,-2), 7 (c) (4,2), 6 (d) (-5,-3), 5
(e) (2,3), 5 (f) (-a,-b), k (g) (5,-2), 4 (h) (-3,4), 6
(i) $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, 3 (j) $(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$, $\sqrt{5}$

4. (a) $x^2+y^2-5x+3y-22 = 0$ (b) $x^2+y^2-10x-6y-29 = 0$ (c) $x^2+y^2-a^2=0$
(d) $x^2+y^2-2x-6y-3 = 0$ (e) $x^2+y^2-5x-5y = 0$ (f) $x^2+y^2-13=0$

5. (a) $x^2+y^2-2x-2y-8 = 0$ (b) $x^2+y^2-6x-4y+8 = 0$ (c) $x^2+y^2-ax-by=0$
(d) $x^2+y^2-4y-6 = 0$ (e) $13x^2+13y^2-64x+10y-332 = 0$ (f) $x^2+y^2-1=0$

7. (a) $x^2+y^2-6x-8y+9 = 0$ (b) $x^2+y^2-8x-10y+16 = 0$ (c) $x^2+y^2-12x+6y+9=0$
(d) $x^2+y^2+10x+8y+16 = 0$ (e) $x^2+y^2-4x-4y+4 = 0$ (f) $x^2+y^2-10x-10y+25=0$

8. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 5.1

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) $\frac{24}{25},\frac{-7}{25},\frac{-24}{7}$ (b) $\frac{120}{169},\frac{119}{169},\frac{120}{119}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}$
(d) $\frac{336}{625},\frac{-527}{625},\frac{-336}{527}$ (e) $\frac{24}{25},\frac{7}{25},\frac{24}{25}$ (f) $\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}$

(g) $1, 0$ (h) $0, 1$ (i) $\frac{117}{125}, \frac{-44}{125}$ (j) $\frac{-1}{2}, 0$

(k) $\frac{11}{2}$ (l) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

अभ्यास 5.2

(1) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

(2) (a) $\frac{24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{-24}{25}$ (b) $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$

(d) $1, 0$ (e) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}$ (f) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$

(3) (a) 1 (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{37}{55}$ (d) $-\frac{1}{2}\left(m^3 + \frac{1}{m^3}\right)$ (e) $\frac{1}{2}\left(p^3 + \frac{1}{p^3}\right)$

अभ्यास 5.3

(1) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

(2) (a) $\sqrt{3}$ cos10° (b) $-2sin55°\ sin15°$

(c) $2cos55°\ cos15°$ (d) $2cos75°\ sin25°$

(e) $2sin145°\ cos5°$ (f) $2cos33°\ sin13°$

(g) $2sin100°\ sin16°$ (h) $-2sin33°\ sin13°$

(i) $-cos10°$ (j) $2cos6\theta\ sin\theta$

(k) $-2sin6A\ cosA$ (l) $2cos4A\ cos3A$

(m) $2sin4x\ cosx$ (n) $2cos2\alpha\ sin\alpha$

(o) $2cos4x\ cosx$ (p) 2sin9θ cos2θ

(3) (a) $\frac{1}{2}[sin102° + sin18°]$ (b) $\frac{1}{2}[sin115° - sin29°]$

(c) $\frac{1}{2}[cos100° + cos22°]$ (d) $\frac{1}{2}[cos22° - cos100°]$

(e) $\frac{1}{2}[cos12° - \frac{1}{2}]$ (f) $\frac{1}{2}[cos41° - cos61°]$

(g) $\frac{1}{2}[sin72° + sin28°]$ (h) $-\frac{sin100°}{2}$

(i) sin7θ+sin3θ (j) $sin3x + sinx$

(k) sin16θ+sin2θ (l) 2sin9θ cos2θ

(m) cos14 θ + cos4θ (n) $\frac{1}{2}(sin8\alpha - sin2\alpha)$

अभ्यास 5.4

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 5.5

1. (a) 30° (b) 30° (c) 30° (d) 60° (e) 45°
   (f)30° (g) 60° (h)90° (i) 0° (j) 90°
2. (a) 60°, 300° (b) 150°, 210° (c) 135°, 225°
   (d) 240°, 300° (e) 30°, 330° (f) 60°, 240°
   (g) 240°, 300° (h) 60°, 240° (i) 210°, 240°
   (j) 120°,240°
3. (a) 0° (b) 45° (c) 60° (d) 30°150°
   (e) 30°, 150° (f) 45°, 135° (g) 30°, 150° (h) 30°, 150°
   (i) 0°,60° (j)18°, 162°
4. (a) 45° (b) 105° (c) 0°, 90° (d) 0°,60°, 360°
   (e) 0°,60°, 360° (f) 0°,240°, 360° (g) 75°,345°
   (h) 60° (i) 0°,120°, 360° (j) 75°,165°
5. (a) 0°, 60°,180°, 360° (b) 0°, 60°,90°, 120°, 180°, 270°,300°, 360°
   (c) 30°, 90°, 150°, 210°, 330 (d) 0°, 30°, 90°, 150°, 180°, 360°
   (e) 30°, 45°, 360 (f) 30°, 60°, 90°, 210°, 300°

अभ्यास 5.6

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (a) 103.92m, 43.92m (b)12.68m,30m (c)1014m,13.86m
   (d)32.79m,20.79m
3. (a) 98.35m (b) 692.80m (c) 138.56m (d)845.53m
4. (a) 40.98m (b)54.65m (c) 93.67m (d) 32.79m
5. (a) 54.89m (b) 40m,34.64m (c) 86.60m,150m
   (d) 25.36m,34.64m
6. (a) 120m, 51.96m (b) 70.98m (c) 749.45m (d) 28.39m, 10.39m
7. (a) 16.39m, 28.39m (b) 26.78m,16.78m (c) 47.32m, 27.32m (d) 49.75m
8. (a) 37m, 15.59m (b)38.38m (c)100m

अभ्यास 6.1

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) 0 (b) 0 (c) 0

3. (a) (1 -4), (4, 1), (-1, 4), (5, -3), (4, 1), (3, 5) b) -17 (c) 90^0 (d) 34,17

4. (a) 3 (b) 6 (c) 16

5. (a) 8 (b) $\frac{15}{2}$ (c) 7

6. (a) 0 (b) 14

7, 8 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 6.2.1

1 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) $3\vec{i}+\vec{j}$ = (3, 1) (b) (5, 7) (c) (3, 2.5)

3.(a) (2.4, 1) (b) (2.6, -2.4) (c) (-1, -4) (d) (2, 22)

अभ्यास 6.2.2

(a) $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ (b) $2\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$ (c) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{GF} = 0$

अभ्यास 6.2.3

1.(a) समानान्तर चतुर्भुज (b) 90^0 (c) 0

अभ्यास 7.1

1. (a) $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ द्वारा जनाउने स्थानान्तरण (b) [(0, 0), 180^0]

(c) E[(a, b), $K_1 \times k_2$] (d) $\begin{bmatrix}a_1 + a_2\\b_1 + b_2\end{bmatrix}$

2. (a) (-4, -6) (b) (-4, -6) (c) (-2, 7) (d) (3, -4) (e) (-3, -2) (f) (-4, 2)
(g) (-5, -3) (h) (1, 2) (i) (-6, -10) (j) (-15, -18) (k) (6, -9) (l) (-4, 7)

3, 4, 5 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 7.2

1. (a) ABC (b) OA (c) P1 (d) P (e) $OP \times OP^1 = OA^2$

2(a) $\left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$ (b) (1, 0) (c) (-7, 0) (d) (0, $\frac{5}{9}$)

(e) $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (f) $\left(\frac{64}{5}, \frac{48}{5}\right)$ (g) $\left(\frac{-40}{41}, \frac{-50}{41}\right)$

3.(a) 9 (b) 4

4.(a) (-7, 11) (b) (20, 21) (c) $\left(\frac{-87}{53}, \frac{-40}{53}\right)$

अभ्यास 7.3

1.(a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (c) 2×3 (d) $x + y = 0$ रेखामा परावर्तन

2.(a) (-4, 10) (b) (-9, 6) (c) (-2, 9) (d) $\left(\frac{-7}{2}, \frac{15}{2}\right)$

3.(a) $P^1(17, 23)$ Q^1 (32, 28)

(b) A^1 (2, 7) B^1(2, 10) C^1(5, 12), D^1(5, 16) (c) O^1 (0, 0) A^1(3, 1), B^1(5, 2), C^1(2, 1)

4.(a) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{3}\\0 & 1\end{bmatrix}$ (b)$\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$

5.(a) $\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -3\end{bmatrix}$

अभ्यास 8.1

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (a) 20,0.36 (b) 5, 0.1
3. (a) 14 (b) 201.5 (c) 7.27
4. 16

अभ्यास 8.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (a) 15.85, 0.36 (b) 11.6 (c) 113.3, 0.25
3. (a) 10.80, 0.36 (b) 7.27, 0.21 (c) 10.08, 0.30

4, 5 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 8.3

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (a) 6.89 (b) 28.35 (c) 6.05
3. (a) 11.23, 23% (b) 0.1767, 17.67% (c) 0.0429, 4.29%
4. (a) 26.7, 55.57%
5. (a) 1318.421 (b) 62.67 (c) 4.8%
6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।