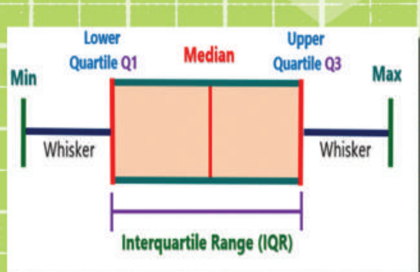
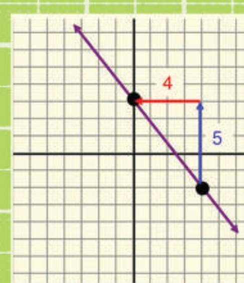
ऐच्छिक गणित

कक्षा-९





नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

ऐच्छिक गणित

कक्षा ९

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक
नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

© सर्वाधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

यस पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी सम्पूर्ण अधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र सानोठिमी, भक्तपुरमा निहित रहेको छ । पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

प्रथम संस्करण : वि.सं २०८१

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक विकास तथा परिमार्जन कार्यलाई निरन्तरता दिइँदै आएको छ । विद्यार्थीमा ज्ञानको खोजी गरी सिकाइ र वास्तविक जीवनबिच सम्बन्ध स्थापित गर्ने, सिद्धान्त र व्यवहारको समन्वय गर्ने, स्वपरावर्तित हुँदै ज्ञान, सिप र क्षमतालाई अद्यावधिक गर्ने सक्षमताको विकास हुनु आवश्यक छ। विद्यार्थीमा अधिकार, स्वतन्त्रता र समानताको प्रवर्धन गर्ने, स्वस्थ जीवनको अभ्यास गर्ने, तार्किक विश्लेषण गरी निर्णय गर्ने, वैज्ञानिक विश्लेषणका आधारमा व्यक्ति, समाज र राष्ट्रको दिगो विकासमा सरिक हुने सक्षमताको विकास पनि शिक्षाले गर्नुपर्छ। विद्यार्थीमा नैतिक आचरण प्रदर्शन गर्ने, सामाजिक सद्भावप्रति संवेदनशील हुने, पर्यावरणीय सन्तुलनप्रति संवेदनशील हुने, द्वन्द्व व्यवस्थापन गर्दै दिगो शान्तिका लागि प्रतिबद्ध रहने सक्षमताको विकास पनि माध्यमिक तहको शिक्षाबाट अपेक्षित छन् । यस तहको शिक्षाबाट आधुनिक ज्ञान, सिप, सूचना तथा सञ्चार प्रविधिको प्रयोग गर्ने, स्वावलम्बी र व्यवसायमुखी सिपको अभ्यास गर्ने, राष्ट्र, राष्ट्रियता र राष्ट्रिय आदर्शको सम्मान गर्ने, समाज स्वीकार्य आचरण र कार्य संस्कृतिको अवलम्बन गर्ने, सहिष्णु भाव राख्ने सक्षमता भएको नागरिक तयार गर्ने अपेक्षा रहेको छ । त्यस्तै सिर्जनशील, कल्पनाशील, उद्यमशील एवम् उच्च सोच र आदर्शमा आधारित व्यवहार गर्ने, समसामयिक चुनौतीहरूको सफल व्यवस्थापन गर्नेलगायतका विशेषताले युक्त स्वावलम्बी, देशभक्त, परिवर्तनमुखी, चिन्तनशील एवम् समावेशी समाज निर्माणमा योगदान गर्न सक्ने सक्षमतासहितको नागरिक तयार गर्नु माध्यमिक शिक्षाको लक्ष्य रहेको छ । यही लक्ष्य पूर्तिका लागि विद्यालय शिक्षाको राष्ट्रिय पाठ्यक्रम प्रारूप, २०७६ को मार्गदर्शनअनुरूप विकास भएको माध्यमिक शिक्षा (कक्षा ९-१०) पाठ्यक्रमअनुसार कक्षा ९ को ऐच्छिक गणित विषयको यो नमुना पाठ्यपुस्तक तयार पारिएको हो ।

यस पाठ्यपुस्तकको लेखन शक्ति प्रसाद आचार्य, सुजन काफ्ले र अनिल कुमार झाबाट भएको हो । पाठ्यपुस्तकलाई यस रूपमा ल्याउने कार्यमा यस केन्द्रका महानिर्देशक इम नारायण श्रेष्ठ, गणित विषय समितिका प्रा.डा. हरिप्रसाद उपाध्याय, प्रमिला बखती, डा. श्याम प्रसाद आचार्य, जगन्नाथ अधिकारी, रामचन्द्र ढकाल, ज्ञानेन्द्र वन, नवीन पौडेल, अनुपमा शर्मा, सत्यनारायण महर्जनको विशेष योगदान रहेको छ । यस पाठ्यपुस्तकको विषयवस्तु सम्पादन डा. टिकाराम पोखरेल र राजुकान्त आचार्य तथा भाषा सम्पादन इन्दु खनाल र लेआउट डिजाइन जयराम कुइँकेलबाट भएको हो। यसको विकासमा संलग्न सम्पूर्णप्रति केन्द्र हार्दिक कृतज्ञता प्रकट गर्दछ ।

पाठ्यपुस्तकलाई शिक्षणसिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यसबाट विद्यार्थीले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मदत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ। यस पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी, अनुभवकेन्द्रित, उद्देश्यमूलक र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ। सिकाइ र विद्यार्थीको जीवन्त अनुभवबिच तादात्म्य कायम गर्दै यसको सहज प्रयोग गर्न शिक्षकले सहजकर्ता, उत्प्रेरक, प्रवर्धक र खोजकर्ताका रूपमा भूमिकाको अपेक्षा गरिएको छ। पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्छ ।

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि. सं. २०८१

विषयसूची

क्र.स.	विषय	पृष्ठसङ्ख्या
1.	**सम्बन्ध र फलन (Relation and Function)**	**1**
2.	**त्रिकोणमिति (Trigonometry)**	**89**
3.	**ज्यामिति (Geometry)**	**146**
4.	**भेक्टर (Vector)**	**206**
5	**तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)**	**228**
6.	**सीमान्तमान (Limit)**	**267**

पाठ 1

सम्बन्ध र फलन
(Relation and Function)

1.1 परिचय (Introduction)

दुईओटा चलराशिबिचको स्पष्ट परिभाषित सम्बन्ध जनाउने गणितीय वाक्यलाई फलन भनिन्छ। फलन भन्ने शब्द सन् 1694 मा जर्मन गणितज्ञ लेबनिज (Leibniz) ले एउटा परिमाणको अर्को परिमाणसँग भएको निर्भरतालाई जनाउन सर्वप्रथम प्रयोग गरेका थिए ।

दैनिक जीवनका विभिन्न क्रियाकलापहरूमा समेत फलनको प्रयोग भएको पाइन्छ। जस्तै :निश्चित सावाँद्वारा निश्चित ब्याजदरमा लगानी गर्दा समय र ब्याज रकमबिचको सम्बन्ध, समान गतिमा गुडिरहेको अवस्थामा वस्तुले पार गर्ने दुरी र समयबिचको सम्बन्ध फलनको उदाहरण हो । फलनको प्रयोग गणित, विज्ञान, कम्प्युटर विज्ञान, अर्थशास्त्र, इन्जिनियरिङ, चिकित्साशास्त्र आदि क्षेत्रमा भएको पाइन्छ ।

Leibniz

1.1.1 क्रमजोडा (Ordered Pair)

तलको तालिका पूरा गर्नुहोस् :

समूह A	समूह B	जोडामा	क्रमजोडामा
2	4	(2, 4)	(2, 4)
3	6	……..	
4	8	……..	
5	10	……..	

निम्नानुसारका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) जोडामा लेख्दा, (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10) मा समूह A का प्रत्येक सदस्यको मान र समूह B का सङ्गती सदस्यको मानबिचको सम्बन्ध कस्तो छ ?

(ख) यदि जोडामा भएका सदस्यहरूको क्रम परिवर्तन गरियो भने तिनीहरूबिचको सम्बन्धमा के असर पर्ला ?

(ग) के पहिलेकै सम्बन्ध कायम रहन्छ ? खोजी गर्नुहोस् ।

यहाँ, जोडाहरू (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10) मा A का सदस्य B का सदस्यको आधा छ। यदि ती सदस्यहरूको क्रम परिवर्तन गरियो भने, (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5) हुन्छ । अब A का सदस्य B का सदस्यको दोब्बरको सम्बन्ध हुन्छ । त्यसैले यी सदस्यहरूको क्रम परिवर्तन गरी लेख्दा सम्बन्ध पनि परिवर्तन हुन्छ । यस्ता क्रम परिवर्तन गर्दा मान र अर्थ परिवर्तन हुने जोडालाई क्रमजोडा भनिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : के (4, 5) र (5, 4) ले एउटै विन्दु जनाउँछ ? लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

क्रमजोडामा क्रमको अर्थ महत्त्वपूर्ण हुन्छ, क्रम परिवर्तन हुँदा सम्बन्ध पनि परिवर्तन हुन जान्छ । क्रमजोडा (4, 5) मा पहिलो सदस्य 4 र दोस्रो सदस्य 5 हो ।

दुईओटा क्रमजोडाहरू बराबर हुनका लागि तिनीहरूका क्रमागत सदस्यहरू बराबर हुनुपर्छ । यदि (a, b) = (c, d) भए a = c र b = d हुन्छ, उदाहरणका लागि $(4, \frac{6}{2}) = (\frac{12}{3}, 3)$ यदि (a, b) = (b, a) भए a = b हुनुपर्छ ।

अल्पविराम (comma) चिह्न (,) ले छुट्याई सानोकोष्ठ (parentheses) भित्र निश्चित सम्बन्ध भएका क्रममा आउने जोडी सदस्यहरूलाई क्रमजोडा भनिन्छ । क्रमजोडालाई (x, y) को स्वरूपमा लेखिन्छ र x लाई पहिलो सदस्य (Antecedent) र y लाई दोस्रो सदस्य (consequent) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

यदि क्रमजोडाहरू $(x, 8)$ र (4, y) बराबर छन् भने x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $(x, 8) = (4, y)$

सङ्गती सदस्यहरूलाई एकआपसमा बराबर गर्दा,

$\therefore x = 4$ र $y = 8$

उदाहरण 2

यदि क्रमजोडाहरू (a, 3) र (5, b) ले सम्बन्ध $3x + 5y = 30$ लाई मान्य गर्छन् भने क्रमजोडा (a, b) को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

क्रमजोडा (a, 3) ले सम्बन्ध $3x + 5y = 30$ लाई मान्य गर्ने भएकाले,	क्रमजोडा (5, b) ले सम्बन्ध $3x + 5y = 30$ लाई मान्य गर्ने भएकाले,
$3 \times a + 5 \times 3 = 30$	$3 \times 5 + 5 \times b = 30$
अथवा, $3a + 15 = 30$	अथवा, $15 + 5b = 30$
अथवा, $3a = 30 - 15$	अथवा, $5b = 30 - 15$
अथवा, $3a = 15$	अथवा, $5b = 15$
$\therefore a = 5$	$\therefore b = 3$

आवश्यक क्रमजोडा, (a, b) = (5, 3)

अभ्यास 1.1 (A)

1. (क) क्रमजोडालाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।

   (ख) कस्ता क्रमजोडाहरू बराबर क्रमजोडा हुन्छन् ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (ग) यदि (a, b) = (m, n) भए a र m को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

2. तल दिइएका अवस्थामा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) $(x, 4) = (5, y)$ (ख) $(x - 1, y + 2) = (6, 7)$

   (ग) $(x - 3, y + 7) = (2, -5)$ (घ) $(2x - 5, 4) = (9, y + 4)$

   (ङ) $(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ (च) $(2x + y, 4) = (6, 3x - y)$

3. (क) p र q को मान कति कति हुँदा क्रमजोडाहरू (2p + 4, p – q) र (8, q) बराबर हुन्छन् ? लेख्नुहोस् ।

   (ख) m र n को मान कति कति हुँदा क्रमजोडाहरू (3m – 5, 2n + m) र (7, m + 2) बराबर हुन्छन् ? लेख्नुहोस् ।

4. यदि तलको क्रमजोडाहरूले सम्बन्ध $y = 2x + 4$ लाई मान्य गर्छन् भने क्रमजोडाहरूको बाँकी सदस्यहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) (1, ...) (ख) (3, ...) (ग) (..., 0) (घ) (..., –2)

5. (क) यदि क्रमजोडाहरू (3, p) र (q, 4) ले सम्बन्ध $4x + 3y = 24$ लाई मान्य गर्छन् भने क्रमजोडा (p, q) को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) यदि क्रमजोडाहरू (3, m) र (n, 7) ले सम्बन्ध $7x - 3y = 21$ लाई मान्य गर्छन् भने क्रमजोडा (m, n) को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्रयोगात्मक कार्य

आफ्नो विद्यालयका कक्षा 1 देखि कक्षा 10 सम्मका विद्यार्थीहरूको कक्षागत जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाई कक्षा र विद्यार्थी सङ्ख्यालाई क्रमजोडामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (क) $x = 5, y = 4$ (ख) $x = 7, y = 5$ (ग) $x = 5, y = -12$ (घ) $x = 7, y = 0$

   (ङ) $x = 2, y = \frac{4}{3}$ (च) $x = 2, y = 2$

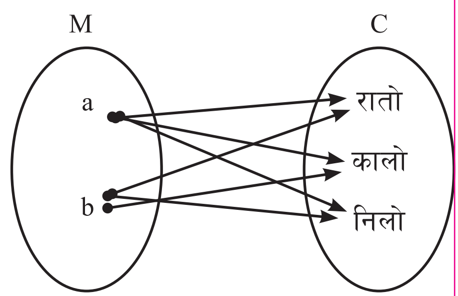
3. (क) p = 2, q = 1 (ख) m = 4, n = 1 4. (क) 6 (ख) 10 (ग) –2 (घ) –3

5. (क) (4, 3) (ख) (0, 6)

1.1.2 कार्टेसियन गुणनफल (Cartesian Product)

क्रियाकलाप 1 **कार्टेसियन गुणनफलको अवधारणा**

दायाँको चित्रमा एउटा कम्पनीले उत्पादन गरेका मोटरसाइकलको मोडेललाई समूह M र तिनीहरूको रङलाई समूह C ले जनाई तिनीहरूबिचको सम्बन्धलाई प्रस्तुत गरिएको छ । सबै क्रमजोडाहरूको एउटा समूह निर्माण गर्नुहोस् ।



प्रक्रिया : प्रत्येक विद्यार्थीले माथिको समस्यालाई समाधान गरी यस्तो समूहलाई के भनिन्छ, शिक्षकसँगको सहकार्यमा निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

यहाँ, M = {a, b} र C = {रातो, कालो, निलो} छन् । कम्पनीको उत्पादन मोडेल र रङहरूलाई क्रमजोडाको समूहमा प्रस्तुत गर्दा,

M × C = { (a, रातो), (a, कालो), (a, निलो), (b, रातो), (b, कालो), (b, निलो)} यसलाई समूह M र C को कार्टेसियन गुणनफल भनिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : माथि जस्तै गरी C × M लाई पनि क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् । के M × C र C × M लाई बराबर समूह भन्न सकिन्छ ? खोजी गर्नुहोस् ।

दुईओटा समूह $A \neq \phi$ र $B \neq \phi$ मा पहिलो सदस्य A बाट र दोस्रो सदस्य B बाट लिएर बनाएका सम्पूर्ण क्रमजोडाहरूको समूहलाई A र B को कार्टेसियन गुणनफल भनिन्छ ।
तसर्थ $A \times B = \{(x, y) : x \in A, x \in B\}$

कार्टेसियन गुणनफललाई प्रस्तुत गर्ने तरिकाहरू (Ways of Representing Cartesian Product)

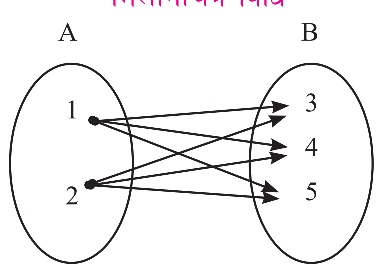
मानौँ, A = {1, 2} र B = {3, 4, 5}, A × B लाई प्रस्तुत गर्ने तरिकाहरू यसप्रकार छन् :

कार्टेसियन गुणन, A × B = {(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)}

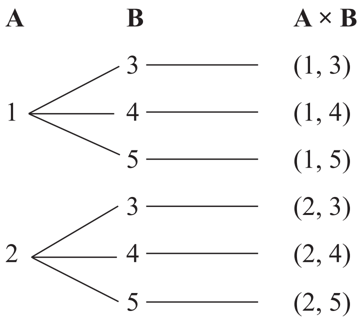
तालिका विधि

	B			
A	×	3	4	5
	1	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
	2	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)

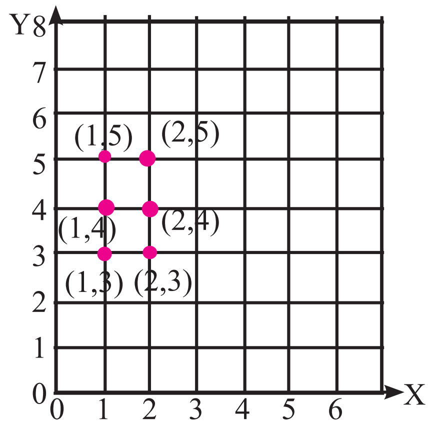
मिलानचित्र विधि



वृक्षचित्र विधि



लेखाचित्र विधि



उदाहरण 1

यदि $A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$ भए समूह A र B पत्ता लगाउनुहोस् । n(A), n(B) र $n(A \times B)$ पनि पत्ता लगाउनुहोस् । के $A \times B$ र $B \times A$ बराबर छन् ? लेख्नुहोस् ।

समाधान

$A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

A = क्रमजोडाका पहिलो सदस्यहरूको समूह $= \{2, 3\}$

B = क्रमजोडाका दोस्रो सदस्यहरूको समूह $= \{4, 5, 6\}$

त्यसैले, $n(A) = 2, n(B) = 3, n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 2 \times 3 = 6$

अब, $B \times A = \{4, 5, 6\} \times \{2, 3\} = \{(4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (6, 2), (6, 3)\}$

$\therefore A \times B \neq B \times A$

उदाहरण 2

यदि $A = \{x : x \leq 5, x \in N\}$ र $B = \{x: x^2 - 4 = 0, x \in Z\}$ भए $A \times B$ र $B \times A$ पत्ता लगाउनुहोस् । यहाँ n ले प्राकृतिक सङ्ख्या र z ले पूर्णाङ्कहरू जनाउँछ ।

समाधान

$A = \{x: x \leq 5, x \in N\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$B = \{x : x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\}$

फेरि,

$A \times B = \{(1, -2), (1, 2), (2, -2), (2, 2), (3, -2), (3, 2), (4, -2), (4, 2), (5, -2), (5, 2)\}$

$B \times A = \{(-2, 1) (-2, 2), (-2, 3), (-2, 4) (-2, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

$x^2 - 4 = 0$

अथवा, $(x - 2)(x + 2) = 0$

अथवा, $x - 2 = 0, x + 2 = 0$

अथवा, $x = 2, x = -2$

अभ्यास 1.1 (B)

1. (क) कार्टेसियन गुणनफल भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (ख) समूह A र B को गणनात्मकता क्रमशः 3 र 2 छ भने $A \times B$ को गणनात्मकता कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

   (ग) यदि $n(A \times B) = x$, $n(A) = y$ र $n(B) = z$ भए x, y र z को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

2. (क) यदि $A = \{2, 3\}$ र $B = \{7\}$ भए $A \times B$ पत्ता लगाई लेखाचित्र र मिलानचित्रबाट प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

   (ख) यदि $A = \{2, 3\}$ र $B = \{4, 5, 6\}$ भए $B \times A$ पत्ता लगाई मिलानचित्र र तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. (क) यदि $A \times B = \{(a, 1), (a, 5), (a, 2), (b, 2), (b, 1), (b, 5)\}$ भए समूह A, समूह B, n(A), n(B), $B \times A$ र $n(B \times A)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) यदि $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4)\ (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5)\ (3, 6)\}$ भए समूह A, समूह B, n(A), n(B), $B \times A$ र $n(B \times A)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (क) यदि $A = \{x : x \le 4, x \in N\}$ र $B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0, x \in N\}$ भए $A \times B$ र $B \times A$ पत्ता लगाउनुहोस् । साथै तालिका, मिलानचित्र र वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

   (ख) यदि $M = \{x: x \le 3, x \in N\}$ र $N = \{y : y = x - 1, x \in M\}$ भए $M \times N$ पत्ता लगाउनुहोस् । साथै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 6 (ग) $x = yz$
2. (क) $A \times B = \{(2, 7), (3, 7)\}$, प्रस्तुति शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

   (ख) $B \times A = \{(4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (6, 2), (6, 3)\}$, प्रस्तुति शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
3. (क) $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $n(A) = 2$, $n(B) = 3$, $B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (5, a), (5, b)\}$, $n(B \times A) = 6$, प्रस्तुति शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

   (ख) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $n(A) = 3$, $n(B) = 3$, $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1)\ (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2)\ (6, 3)\}$, $n(B \times A) = 6$, प्रस्तुति शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
4. (क) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$, $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$, प्रस्तुति शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

   (ख) $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{0, 1, 2\}$, $M \times N = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$, प्रस्तुति शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

1.1.3 सम्बन्ध (Relation)

क्रियाकलाप 1

तलको सम्बन्ध अध्यन गर्नुहोस् :

→ रेसमकी छोरी शिला

→ मिलनकी छोरी सकिना

→ सुरेन्द्रकी छोरी सुस्मिता

यहाँ, प्रस्तुत सम्बन्धलाई क्रमजोडामा राख्दा, (रेसम, शिला), (मिलन, सकिना), (सुरेन्द्र, सुस्मिता) हुन्छ ।

यहाँ, बुबाहरूको समूह, A = {रेसम, मिलन, सुरेन्द्र} र छोरीहरूको समूह B = {शिला, सकिना, सुस्मिता} भए समूह A र समूह B का सदस्यहरूको बिचमा "को छोरी" भन्ने सम्बन्ध रहेको हुन्छ । उक्त सम्बन्धलाई R मान्दा, R = {(रेसम, शिला), (मिलन, सकिना), (सुरेन्द्र, सुस्मिता)}

यसैगरी गणितमा दुई समूहहरूबिच सदस्यहरूको सम्बन्धलाई पनि भन्दा ठुलो, भन्दा सानो, बराबर, दोब्बर, आधा, वर्ग जस्ता विभिन्न तरिकाले प्रस्तुत गर्ने गरिन्छ ।

यहाँ, R र समूह $A \times B$ बिच कस्तो सम्बन्ध पाउनुभयो ? खोजी गर्नुहोस् । के समूह R का सबै सदस्यहरू समूह $A \times B$ मा छन् ? उसोभए R लाई $A \times B$ को उपसमूह भन्न सकिन्छ ?

समूह A र B बिचको सम्बन्ध R ती दुई समूहहरूबिचको कार्टेसियन गुणनफल $A \times B$ को उपसमूह हुन्छ, यसलाई सङ्केतमा $R \subseteq A \times B$ लेखिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : यदि कुनै एक समूह वा दुबै समूह खाली भएमा दुई समूहका सदस्यहरूबिच कस्तो सम्बन्ध परिभाषित गर्न सकिएला ? छलफल गर्नुहोस् ।

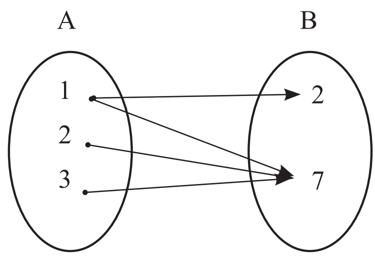
दुई समूहहरूबिचको कार्टेसियन गुणनफलको उपसमूहलाई सम्बन्ध भनिन्छ । यदि A र B बिचको सम्बन्धलाई R ले जनाएमा $R \subseteq A \times B$ हुन्छ । $A \times B$ का क्रमजोडाहरूमा भएका पहिला र दोस्रा सदस्यहरूबिचको सम्बन्धहरूका आधारमा उपसमूह R लाई परिभाषित गर्न सकिन्छ । सम्बन्ध R मा भएका क्रमजोडामा दोस्रो सदस्यलाई पहिलो सदस्यको प्रतिविम्ब पनि भनिन्छ ।

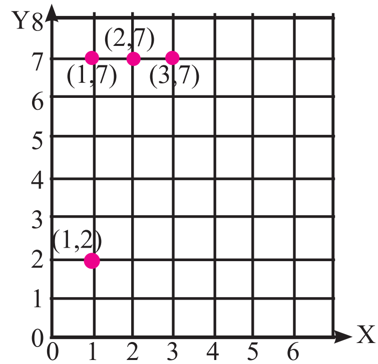
सम्बन्धलाई प्रस्तुत गर्ने तरिकाहरू (Ways of Representing of a Relation)

कुनै दुई समूहहरू $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 7\}$ बिचको सम्बन्ध R, "A का सदस्य B का भन्दा सानो" छ, अब यो सम्बन्धलाई निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

$A \times B = \{(1, 2), (1, 7), (2, 2), (2, 7), (3, 2), (3, 7)\}$

$R = \{(1, 2), (1, 7), (2, 7), (3, 7)\}$

<table>
<tr><th>मिलान चित्रबाट</th><th>लेखाचित्रबाट</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>तालिकाबाट
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>2</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td></tr>
</table>
</td><td>क्रमजोडाको समूहबाट
R = {(1, 2), (1, 7), (2, 7), (3, 7)}</td></tr>
<tr><td>समूह निर्माण विधि
R= $\{(x, y): x < y\}$</td><td></td></tr>
</table>

उदाहरण 1

यदि A × B = { (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3) (3, 4)} भए तलका सम्बन्धहरू क्रमजोडामा लेख्नुहोस् ।

(क) भन्दा सानो (ख) बराबर (ग) वर्ग (घ) भन्दा ठुलो (ङ) वर्गमूल

समाधान

यहाँ, A × B = {(1, 2), (1, 3), (1, 4) (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}

(क) भन्दा सानो सम्बन्ध = $\{(x, y) : x < y\}$ = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

(ख) बराबर सम्बन्ध = $\{(x, y) : x = y\}$ = {(2, 2), (3, 3)}

(ग) वर्ग सम्बन्ध = $\{(x, y) : x = y^2\} = \phi$

(घ) भन्दा ठुलो सम्बन्ध = $\{(x, y): x > y\}$ = {(3, 2)}

(ङ) वर्गमूल सम्बन्ध = $\{(x, y): x = \sqrt{y}\}$ = {(2, 4)}

उदाहरण 2

यदि कुनै सम्बन्ध $R = \{(x, y): y = 2x, x < 4, x \in N\}$ भए

सम्बन्ध R को सबै क्रमजोडाहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको सम्बन्ध, $R = \{(x, y): y = 2x, x < 4, x \in N\}$, $x = 1, 2, 3$ र $y = 2x$

$x = 1, y = 2x = 2 \times 1 = 2$, तसर्थ क्रमजोडा $(1, 2)$

$x = 2, y = 2x = 2 \times 2 = 4$, तसर्थ, क्रमजोडा $(2, 4)$

$x = 3, y = 2x = 2 \times 3 = 6$, तसर्थ, क्रमजोडा $(3, 6)$

$\therefore R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

सम्बन्धका प्रकारहरू (Types of Relation)

यदि सम्बन्ध R कार्टेसियन गुणन $A \times A$ को उपसमूह भए, R लाई समूह $A \neq \phi$ भित्रको सम्बन्ध भनिन्छ ।

जस्तै : यदि $A = \{1, 2, 3\}$ र $R = \{(x, y): y = x^2\}$ भए,

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ र $R = \{(1, 1)\}$

यहाँ सम्बन्ध R लाई समूह A भित्रको सम्बन्ध भनिन्छ ।

सम्बन्धहरू मुख्य गरी तीन प्रकार हुन्छन् :

(क) रिफ्लेक्सिभ सम्बन्ध (Reflexive Relation)

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गर्नुहोस् :

(अ) सरलरेखाहरूबिचको समानान्तर सम्बन्ध रिफ्लेक्सिभ हो किनकि कुनै सरलरेखा l का लागि $l \parallel l$ हुन्छ ।

(आ) ज्यामितीय वस्तुहरूबिचको अनुरूपता सम्बन्ध रिफ्लेक्सिभ हो किनकि जस्तै $\Delta ABC \cong \Delta ABC$ हुन्छ । त्यस्तै कोणहरूबिच, रेखाखण्डहरूबिच, बहुभुजहरूबिच पनि अनुरूपताको सम्बन्ध हुन्छ जुन रिफ्लेक्सिभ सम्बन्ध हो ।

समूह A का सबै सदस्यहरूको आफ्नो आफैसँग सम्बन्ध छ भने त्यस्तो सम्बन्ध R लाई रिफ्लेक्सिभ सम्बन्ध भनिन्छ । जस्तै : सङ्ख्यामा हुने बराबर सम्बन्ध रिफ्लेक्सिभ हो किनकि कुनै सङ्ख्या a का लागि $a = a$ हुन्छ ।

यदि समूह A को कुनै सम्बन्ध R मा A का सबै सदस्यहरू x का लागि $(x, x) \in R$ अर्थात् $R = \{(x, x): \text{for all } x \in A\}$ भए त्यस्तो सम्बन्ध R लाई रिफ्लेक्सिभ भनिन्छ ।

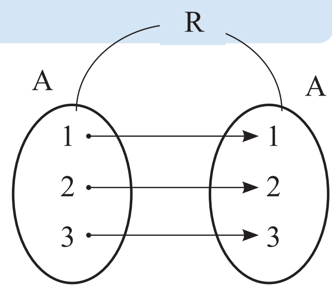
उदाहरण 1

$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ भए

$1 \in A \rightarrow (1, 1) \in R$

$2 \in A \rightarrow (2, 2) \in R$

$3 \in A \rightarrow (3, 3) \in R$

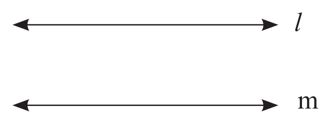


यहाँ समूह A का सबै सदस्यहरूको आफ्नो आफैँसँग सम्बन्ध छ त्यसैले R लाई रिफ्लेक्सिभ सम्बन्ध हो ।

विचारणीय प्रश्न : यदि $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ भएको भए R_1 लाई पनि रिफ्लेक्सिभ भन्न सकिन्छ ? कारण दिनुहोस् ।

(ख) सिमेट्रिक सम्बन्ध (Symmetric Relation)

तलको उदाहरणहरू अध्ययन गर्नुहोस् :



(अ) दुई सङ्ख्याहरू x र y बिचको बराबर सम्बन्ध सिमेट्रिक हो किनकि $x = y$ भए, $y = x$ पनि हुन्छ ।

(आ) दुई सरलरेखाहरू l र m बिचको समानान्तर सम्बन्ध सिमेट्रिक हो किनकि $l \parallel m$ भए $m \parallel l$ पनि हुन्छ ।

(इ) दुई ज्यामितीय वस्तुहरूबिचको अनुरूपता सम्बन्ध सिमेट्रिक हो । जस्तै : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ भए $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ पनि हुन्छ । त्यस्तै कोणहरूबिच, रेखाखण्डहरूबिच, बहुभुजहरूबिच पनि अनुरूपताको सम्बन्ध हुन्छ जुन सिमेट्रिक सम्बन्ध हो ।

समूहका दुई सदस्यहरू x र y का लागि x को सम्बन्ध y सँग भई y को पनि x सँग उही सम्बन्ध छ भने त्यस्तो सम्बन्धलाई सिमेट्रिक सम्बन्ध भनिन्छ ।

समूह A मा भएको सम्बन्ध R मा यदि $(x, y) \in R$ हुँदा $(y, x) \in R$ अर्थात् $R = \{(x, y) : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R, x, y \in A\}$ भएमा R लाई सिमेट्रिक सम्बन्ध भनिन्छ ।

यदि $R: A \rightarrow A$ सम्बन्ध हो जसमा $xRy \rightarrow yRx$ भए उक्त सम्बन्ध R लाई सिमेट्रिक सम्बन्ध भनिन्छ ।

उदाहरण 2

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ र $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$ भए

$(1, 1) \in R \rightarrow (1, 1) \in R$, $(1, 2) \in R$ तर $(2, 1) \notin R$

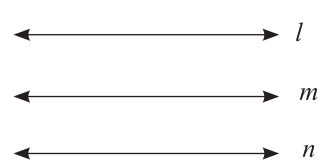
$(2, 2) \in R \rightarrow (2, 2) \in R$, $(3, 1) \in R$ तर $(1, 3) \notin R$

जुनसुकै दुई सदस्यहरू लिँदा, यदि $(x, y) \in R$ हुँदा $(y, x) \in R$ छैन । तसर्थ माथिको सम्बन्ध R सिमेट्रिक होइन ।

विचारणीय प्रश्न : यदि $R_1 = \{(1, 2), (1, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ लाई सिमेट्रिक भन्न सकिन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(ग) ट्रान्जिटिभ सम्बन्ध (Transitive Relation)

तलका उदाहरण अध्ययन गर्नुहोस् :



(अ) तीन सङ्ख्याहरू x, y र z बिचको बराबर सम्बन्ध ट्रान्जिटिभ हो किनकि $x = y, y = z$ भए $x = z$ पनि हुन्छ ।

(आ) तीन सरलरेखाहरू l, m र n बिचको समानान्तर सम्बन्ध ट्रान्जिटिभ हो किनकि $l \parallel m$ र $m \parallel n$ भए $l \parallel n$ पनि हुन्छ ।

(इ) कुनै तीन ज्यामितीय वस्तुहरूबिचको अनुरूपता सम्बन्ध ट्रान्जिटिभ हो । जस्तै : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, $\Delta DEF \cong \Delta GHI$ भए $\Delta ABC \cong \Delta GHI$ पनि हुन्छ । त्यस्तै कोणहरूबिच, रेखाखण्डहरूबिच, बहुभुजहरूबिच पनि अनुरूपताको सम्बन्ध हुन्छ जुन ट्रान्जिटिभ सम्बन्ध हो । यसैगरी समरूप त्रिभुजहरूबिचको सम्बन्ध पनि ट्रान्जिटिभ सम्बन्ध हुन्छ ।

यदि समूहको कुनै सदस्य x को सम्बन्ध अर्को सदस्य y सँग र y को सोही सम्बन्ध अर्को सदस्य z सँग भएमा मात्र x को पनि सोहि सम्बन्ध z सँग भएमा त्यस्तो सम्बन्ध R लाई ट्रान्जिटिभ सम्बन्ध भनिन्छ ।

समूह A का कुनै तीनओटा सदस्यहरू x, y र z का लागि यदि $(x, y) \in R$ र $(y, z) \in R$ हुँदा $(x, z) \in R$ भएमा R लाई ट्रान्जिटिभ सम्बन्ध भनिन्छ ।

सम्बन्ध $R: A \rightarrow A$ मा $x R y$ र $y R z$ भए $x R z$ हुन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : यदि समूह $A = \{1, 2, 3\}$ र $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ भए के R लाई ट्रान्सिटिभ सम्बन्ध भनिन्छ ? कारण दिनुहोस् ।

(घ) समतुल्य सम्बन्ध (Equivalence Relation)

यदि कुनै सम्बन्ध रिफ्लेक्सिभ (reflexive), सिमेट्रिक (symmetric) र ट्रान्जिटिभ (transitive) तीनओटै अवस्थामा भए उक्त सम्बन्धलाई समतुल्य सम्बन्ध (equivalence relation) भनिन्छ । माथिका उदाहरणअनुसार बराबर, समानान्तर र अनुरूपता आदि सबै समतुल्य सम्बन्ध हुन् ।

उदाहरण 3

यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ छ र $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ भए के सम्बन्ध R लाई समतुल्य सम्बन्ध भन्न सकिन्छ ? परीक्षण गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

समाधान

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ र $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ दिइएको छ भने

सम्बन्ध R, रिफ्लेक्सिभ, सिमेट्रिक, ट्रान्जिटिभ सबै छ वा छैन परीक्षण गरौँ ।

(क) रिफ्लेक्सिभ (Reflexive):

$1 \in A \rightarrow (1, 1) \in R$, $2 \in A \rightarrow (2, 2) \in R$

$3 \in A \rightarrow (3, 3) \in R$, $4 \in A \rightarrow (4, 4) \in R$

$\therefore$ समूह A का सबै सदस्य x का लागि $(x, x) \in R$ छ त्यसैले R रिफ्लेक्सिभ सम्बन्ध हो ।

(ख) सिमेट्रिक सम्बन्ध (Symmetric):

$(1, 1) \in R \rightarrow (1, 1) \in R$, $(2, 2) \in R \rightarrow (2, 2) \in R$

$(3, 3) \in R \rightarrow (3, 3) \in R$, $(4, 4) \in R \rightarrow (4, 4) \in R$

$(2, 3) \in R$, $(3, 2) \notin R$, $(3, 4) \in R$, $(4, 3) \notin R$

$\therefore$ R मा भएको सबै (x, y) का लागि $(y, x) \notin R$ भएकाले R सिमेट्रिक होइन ।

यसर्थ R लाई समतुल्य सम्बन्ध भन्न सकिदैन ।

उदाहरण 4

यदि $M = \{1, 2\}$ भए $R = M \times M$ पत्ता लगाउनुहोस् । के R लाई समतुल्य सम्बन्ध भन्न सकिन्छ ? परीक्षण गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ , $M = \{1, 2\}, R = M \times M = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

(क) रिफ्लेक्सिभ (Reflexive)

$1 \in M \rightarrow (1, 1) \in R$ $\quad$ $2 \in M \rightarrow (2, 2) \in R$

यसरी समूह A का सबै सदस्य x का लागि $(x, x) \in R$, छ । त्यसैले R लाई रिफ्लेक्सिभ भनिन्छ ।

(ख) सिमेट्रिक सम्बन्ध (Symmetric)

$(1, 1) \in R \rightarrow (1, 1) \in R$ $\quad$ $(1, 2) \in R \rightarrow (2, 1) \in R$

$(2, 1) \in R \rightarrow (1, 2) \in R$ $\quad$ $(2, 2) \in R \rightarrow (2, 2) \in R$

यसरी R मा भएको सबै (x, y) का लागि (y, x) हरू पनि R मा छन् । त्यसैले R सिमेट्रिक हो ।

(ग) ट्रान्जिटिभ (Transitive Relation)

$(1, 2)$ र $(2, 1) \in R \rightarrow (1, 1) \in R$ $\quad$ $(1, 2)$ र $(2, 2) \in R \rightarrow (1, 2) \in R$

$(2,1)$ र $(1, 1) \in R \rightarrow (2, 1) \in R$ $\quad$ $(2, 1)$ र $(1, 2) \in R \rightarrow (2, 2) \in R$

$\therefore$ सबै क्रमजोडाहरू (x, y) र (y, z) सम्बन्ध R मा हुँदा (x, z) पनि सम्बन्ध R मा छन् । तसर्थ R, ट्रान्जिटिभ हो ।

निष्कर्ष : माथिको परीक्षणबाट दिइएको सम्बन्ध R, रिफ्लेक्सिभ (reflexive), सिमेट्रिक (symmetric) र ट्रान्जिटिभ (transitive) भएकाले R लाई समतुल्य सम्बन्ध भनिन्छ ।

अभ्यास 1.1 (C)

1. (क) सम्बन्धको परिभाषा उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
   (ख) सम्बन्ध जनाउने तरिकाहरू के के हुन् ? लेख्नुहोस् ।
   (ग) तलका सम्बन्धहरूलाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् :
   (i) सिमेट्रिक (Symmetric relation) $\quad$ (ii) रिफ्लेक्सिभ (Reflexive Relation)
   (iii) ट्रान्जिटिभ (Transitive relation) $\quad$ (iv) समतुल्य (Equivalence relation)
   (घ) यदि $R = \{(a, a), (b, b)\}$ भए R कस्तो सम्बन्ध हो ?
   (ङ) यदि $R = \{(a, b)\}$ भए R को सिमेट्रिक सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।
2. यदि $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$ भए तल दिइएका सम्बन्धहरू पत्ता लगाई मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :
   (क) $R_1 = \{(x, y): x + y = 6\}$ $\quad$ (ख) $R_2 = \{(x, y): x < y\}$

(ग) $R_3 = \{(x, y): y = x^2\}$

3. यदि A = {1, 2, 3} र B = {2, 3, 4} भए A × B निकाली तल दिइएअनुसारका सम्बन्धहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) भन्दा ठुलो (is greater than) (ख) बराबर (is equal to) (ग) दुई गुणा (is double of)

(घ) आधा (is half of) (ङ) वर्ग (is square of)

4. यदि A = {6, 7, 8, 10} र B = {2, 4, 6} भए A × B बाट तल दिइएअनुसारका सम्बन्धहरू पत्ता लगाई तोकिएका आधारमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(i) क्रमजोडाहरूको समूहद्वारा (ii) मिलानचित्रबाट (iii) लेखाचित्रबाट (iv) तालिकाबाट

(क) $R_1 = \{(x, y): x + y < 12, x \in A, x \in B\}$ (ख) $R_2 = \{(x, y): 2x + y > 10, x \in A, y \in B\}$

5. समूह {1, 2, 3} मा परिभाषित सम्बन्ध R = {(1, 1),(2, 2}, (3, 3), (1, 2), (2, 3)} भए R समतुल्य सम्बन्ध हो वा होइन ? परीक्षण गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. समूह A = {4, 5, 6} भए पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) A × A (ख) A मा रिफ्लेक्सिभ (reflexive) हुने सम्बन्ध R_1

(ग) A मा सिमेट्रिक (symmetric) हुने सम्बन्ध R_2

(घ) A मा ट्रान्जिटिभ (transitive) हुने सम्बन्ध R_3

उत्तर

1. (क), (ख), (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (घ) रिफ्लेक्सिभ (ङ) R = {(b, a)}

2. (क) R_1 = {(1, 5), (2, 4)} (ख) R_2 = {(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}

(ग) R_3 = {(2, 4)} मिलानचित्रमा गरेको प्रस्तुति शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. A × B = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}

(क) $R = \{(x, y): x > y\}$ = {(3, 2)} (ख) $R = \{(x, y): x = y\}$ = {(2, 2), (3, 3)} (ग) $R = \{(x, y): x = 2y\} = \phi$

(घ) $R = \{(x, y): x = \frac{y}{2}\}$ = {(1, 2), (2, 4)} (ङ) $R = \{(x, y): x = y^2\} = \phi$

4. A × B = {(6, 2), (6, 4), (6, 6), (7, 2), (7, 4), (7, 6), (8, 2), (8, 4), (8, 6), (10, 2), (10, 4), (10, 6)}

(क) $R = \{(x, y): x + y < 12\}$ = {(6, 2), (6, 4), (7, 2), (7, 4), (8, 2)}

(ख) $R = \{(x, y): 2x + y > 10\}$ = {(6, 2), (6, 4), (6, 6), (7, 2), (7, 4), (7, 6), (8, 2), (8, 4), (8, 6), (10, 2), (10, 4), (10, 6)}

प्रस्तुतीकरण शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. (क) A × A = {(4, 4), (4, 5}, (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

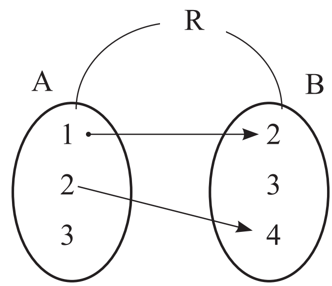
(ख) $R_1 = \{(x, x): x \in A\}$ = {(4, 4), (5, 5}, (6, 6)}

(ग) $R_2 = \{(x, y): (x, y) \in R \text{ implies } (y, x) \in R\}$ = {(4, 5), (5, 4}, (5, 6), (6, 5)}

(घ) $R_3 = \{(x, y): (x, y) \in R \text{ and } (y, z) \in R \text{ implies } (x, z) \in R\}$ = {(4, 5), (5, 6), (4, 6)}

1.1.4 सम्बन्धको क्षेत्र, विस्तारक्षेत्र र सहक्षेत्र
(Domain, Range and Co-domain of Relation)

यहाँ समूह A र B बिचको सम्बन्ध R छ । R मा भएका सबै क्रमजोडाहरूको पहिलो सदस्यहरूको समूहलाई सम्बन्ध R को क्षेत्र भनिन्छ ।



तसर्थ, सम्बन्धको क्षेत्र = $\{x \in A: (x, y) \in R\}$

जस्तै : यदि $A = \{1, 2, 3\}$ र $B = \{2, 3, 4\}$ र

$R = \{(x, y): y = 2x\} = \{(1, 2), (2, 4)\}$ भए

R को क्षेत्र = $\{1, 2\}$

R मा भएका सबै क्रमजोडाहरूको दोस्रो सदस्यहरूको समूहलाई सम्बन्ध R को विस्तारक्षेत्र भनिन्छ ।

तसर्थ, सम्बन्धको विस्तारक्षेत्र = $\{y \in B: (x, y) \in R, x\}$

R को विस्तारक्षेत्र = $\{2, 4\}$

सम्बन्धको सहक्षेत्र (Co-domain of Relation)

मानौं समूह A र B बिचको सम्बन्ध R छ । समूह B लाई सम्बन्धको सहक्षेत्र भनिन्छ । विस्तारक्षेत्र जहिले पनि सहक्षेत्रको उपसमूह हुन्छ । माथिको उदाहरणमा,

R को सहक्षेत्र = समूह B = $\{2, 3, 4\}$

उदाहरण 1

यदि सम्बन्ध $R = \{(x, y): y = 3x; x \in \{1, 2, 3\}\}$ भए

(क) R ले जनाउने सबै क्रमजोडाहरूको समूह लेख्नुहोस् ।

(ख) मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) सम्बन्ध R को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

समाधान

(क) दिइएको सम्बन्ध, $y = 3x; x \in \{1, 2, 3\}$

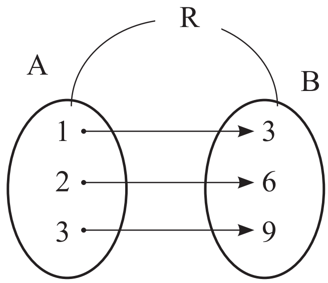
$x = 1$, हुँदा, $y = 3 \times 1 = 3$

$x = 2$, हुँदा, $y = 3 \times 2 = 6$

$x = 3$, हुँदा, $y = 3 \times 3 = 9$

तसर्थ, $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9)\}$

(ख) मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



(ग) R को क्षेत्र = {1, 2, 3}

R को विस्तारक्षेत्र = {3, 6, 9}

उदाहरण 2

प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह N मा सम्बन्ध R पत्ता लगाउनुहोस् जहाँ R= $\{(x, y) : y = x + 3, x < 4$ and $x, y \in N)\}$ साथै उक्त सम्बन्धको क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको सम्बन्ध R= $\{(x, y) : y = x + 3, x < 4$ and $x, y \in N\}$

R को क्षेत्र = $\{x : x < 4, x \in N\} = \{1, 2, 3\}$

यहाँ, $x = 1, 2, 3$ त्यस्तै, $y = x + 3$

$x = 1, y = 1 + 3 = 4$

$x = 2, y = 2 + 3 = 5$

$x = 3, y = 3+ 3 = 6$

तसर्थ , R = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)}

त्यसैले सम्बन्ध R को क्षेत्र = {1, 2, 3}, सम्बन्धको विस्तारक्षेत्र = {4, 5, 6}

अभ्यास 1.1 (D)

1. (क) सम्बन्धको क्षेत्र र विस्तारक्षेत्रका बारेमा उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (ख) सम्बन्ध R लाई तालिकामा प्रस्तुत गरिएको छ । R को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

x	1	3	5
y	5	7	9

   (ग) यदि R = {(a, b), (c, d)} भए R को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

2. तलका सम्बन्धहरूको क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) R = {(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)}

   (ख) R = {(2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9), (4, 8), (4, 12)}

   (ग) R = {(3, – 1), (4, – 2), (5, – 3), (6, – 4)}

(घ) $R = \{(4, -2), (4, 2), (1, -1), (1, 1)\}$

(ङ) $R = \{(5, 8), (6, 9), (7, 10), (8, 11)\}$

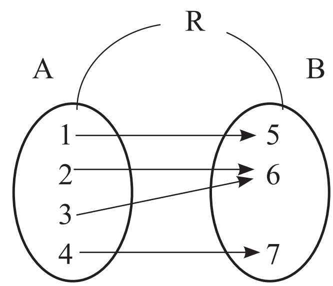
3. तलका सम्बन्धहरूको विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् :

(क) $y = 2x, x \in \{0, 1, 5\}$

(ख) $y = 2x + 3, x \in \{-1, 1, 2\}$

(ग) $y = 3x^2 - 4, -2 < x \le 3, x \in W$

4. दिइएको चित्रमा समूह A बाट B मा सम्बन्ध R लाई देखाइएको छ ।



(क) सम्बन्ध R लाई क्रमजोडाहरूको समूहको रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ख) सम्बन्ध R को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

5. तलका सम्बन्धहरूको क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र पत्ता लगाई क्रमजोडा र मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) $R = \{(x, y): y = 2x + 1, 0 \le x \le 3, x \in W\}$

(ख) $R = \{(x, y): y = x^2 - 2, 0 \le x \le 3, x \in W\}$

(ग) $R = \{(x, y): y = 3x^2 - 2x - 1, 1 \le x \le 4, x \in W\}$

(घ) $R = \{(x, y): y = x^2 - x, 0 \le x \le 3, x \in W\}$

उत्तर

1. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) R को क्षेत्र = {1, 3, 5}, विस्तारक्षेत्र = {3, 5}

(ग) R को क्षेत्र = {a. c}, विस्तारक्षेत्र = {b, d}

2. (क) R को क्षेत्र = {1, 2, 3}, विस्तारक्षेत्र = {3, 5} (ख) R को क्षेत्र = {2, 3, 4}, विस्तारक्षेत्र = {4, 6, 8, 9, 12}

(ग) R को क्षेत्र = {3, 4, 5, 6}, विस्तारक्षेत्र = {–1, –2, –3, –4}

(घ) R को क्षेत्र = {1, 4}, विस्तारक्षेत्र = {1, –1, 2, – 2}

(ङ) R को क्षेत्र = {5, 6, 7, 8}, विस्तारक्षेत्र = {8, 9, 10, 11}

3. (क) विस्तारक्षेत्र = {0, 2, 10} (ख) विस्तारक्षेत्र = {1, 5, 7} (ग) विस्तारक्षेत्र = {–1, –4, –1, 8, 23}

4. (क) R = {(1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 7)}, (ख) R को क्षेत्र = {1, 2, 3, 4}, विस्तारक्षेत्र = {5, 6, 7}

5. (क) R को क्षेत्र = {0, 1, 2, 3}, विस्तारक्षेत्र = {1, 3, 5, 7}

(ख) R को क्षेत्र = {0, 1, 2, 3}, विस्तारक्षेत्र = {–2, –1, 2, 7}

(ग) R को क्षेत्र = {1, 2, 3, 4}, विस्तारक्षेत्र = {0, 7, 20, 39}

(घ) R को क्षेत्र = {0, 1, 2, 3}, विस्तारक्षेत्र = {0, 2, 6}

1.1.5 विपरीत सम्बन्ध (Inverse Relation)

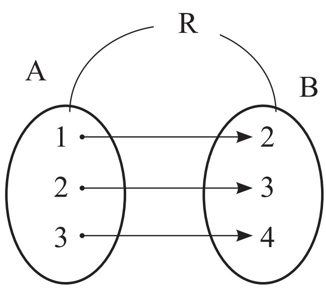
क्रियाकलाप 1

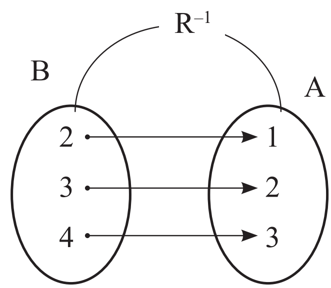
समस्या : यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ र $R = \{(x, y): y = x + 1, x \in A\}$ भए R को विपरीत सम्बन्ध पत्ता लगाई मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

प्रक्रिया : कक्षाका प्रत्येक विद्यार्थीले R लाई क्रमजोडाहरूको समूहमा लेखी मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । सम्बन्ध R मा भएको क्रमजोडाहरूको पहिलो र दोस्रो सदस्यहरूलाई एकअर्कामा परिवर्तन गरेर नयाँ समूह बनाउनुहोस् । R^{-1} लाई पनि मिलानचित्रमा प्रस्तुत गरी R र R^{-1} को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्रहरू एउटै छन् वा छैनन् तुलना गर्नुहोस् ।

निष्कर्ष : ....

मिलानचित्रबाट हेर्दा





समूह $A \neq \phi$ बाट $B \neq \phi$ मा भएको सम्बन्ध R को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्रलाई एकअर्कामा परिवर्तन गर्दा बन्ने नयाँ सम्बन्धलाई R को विपरीत सम्बन्ध भनिन्छ र यसलाई R^{-1} ले जनाइन्छ । अर्थात्, सम्बन्ध R मा भएको क्रमजोडाहरूको पहिलो र दोस्रो सदस्यहरूलाई एकअर्कामा परिवर्तन गरेर बनाइएको क्रमजोडाहरूको नयाँ समूहलाई सम्बन्ध R को विपरीत सम्बन्ध भनिन्छ, यसलाई R^{-1} ले जनाइन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ छ र $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ भए

(क) सम्बन्ध R को विपरीत सम्बन्ध R^{-1} लाई क्रमजोडाहरूको समूहका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ख) R^{-1} को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

समाधान

(क) $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (4, 3)\}$

(ख) R^{-1} को क्षेत्र $= \{1, 2, 3, 4\}$, R^{-1} को विस्तारक्षेत्र $= \{1, 2, 3, 4\}$

उदाहरण 2

एउटा सम्बन्ध $R = \{(x, y): y = x^2 - 1, 0 \le x \le 3, x \in W\}$ को विपरीत सम्बन्धको क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ R को क्षेत्र $= \{x: 0 \le x \le 3, x \in W\} = \{0, 1, 2, 3\}$

$x = 0,\ y = x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$

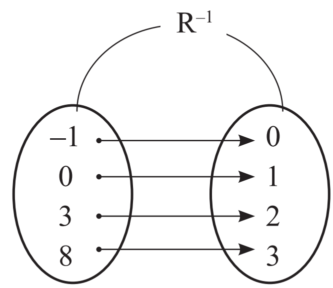
$x = 1,\ y = x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$

$x = 2,\ y = x^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$

$x = 3,\ y = x^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$

$R = \{(0, -1), (1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$

$R^{-1} = \{(-1, 0), (0, 1), (3, 2), (8, 3)\}$



R^{-1} को क्षेत्र $= \{-1, 0, 3, 8\}$, R को विस्तारक्षेत्र $= \{0, 1, 2, 3\}$

अभ्यास 1.1 (E)

1. (क) विपरीत सम्बन्ध भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (ख) यदि $R = \{(a, b), (c, d)\}$ भए R^{-1} लेख्नुहोस् ।

2. तलका सम्बन्धहरूको विपरीत सम्बन्ध लेख्नुहोस् :

   (क) $R = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$

   (ख) $R = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$

   (ग) $R = \{(3, -1), (4, -2), (5, -3), (6, -4)\}$

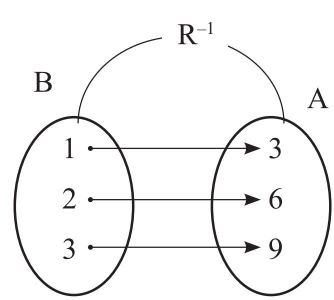
   (घ) $R = \{(8, 6), (7, 5), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)\}$

3. तलका सम्बन्धहरूलाई क्रमजोडाहरूको रूपमा लेखी विपरीत सम्बन्ध पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (क) $R = \{(x, y): y = 3x, x \in \{1, 2, 3\}\}$ (ख) $R = \{(x, y): y = 2x + 3, x \in \{1, 2, 3\}\}$

   (ग) $R = \{(x, y): y = x - 2, x \in \{6, 7, 8\}\}$ (घ) $R = \{(x, y): y = x^2, x \in \{0, 1, -1\}\}$

4. दिइएको चित्रमा समूह B बाट A मा सम्बन्ध R^{-1} लाई देखाइएको छ ।



   (क) सम्बन्ध R^{-1} लाई क्रमजोडाहरूको समूहका रूपमा लेखी क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

   (ख) सम्बन्ध R को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

   (ग) R^{-1} र R लाई समूह निर्माण विधिअनुसार लेख्नुहोस् ।

5. मानौँ समूह $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ सम्बन्ध $R = \{(x, y) : y = x$ को अपवर्त्य$\}$ भए R लाई क्रमजोडाहरूको समूहका रूपमा लेखी तलको समूहहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) R को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र (ख) R को विपरीत सम्बन्ध R^{-1}

(ग) R^{-1} को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र

6. यदि $A = \{2, 3, 4, 5\}$ छ । A मा परिभाषित सम्बन्ध $R = \{(x, y): y$ को गुणनखण्ड $x\}$ भए सम्बन्ध R लाई क्रमजोडाका रूपमा व्यक्त गरी पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) R को क्षेत्र (ख) R को विस्तारक्षेत्र

(ग) विपरीत सम्बन्ध (R^{-1}) पत्ता लगाई मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7. तलका सम्बन्धहरूको विपरीत सम्बन्धहरू निकाली क्षेत्र र विस्तारक्षेत्रसमेत लेख्नुहोस् र मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) $\{(x, y): y = x - 1, 4 \leq x \leq 7, x \in N\}$ (ख) $\{(x, y): y = x^2 - 1, 0 \leq x \leq 3, x \in W\}$

(ग) $\{(x, y): y = 3x^2 - 2x - 1, 1 \leq x \leq 4, x \in W\}$

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (क) $R^{-1} = \{(3, 1), (5, 1), (3, 2), (5, 2), (3, 3), (5, 3)\}$ (ख) $R^{-1} = \{(3, 1), (6, 1), (3, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3)\}$

(ग) $R^{-1} = \{(-1, 3), (-2, 4), (-3, 5), (-4, 6)\}$ (घ) $R^{-1} = \{(6, 8), (5, 7), (4, 6), (3, 5), (2, 4), (1, 3)\}$

3. (क) $R^{-1} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9)\}$ (ख) $R^{-1} = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9)\}$

(ग) $R^{-1} = \{(6, 4), (7, 5), (8, 6)\}$ (घ) $R^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1)\}$

4. (क) $R^{-1} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9)\}$, R^{-1} को क्षेत्र $= \{1, 2, 3\}$, R^{-1} को विस्तारक्षेत्र $= \{3, 6, 9\}$

(ख) R को क्षेत्र $= \{3, 6, 9\}$, R को विस्तारक्षेत्र $= \{1, 2, 3\}$ ग) $R^{-1} = \{(x, y), y = 3x\}$ $R = \{(x, y), y = \frac{x}{3}\}$

5. $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$,

(क) R को क्षेत्र $= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, R को विस्तारक्षेत्र $= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ख) $R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (3, 3), (6, 3), (9, 3), (4, 4), (8, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$

(ग) R^{-1} को क्षेत्र $= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, R^{-1} को विस्तारक्षेत्र $= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

6. $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

(क) R को क्षेत्र $= \{2, 3, 4, 5\}$, R को विस्तारक्षेत्र $= \{2, 3, 4, 5\}$

(ख) $R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

(ग) R^{-1} को क्षेत्र $= \{2, 3, 4, 5\}$, R^{-1} को विस्तारक्षेत्र $= \{2, 3, 4, 5\}$

7 (क) $R^{-1} = \{(3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$, R^{-1} को क्षेत्र $= \{3, 4, 5, 6\}$, R^{-1} को विस्तारक्षेत्र $= \{4, 5, 6, 7\}$

(ख) $R^{-1} = \{(-1, 0), (0, 1), (3, 2), (8, 3)\}$, R^{-1} को क्षेत्र $= \{-1, 0, 3, 8\}$, R^{-1} को विस्तारक्षेत्र $= \{0, 1, 2, 3\}$

(ग) $R^{-1} = \{(0, 1), (7, 2), (20, 3), (39, 4)\}$, R^{-1} को क्षेत्र $= \{0, 7, 20, 39\}$, R^{-1} को विस्तारक्षेत्र $= \{1, 2, 3, 4\}$

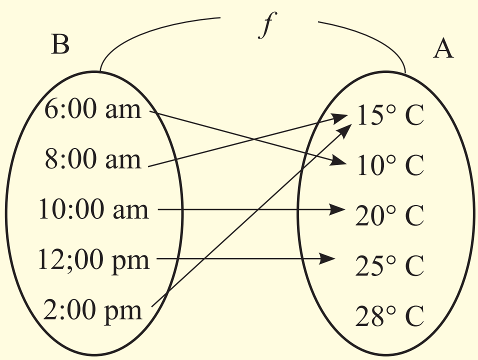
मिलानचित्रको प्रस्तुति शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

1.1.6 फलन (Function)

क्रियाकलाप 1

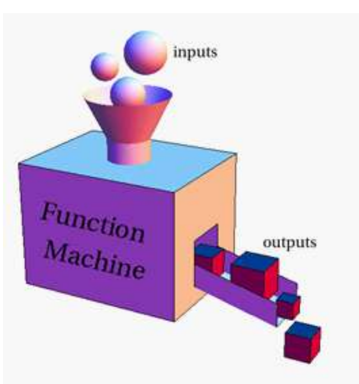
समस्या : तलका दुईओटा समूह सदस्यहरूका बिचको सम्बन्ध अध्ययन गर्नुहोस् । पहिलो समूहमा समय र दोस्रो समूहमा तापक्रम (°C) मा दिइएको छ । जसमा कुनै एउटा सहरको एक दिनको विभिन्न समयको तापक्रम दिइएको छ । यस्तो सम्बन्धलाई के भनिन्छ होला ? छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

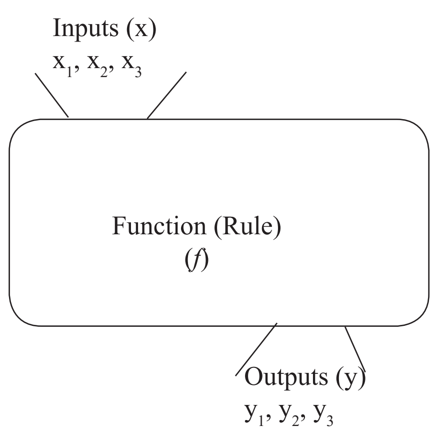
प्रक्रिया : प्रत्येक विद्यार्थीले एक समयमा एउटा मात्र तापक्रम छ या छैन अवलोकन गर्नुहोस् र शिक्षकको सहयोगमा निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।



माथिको समूहलाई अध्ययन गर्दा पहिलो समूहको प्रत्येक समयको दोस्रो समूहको एक मात्र तापक्रमसँग सम्बन्ध रहेको छ । अर्थात् एउटै समयमा दुईओटा तापक्रमसँग सम्बन्ध छैन । यसरी दुई चलहरू समय र तापक्रमबिचको यस्तो खालको विशेष सम्बन्धलाई फलन भनिन्छ ।

तलको चित्र अध्ययन गर्नुहोस् ।



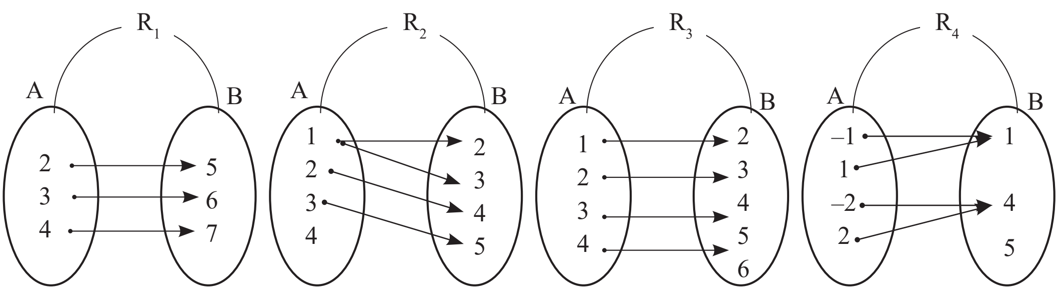


माथिको चित्रमा मेसिनले प्रत्येक input का लागि एउटा मात्र output दिएको छ । तसर्थ फलनमा प्रत्येक input का लागि एउटा मात्र output हुन्छ ।

दुई समूहमध्ये पहिलो समूहको प्रत्येक सदस्यहरूको दोस्रो समूहको एउटा मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध भएमा त्यस्तो विशेष सम्बन्धलाई नै फलन भनिन्छ । दुई समूहहरू $A \neq \phi$ र $B \neq \phi$ मा यदि समूह A बाट समूह B मा परिभाषित गरिएको सम्बन्धमा समूह A का प्रत्येक सदस्यहरूको एकल प्रतिविम्ब, समूह B मा छ भने उक्त सम्बन्धलाई फलन भनिन्छ । यसलाई $f: A \rightarrow B$ जनाइन्छ र सङ्केतमा, $y = f(x)$ लेखिन्छ जहाँ $x \in A$ र $y \in B$ हुन्छ र y लाई x को फलन हो भनी पढिन्छ ।

उदाहरण 1

तलको विभिन्न सम्बन्ध जनाउने मिलानचित्रहरू अध्ययन गर्नुहोस् र कुन कुन सम्बन्धहरू फलन हुन् वा होइनन् कारणसहित लेख्नुहोस् ।



माथिका सम्बन्धहरूमध्ये R_1, R_3 र R_4 मा समूह A का प्रत्येक सदस्यको समूह B का एउटा मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ । यी सम्बन्धहरू फलन (Function) हुन् । तर सम्बन्ध R_2 फलन हैन ।

उदाहरण 2

तलका कुन कुन कुन सम्बन्धहरू फलन हुन्, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(क) $R_1 = \{(2, 3), (3, 4), (5, 6)\}$

(ख) $R_2 = \{(2, 3), (2, 5), (5, 6)\}$

(ग)

Input (x)	0	1	2	0
Output (y)	–4	–2	0	4

समाधान

(क) R_1 फलन हो किनकि पहिलो समूहको प्रत्येक सदस्यको एउटासँग मात्र सम्बन्ध छ ।

(ख) R_2 मा पहिलो समूहको सदस्य 2 को 3 र 5 गरी दोस्रो समूहको दुईओटा सदस्यसँग सम्बन्ध भएकाले यो फलन होइन ।

(ग) यो सम्बन्ध फलन होइन किनकि 0 को –4 र 4 गरी दुईओटा सदस्यसँग सम्बन्ध छ ।

उदाहरण 3

$y = f(t)$ को अर्थ लेख्नुहोस् ।

समाधान

$y = f(t)$ को अर्थ, t को फलन y हो भन्ने बुझिन्छ । यहाँ t मा क्रिया गर्दा y को मान प्राप्त हुन्छ । y आश्रित चल हो भने t अनाश्रित चल हो ।

उदाहरण 4

वर्गको क्षेत्रफल A लाई यसको परिमिति P को फलनका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् साथै परिमिति 8 m भएको वर्गको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

वर्गको परिमिति $P = 4l$ अथवा, $l = \frac{P}{4}$

अब, वर्गको क्षेत्रफल, $A = l^2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$

तसर्थ, $A = f(P)$, जहाँ, $f(P) = \frac{P^2}{16}$ [किनकि क्षेत्रफलको मान परिमितिमा आश्रित छ ।]

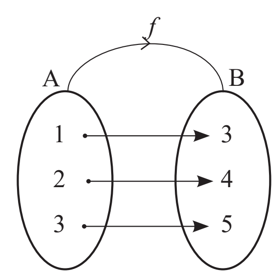
फेरि, परिमिति $(P) = 8m$ भए वर्गको क्षेत्रफल, $A = f(P) = \frac{P^2}{16} = \frac{8^2}{16} = 4\ m^2$.

(क) फलनको प्रस्तुतीकरण (Representation of Function)

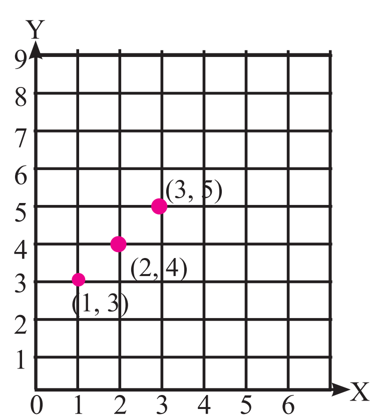
फलनलाई विभिन्न तरिकाले प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । जसलाई तल प्रस्तुत गरिएको छ ।

(क) फलनको चित्रात्मक प्रस्तुति (Visualization of a Function):

(अ) मिलानचित्र (Arrow Diagram): मानौँ समूह A = {1, 2, 3}, र समूह B = {3, 4, 5} छ र यदि $f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 5$ भए फलन f लाई निम्नानुसार मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :



(आ) लेखाचित्र (Graph): यस विधिअनुसार फलनको पहिलो समूहको र दोस्रो समूहको सम्बन्ध भएका सदस्यहरूबिच क्रमजोडाहरू बनाई उक्त क्रमजोडाहरूलाई नै लेखाचित्रमा अङ्कन गरिन्छ । जस्तै माथिको उदाहरणअनुसार निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (1, 3), (2, 4) र (3, 5) हुन्छ र यसलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ,



(ख) सङ्ख्यात्मक प्रस्तुति (Numerically Representation)

(अ) क्रमजोडाहरूको समूह (Set of Order Pairs): माथिको उदाहरणअनुसार फलन f लाई क्रमजोडाहरूको समूहका रूपमा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ

$f = \{(1, 3), (2, 4), (3,5)\}$

(आ) तालिका (Table): यस तरिकाअनुसार पहिलो समूहको सदस्यहरू र तिनीहरूसँग सम्बन्ध भएका दोस्रो समूहको सदस्यहरूलाई तालिकामा राखी प्रस्तुत गरिन्छ । जस्तै माथिको उदाहरणमा फलन f लाई तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

x	1	2	3
$y = f(x)$	3	4	5

(ग) शाब्दिक प्रस्तुति (Verbal Representation)

फलनलाई वाक्यद्वारा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ जसले input variable र output variable बिचको सम्बन्धलाई व्याख्या गर्छ । यसका लागि दुई समूहहरूबिचको सदस्यहरूको सम्बन्ध थाहा पाउन आवश्यक रहन्छ । जस्तै माथिको फलन $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ लाई शाब्दिक रूपमा व्याख्या गर्दा यदि प्रत्येक x का लागि $f(x)$ को मान 2 ले बढी छ ।

(घ) बीजगणितीय प्रस्तुति (Algebraically Representation):

फलनलाई जनाउने यो सबैभन्दा बढी प्रयोगमा आउने तरिका हो । यस विधिअनुसार, $y = f(x)$ भन्ने फलनका लागि x र $f(x)$ को सम्बन्धलाई बीजगणितीय सूत्रबाट प्रस्तुत गरिन्छ । जस्तै माथिको उदाहरणमा, $f(x)$ को मान x को मानभन्दा 2 ले बढी भएकाले, $f(x) = x + 2$ हुन्छ ।

उदाहरण 5

फलन $f = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$ लाई तालिका, बीजगणितीय सूत्र र लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको फलन, $f = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$

तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

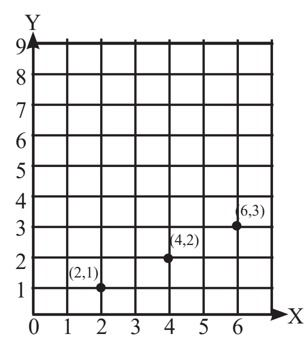
x	2	4	6
y	1	2	3

बीजगणितीय सूत्रमा प्रस्तुत गर्दा,

यहाँ, y लाई x को फलनको रूपमा मान्दा, y को मान x को आधा भएकाले,

$$y = f(x) = \frac{x}{2}$$

लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



ठाडो रेखा परीक्षण (Vertical Line Test)

सम्बन्धहरूलाई लेखाचित्रमा पनि प्रस्तुत गर्न सकिन्छ तर सम्बन्धहरूका सबै लेखाचित्रहरू फलन नहुन सक्छन । क्षेत्रका प्रत्येक फरक फरक सदस्यहरूको सहक्षेत्रको एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ भने त्यस्तो सम्बन्धलाई फलन भनिन्छ । अर्थात् फलनमा कुनै एउटा x को मानको दुई वा दुइभन्दा बढी y का मानहरूसँग सम्बन्ध हुँदैन । यही अवधारणालाई प्रयोग गरी हामी दिइएको लेखाचित्र फलनको लेखाचित्र हो वा होइन भनी छुट्याउन ठाडो रेखाको परीक्षण गर्छौं । ठाडो रेखाको परीक्षण गर्दा निम्नअनुसार निष्कर्ष निकालिन्छ :

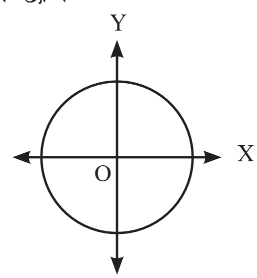
(अ) दिइएको लेखाचित्रमा सम्बन्धको क्षेत्र भित्र X – अक्षसँग लम्ब हुने गरी थुप्रै ठाडा रेखाहरू खिच्ने र यदि उक्त प्रत्येक ठाडो रेखाले दिइएको लेखाचित्रको एउटा मात्र विन्दुमा भेट गरेमा उक्त लेखाचित्र फलनको लेखाचित्र हो ।

(आ) दिइएको लेखाचित्रमा सम्बन्धको क्षेत्र भित्र X – अक्षसँग लम्ब हुने गरी थुप्रै ठाडो रेखाहरू खिच्ने र यदि उक्त प्रत्येक ठाडो रेखाहरूमध्ये कुनै एउटाले मात्र पनि दिइएको लेखाचित्रको दुई वा सोभन्दा बढी विन्दुमा भेट गरेमा उक्त लेखाचित्र फलनको लेखाचित्र होइन ।

यस खण्डमा हामीले लिएका सबै लेखाचित्रहरूको क्षेत्र भने वास्तविक सङ्ख्याहरूबिचको अन्तरालहरूलाई मानिएको छ । अन्तरालको अध्ययन पछिल्लो एकाइमा गर्ने छौं ।

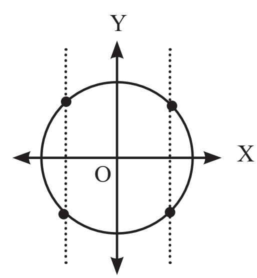
उदाहरण 5

दायाँ दिइएको लेखाचित्र फलनको लेखाचित्र हो वा होइन कारणसहित लेख्नुहोस् ।



समाधान

ठाडो रेखा परीक्षण गर्दा,



माथिको परीक्षणमा, X– अक्षसँग लम्ब हुने गरी खिचिएका सिधारेखाहरूले दिइएको लेखाचित्रको दुईओटा विन्दुहरूमा भेट गरेकाले दिइएको लेखाचित्र फलनको लेखाचित्र होइन ।

अभ्यास 1.1. (F)

1. व्यावहारिक जीवनमा हुने कुनै एक फलनको उदाहरणसहित फलनको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

2. (क) फलनको सङ्केत $y = f(t)$ को अर्थ लेख्नुहोस् ।

   (ख) फलनको सङ्केत $P = f(D)$ को अर्थ लेख्नुहोस् जहाँ D ले पानीको घनत्व र P ले चाप जनाउँछ ।

   (ग) फलनको सङ्केत $y = f(x)$ को अर्थ लेख्नुहोस् ।

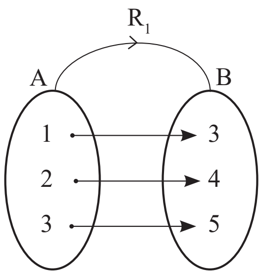
3. (क) वर्गको परिमिति (P) लाई क्षेत्रफल (A) को फलनका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ख) वृत्तको क्षेत्रफल (A) लाई परिधि (C) को फलनका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

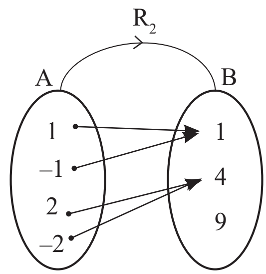
(ग) गोलाको आयतन (V) लाई यसको सतहको क्षेत्रफल (A) को फलनका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

3. तलका कुन कुन सम्बन्धहरू फलन हुन् या होइनन् कारणसहित लेख्नुहोस् ।

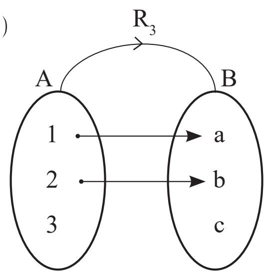
(क)



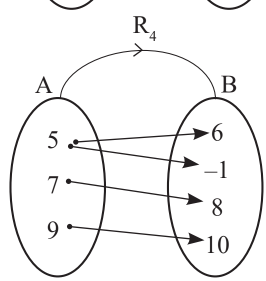
(ख)



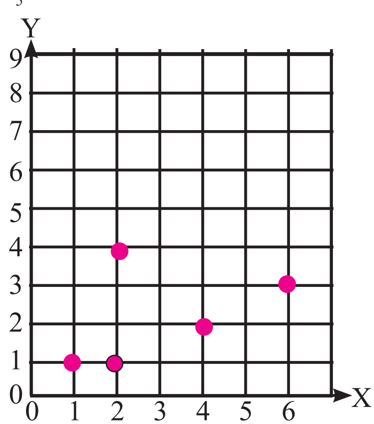
(ग)



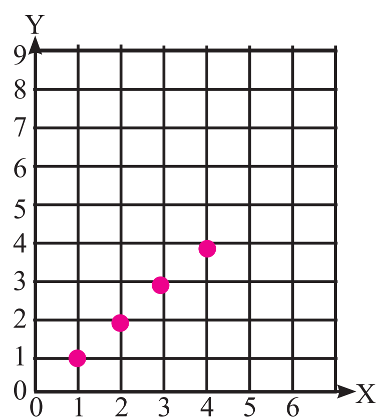
(घ)



(ङ) R_5



(च) R_6



(छ) $R_7 = \{(2, 4)\}, (3, 6), (4, 8)\}$

(ज) $R_8 = \{(3, 6), (2, 4)\}, (3, 9), (4, 16)\}$

(झ) R_9

x	3	4	5
y	2	3	4

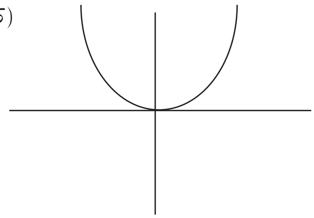
(ञ) R_{10}

x	2	1	2
y	7	6	3

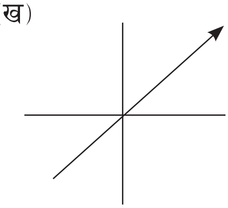
5. माथि प्रश्न न. 4 मा भएका फलनहरूलाई बीजगणितीय सूत्रद्वारा लेख्नुहोस् ।

6. तलका प्रत्येक लेखाचित्रहरू फलनका लेखाचित्र हुन वा होइनन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

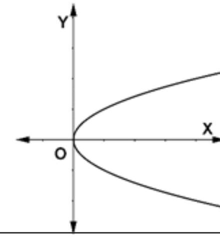
(क)



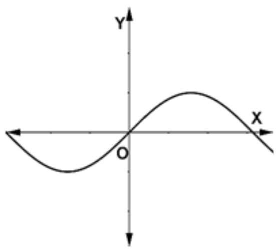
(ख)



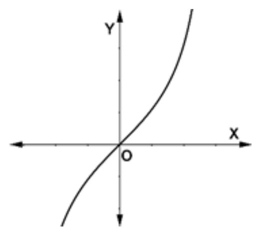
(ग)



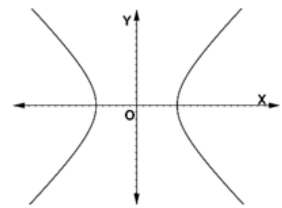
(घ)



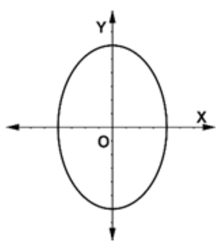
(ङ)



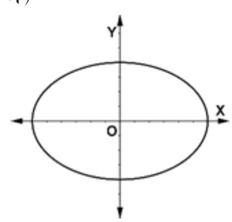
(च)



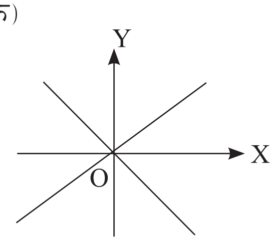
(छ)



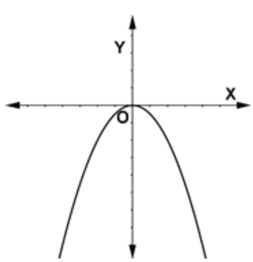
(ज)



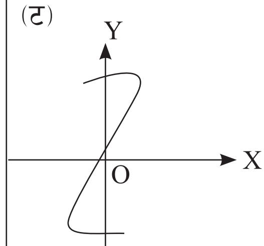
(झ)



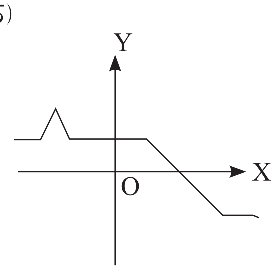
(ञ)



(ट)



(ठ)



7. तल दिइएका फलनलाई तालिका, सूत्र र लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) $f1 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ (ख) $f2 = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9)\}$

(ग) $f3 = \{(3, 1), (5, 3), (7, 5)\}$ (घ) $f4 = \{(0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$

सिर्जनात्मक क्रियाकलाप

एउटा स्याउको मूल्य रु. 10 पर्छ । यदि व्यापारीले x ओटा स्याउ बेच्यो भने कति रुपियाँ कमाउँछ ?

1. यो समस्यालाई कमाइलाई I मानेर फलनका रूपमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
2. सो फलनमा x का मानहरू राखी एउटा लेखाचित्र तयार गर्नुहोस् ।
3. यदि सो व्यापारीले रु. 8000 भन्दा बढी कमाइ गर्नु छ भने के के गर्नुपर्ला ? कारणसहित जवाफ दिनुहोस् । सकेसम्म धेरै सम्भावनाहरू समेटेर जवाफ दिनुहोस् ।

उत्तर

1 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2 (क) $y = f(t)$ भन्नाले y लाई t को फलन भनिन्छ । (ख) $P = f(D)$ भन्नाले P लाई D को फलन भनिन्छ ।

(ग) $y = f(x)$ भन्नाले y लाई x को फलन भनिन्छ ।

3 (क) $P = 4\sqrt{A}$ (ख) $A = \frac{C^2}{4\pi}$ (ग) $V = \sqrt{\frac{A^3}{36\pi}}$

4 (क) R_1 फलन हो किनकि पहिलो समूहका सबै सदस्यहरूको दोस्रो समूहको एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ ।

(ख) R_2 फलन हो किनकि पहिलो समूहका सबै सदस्यहरूको दोस्रो समूहको एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ ।

(ग) R_3 फलन होइन किनकि पहिलो समूहका सदस्य 3 को दोस्रो समूहको सदस्यसँग सम्बन्ध छैन ।

(घ) R_4 फलन होइन किनकि पहिलो समूहका सदस्य 5 को दोस्रो समूहका दुईओटा सदस्यसँग सम्बन्ध छ ।

(ङ) R_5 फलन होइन किनकि $x = 2$ को दोस्रो समूहका दुईओटा सदस्य 1 र 4 सँग सम्बन्ध छ ।

(च) R_6 फलन हो किनकि पहिलो समूहका सबै सदस्यहरूको दोस्रो समूहका एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ ।

(छ) R_7 फलन हो किनकि पहिलो समूहका सबै सदस्यहरूको दोस्रो समूहका एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ ।

(ज) R_8 फलन होइन किनकि पहिलो समूहका सबै सदस्यहरूको दोस्रो समूहका एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छैन ।

(झ) f_9 फलन हो किनकि पहिलो समूहका सबै सदस्यहरूको दोस्रो समूहका एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ ।

(ञ) R_{10} फलन होइन किनकि पहिलो समूहका सबै सदस्यहरूको दोस्रो समूहका एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छैन ।

5. $y = f_1(x) = x + 2$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_6(x) = x$, $y = f_7(x) = 2x$, $y = f_9(x) = x - 1$

6. (क) फलन हो (ख) फलन हो (ग) फलन होइन (घ) फलन हो (ङ) फलन हो

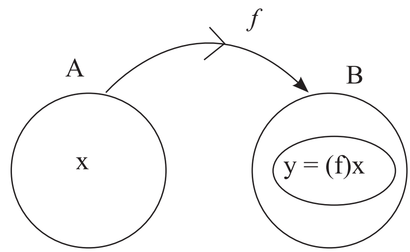
(च) फलन होइन (छ) फलन होइन (ज) फलन होइन (झ) फलन होइन (ञ) फलन हो

(ट) फलन होइन (ठ) फलन हो

7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

1.1.7 फलनको क्षेत्र, सहक्षेत्र र विस्तारक्षेत्र (Domain, Co-domain and Range of Function), फलनको प्रतिविम्ब तथा पूर्व प्रतिविम्ब (Image and Pre-image of Function)

फलन $f : A \rightarrow B$ मा समूह A लाई क्षेत्र (Domain), समूह B लाई सहक्षेत्र (Co-domain) भनिन्छ । त्यसैगरी समूह A का सदस्यहरूसँग सम्बन्ध भएका समूह B का सदस्यहरूको समूहलाई विस्तारक्षेत्र (Range) भनिन्छ । समूह B का सदस्यहरूको समूह A सँग Associate भएका हुन्छन् । यिनीहरूलाई f को प्रतिविम्ब भनिन्छ र सम्बन्धित A को सदस्यलाई पूर्व प्रतिविम्ब भनिन्छ ।



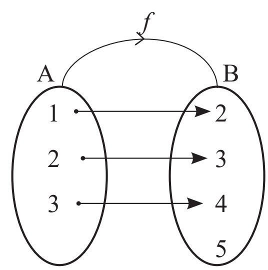
जस्तै: यदि समूह A = {1, 2, 3}, समूह B = {2, 3, 4, 5} र

f = {(1, 2), (2, 3), (3, 4)} भए

फलन f को क्षेत्र (Domain) = {1, 2, 3}

फलन f को सहक्षेत्र (Co-domain) = {2, 3, 4, 5}

फलन f को विस्तारक्षेत्र (Range) = {2, 3, 4}



विस्तारक्षेत्र जहिले पनि सहक्षेत्रको उपसमूह हुन्छ । जसलाई दायाँको चित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । 1 को प्रतिविम्ब 2 वा 2 को पूर्व प्रतिविम्ब 1 हो यसलाई $f(1) = 2$ लेखिन्छ । यसरी नै $f(2) = 3, f(3) = 4$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि फलन f = {(1, 2), (–2, –4), (3, 6), (–4, –8)} .भए f को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको फलन, f = {(1, 2), (–2, –4), (3, 6), (–4, –8)}

फलन f को क्षेत्र (Domain) = क्रमजोडाहरूको पहिलो सदस्यहरूको समूह = {1, –2, 3, –4}

फलन f को विस्तारक्षेत्र (Range) = क्रमजोडाहरूको दोस्रो सदस्यहरूको समूह ={2, –4, 6, –8}

उदाहरण 2

यदि फलन $f(x) = 7x - 8$ को विस्तारक्षेत्र 13 भए त्यसको क्षेत्र कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको फलन, $f(x) = 7x - 8$, विस्तारक्षेत्र =13, त्यसैले $f(x) = 13$

यहाँ, $f(x) = 13$

अथवा, $7x - 8 = 13$

अथवा, $7x = 21, x = 3$, क्षेत्र (Domain) = {3}

उदाहरण 3

$f: A \rightarrow B$ का लागि $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ र $f(x) = 2x + 1$, भए f को विस्तार पत्ता लगाई मिलानचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x + 1$

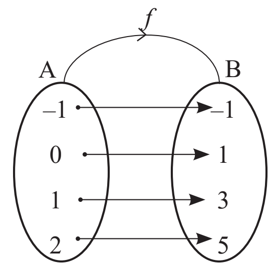
$f(-1) = 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

$f(0) = 2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

त्यसैले f को विस्तार $\{-1, 1, 3, 5\}$ हुन्छ ।



उदाहरण 4

यदि फलन $f(x) = 2x + 3$ भए कुन सदस्यको प्रतिविम्ब 7 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मानौँ x को प्रतिविम्ब 7 हो, त्यसैले, $f(x) = 7, x = ?$

$f(x) = 7$

अथवा, $2x + 3 = 7$

अथवा, $2x = 4, x = 2$

तसर्थ 2 को प्रतिविम्ब 7 हुन्छ ।

उदाहरण 5

सँगैको तालिकामा कलमको सङ्ख्या र मूल्य दिइएको छ । तलको प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस्

कलमको सङ्ख्या	मूल्य
1	10
2	20
3	30
4	40

(क) कलमको सङ्ख्यालाई x र मूल्यलाई y मान्दा, यी दुई चलहरूबिचको सम्बन्धलाई फलनका रूपमा सूत्रद्वारा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ख) उक्त फलनको क्षेत्र लेख्नुहोस् । (ग) उक्त फलनको विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

समाधान

(क) कलमको सङ्ख्यालाई x र मूल्यलाई y मान्दा,

$x = 1, y = 10 = 10 \times 1$

$x = 2, y = 20 = 10 \times 2$

$x = 3, y = 30 = 10 \times 3$

$x = 4, y = 40 = 10 \times 4$

त्यसैले, $y = 10 \times x$

दुई चलहरूबिचको सम्बन्धलाई फलन f मान्दा $f(x) = 10x$ हुन्छ ।

(ख) फलन f को क्षेत्र (Domain) $= \{1, 2, 3, 4\}$ (ग) फलन f को विस्तारक्षेत्र (Range) $= \{10, 20, 30, 40\}$

अभ्यास 1.1 (G)

1. (क) फलनको क्षेत्र, सहक्षेत्र, विस्तारक्षेत्रलाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।

   (ख) फलनको प्रतिविम्ब तथा पूर्व प्रतिविम्बलाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।

2. तलको तालिकाले फलन f लाई जनाउँछ ।

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

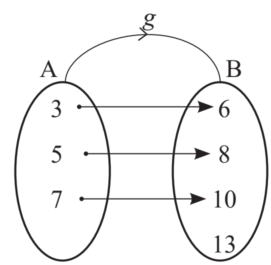
   (क) फलन f लाई क्रमजोडाहरूको समूहका रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (ख) फलन f को क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

   (ग) 9 को पूर्व प्रतिविम्ब कति हो ? लेख्नुहोस् ।

   (घ) फलन f लाई सूत्रद्वारा लेख्नुहोस् ।

3. दिइएको मिलानचित्रबाट तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



   (क) के g ले फलन जनाउँछ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

   (ख) 8 को पूर्व प्रतिविम्ब कति हुन्छ ?

   (ग) g को क्षेत्र, सहक्षेत्र र विस्तारक्षेत्र लेख्नुहोस् ।

   (घ) $g(5) + g(7)$ को मान कति हुन्छ ?

   (ङ) फलन g लाई सूत्रद्वारा लेख्नुहोस् ।

4. तलको प्रत्येक अबस्थामा फलनको विस्तारक्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) $f = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

   (ख) $g = \{(x, y): y = x - 3, 2 < x < 5, x \in N\}$

   (ग) $h(x) = x^2 - 2x$, क्षेत्र $= \{0, 1, 2\}$

5. तलका प्रत्येक अबस्थामा फलनको क्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) $f(x) = 3x + 5$, विस्तारक्षेत्र $= \{2, 8\}$

   (ख) $g(x) = 4x - 5$, विस्तारक्षेत्र $= \{-1, 7\}$

   (ग) $h(x) = x^2$, विस्तारक्षेत्र $= \{9, 16\}$

   (घ) $g(x) = 2x + 5$ को प्रतिविम्बहरूको समूह $= \{7, 11, 15\}$ भए पूर्व प्रतिविम्बहरूको समूह पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ङ) यदि फलन $f(x) = 4x - 3$ को प्रतिविम्बहरूको समूह $\{1, 5, 9\}$ भए पूर्व प्रतिविम्बहरूको समूह पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

   (क) फलन $f(x) = \frac{(2x - 3)}{5}$ को क्षेत्रमा हुने कुन सदस्यको प्रतिविम्ब 7 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) फलन $f(x) = 3x + 5$ को क्षेत्रमा हुने कुन सदस्यको प्रतिविम्ब 8 हुन्छ ?

(ग) फलन $f(x) = \frac{2}{x-4}$ को क्षेत्रमा हुने कुन सदस्यको प्रतिबिम्ब $\frac{1}{2}$ हुन्छ ?

(घ) फलन $f(x) = 2x - 5$ को फलन क्षेत्रमा हुने कुन सदस्यको प्रतिबिम्ब 9 हुन्छ ?

7. यदि फलन $f: A \rightarrow W$ जहाँ $A = \{0 \leq x \leq 4, x \in W\}$ मा $f(x) = 2x - 3$ द्वारा परिभाषित गरिएको छ ।

(क) फलनको क्षेत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) फलनको विस्तारक्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) फलनलाई मिलान चित्र मा प्रस्तुत गरी कस्तो प्रकारको फलन हो लेख्नुहोस् ।

उत्तर

1 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (क) $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$

(ख) $D = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{1, 4, 9, 16\}$ (ग) 3 (घ) $f(x) = x^2$

3. (क) g ले फलन जनाउँछ किनकि क्षेत्रका प्रत्येक सदस्यहरूको एउटा मात्र प्रतिबिम्ब छन् ।

(ख) 5 (ग) क्षेत्र $= \{3, 5, 7\}$, सहक्षेत्र $= \{6, 8, 10, 13\}$, बिस्तार क्षेत्र $= \{6, 8, 10\}$

(घ) 18 (ङ) $g(x) = x + 3$

4. (क) $\{4, 6, 8\}$ (ख) $\{0, 1\}$ (ग) $\{0, -1\}$

5. (क) $\{-1, 1\}$ (ख) $\{1, 3\}$ (ग) $\{\pm 3, \pm 4\}$ (घ) $\{1, 3, 5\}$ (ङ) $\{1, 2, 3\}$

6. (क) 19 (ख) 1 (ग) 8 (घ) 7

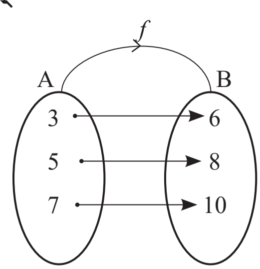
7. (क) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, (ख) $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$

फलनका प्रकार (Types of Function)

तल दिइएका फलनका उदाहरणहरू अध्ययन गरी कक्षामा छलफल गर्नुहोस् :

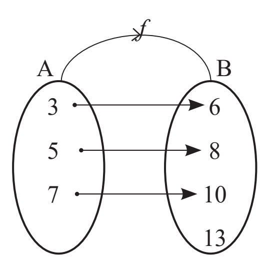
सम्पूर्ण फलन (Onto Function)

यदि फलन $f: A \rightarrow B$ मा विस्तारक्षेत्र र सहक्षेत्र उही वा बराबर भए त्यस्तो फलनलाई सम्पूर्ण फलन भनिन्छ । अर्थात् सहक्षेत्रका सबै सदस्यहरूको पूर्व प्रतिविम्ब भएको फलनलाई सम्पूर्ण फलन भनिन्छ । जस्तै :

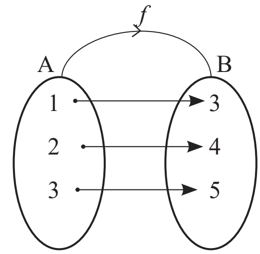


अपूर्ण फलन (Into F unction)

यदि फलन $f: A \rightarrow B$ मा सहक्षेत्रका सबै सदस्यहरूको पूर्वप्रतिविम्ब नभएको फलनलाई अपूर्ण फलन भनिन्छ । यसप्रकारको फलनमा विस्तारक्षेत्र सहक्षेत्रको उपयुक्त उपसमूह हुन्छ । जस्तै :

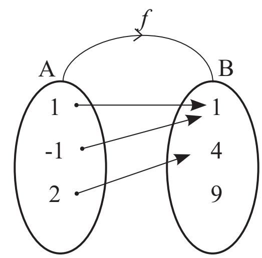


एक एक फलन (One to One Function)



यदि फलन $f: A \rightarrow B$ मा क्षेत्रका फरक फरक सदस्यहरूको सहक्षेत्रका पनि फरक फरक सदस्यहरूसँग सम्बन्ध भएमा त्यस्तो फलनलाई एक एक फलन भनिन्छ । अर्थात्, विस्तारक्षेत्रका प्रत्येक सदस्यको एकमात्र पूर्व प्रतिविम्ब भएको फलनलाई एक एक फलन भनिन्छ ।

बहुएक फलन (Many to One Function)

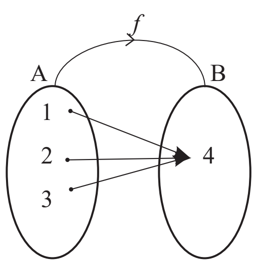


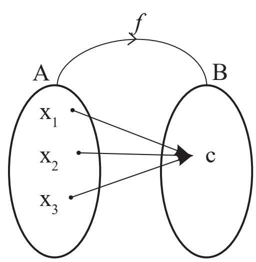
यदि फलन $f: A \rightarrow B$ मा क्षेत्रका एकभन्दा बढी सदस्यहरूको सहक्षेत्रका एक सदस्यहरूसँग सम्बन्ध भएमा त्यस्तो फलनलाई बहुएक फलन भनिन्छ। अर्थात्, विस्तारक्षेत्रका कम्तीमा एउटा सदस्यको एकभन्दा बढी पूर्व प्रतिविम्ब भएको फलनलाई बहुएक फलन भनिन्छ ।

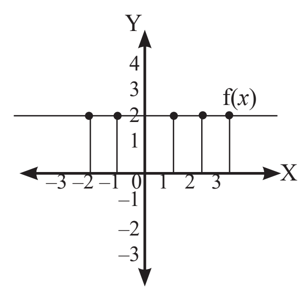
केही विशेष प्रकारका फलनहरू

अचल फलन (Constant Function)

फलन $f: A{\rightarrow}B$ मा क्षेत्रका प्रत्येक सदस्यको प्रतिविम्ब एउटा मात्र भएमा त्यस्तो फलनलाई अचल फलन भनिन्छ । $f(x) = c$ स्वरूपको फलनलाई अचल फलन भनिन्छ जसमा c एउटा अचल हो ।

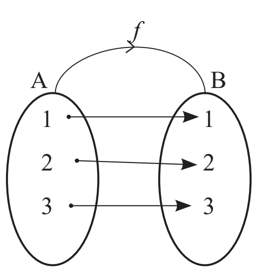


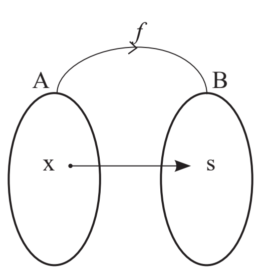


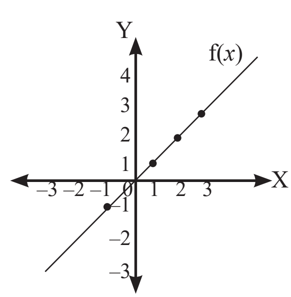


एकात्मक फलन (Identity Function)

फलन $f: A{\rightarrow}A$ मा क्षेत्रका प्रत्येक सदस्यको प्रतिविम्ब आफैं अर्थात् प्रतिविम्ब र पूर्व प्रतिविम्ब एकै भएमा त्यस्तो फलनलाई एकात्मक फलन भनिन्छ । यसको स्वरूपको $f(x) = x$ हुन्छ ।

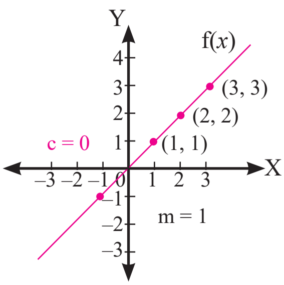


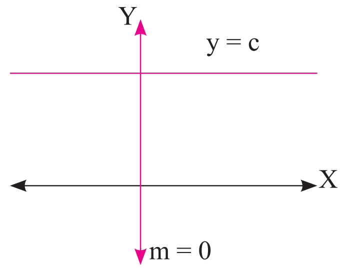


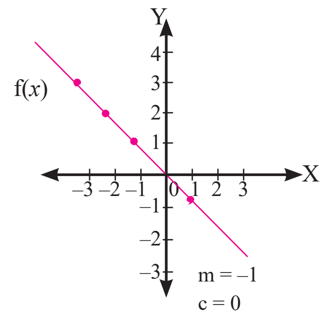


रेखीय फलन (Linear Function)

$f(x) = mx + c$ स्वरूपको फलनलाई रेखीय फलन भनिन्छ । रेखीय फलनको लेखाचित्र जहिले पनि सिधा रेखा हुन्छ । m ले सिधा रेखाको झुकाव र c ले Y – खण्डलाई जनाउँछ । m को विभिन्न मानअनुसार को रेखीय फलनको लेखाचित्र तल प्रस्तुत गरिएको छ ।

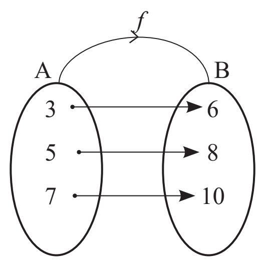






उदाहरण 1

सँगैको मिलानचित्रमा फलन f लाई देखाइएको छ । यो कुन प्रकारको फलन हो ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।



समाधान

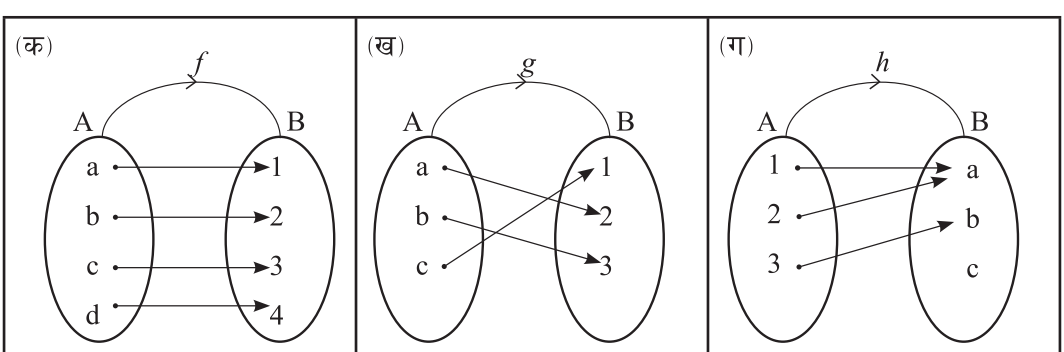
दिइएको फलन f एक एक सम्पूर्ण फलन हो किनकि क्षेत्रका प्रत्येक सदस्यहरूको फरक फरक प्रतिविम्ब रहेको छ र सहक्षेत्र र विस्तारक्षेत्र पनि बराबर छ ।

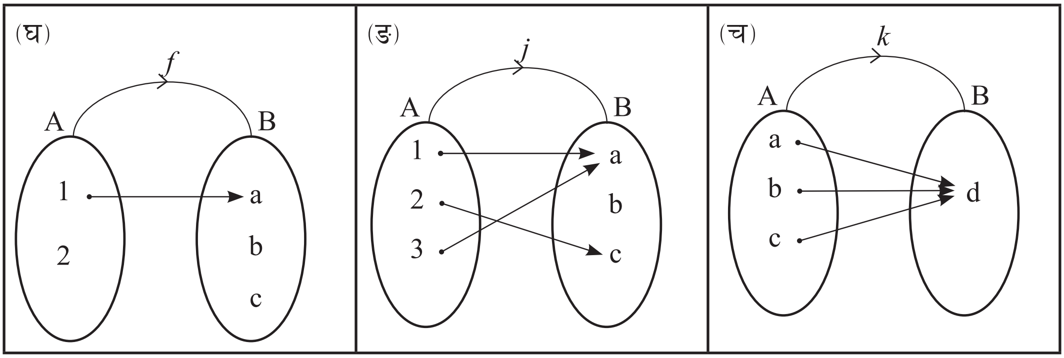
अभ्यास 1.1 (H)

1. तलका प्रत्येक फलनहरूको उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् :

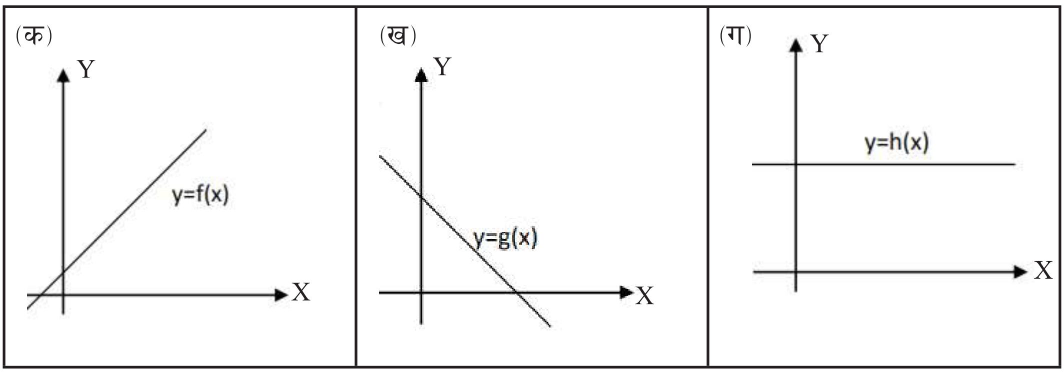
   (क) सम्पूर्ण फलन (ख) अपूर्ण फलन (ग) रेखीय फलन (घ) अचल फलन

2. तल दिइएका प्रत्येक फलनहरूको कारणसहित प्रकार लेख्नुहोस् :





3. तलका लेखाचित्रहरूले जनाउने फलनको प्रकार लेख्नुहोस् :



4. यदि A = {1, 3}, B = {4, 6, 8} छ । A बाट B मा तलका फलनहरू निर्माण गर्नुहोस् ।

   (क) एक एक फलन (ख) एक एक अपूर्ण फलन (ग) बहुएक अपूर्ण फलन

5. यदि P = {3, 4, 5}, Q = {4, 5, 6} छ । P बाट Q मा तलका फलनहरू निर्माण गर्नुहोस् ।

   (क) एक एक सम्पूर्ण फलन (ख) अचल फलन

   (ग) बहुएक अपूर्ण फलन (घ) एकात्मक फलन

6. तलका प्रत्येक फलनहरूलाई मिलान चित्रमा प्रस्तुत गरी तिनका प्रकार लेख्नुहोस् ।

   (क) f = {(1, 2), (2, 4), (3, 6)} (ख) g = {(1, 1), (– 1, 1), (2, 4), (3, 9)}

   (ग) h = {(1, 0), (2, 0), (3, 0)}

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. क) क्षेत्रका फरक फरक सदस्यहरूको सहक्षेत्रका पनि फरक फरक सदस्यहरूसँग सम्बन्ध रहेको र सहक्षेत्र र विस्तारक्षेत्र पनि बराबर भएकाले फलन *f* एक एक सम्पूर्ण फलन हो ।

   (ख) देखि (च) सम्मको उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

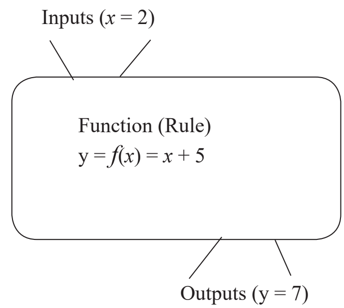
3. (क) रेखीय, (ख) रेखीय, (ग) अचल प्रश्न 4 र 5 को उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. (क) एक एक सम्पूर्ण (ख) बहुएक सम्पूर्ण (ग) अचल फलन

1.1.8 फलनसँग सम्बन्धित समस्याहरू (Problems Related To Function)

फलनको मान (Values of Function)

यदि फलन $f(x)$ ले प्रत्येक x को मानका लागि एउटा मात्र y दिन्छ भने $y = f(x)$ लाई उक्त फलनको मान भनिन्छ । चित्रमा $f(x) = x + 5$ मा $x = 2$ को लागि फलनको मान $f(2) = 2 + 5 = 7$ हुन्छ । $f(x)$ लाई x को प्रतिविम्ब (Image) भनिन्छ भने x लाई y वा $f(x)$ को पूर्व प्रतिविम्ब (Pre-Image) भनिन्छ ।



उदाहरण 1

यदि फलन $f(x) = 2x - 4$ भए $f(1), f(-1), f(2), f(-2)$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x - 4$

$f(1) = 2 \times 1 - 4 = -2$

$f(-1) = 2 \times (-1) - 4 = -6$

$f(2) = 2 \times (2) - 4 = 0$

$f(-2) = 2 \times (-2) - 4 = -8$

$\therefore f(1) = -2, f(-1) = -6, f(2) = 0, f(-2) = -8$

उदाहरण 2

यदि $f(x + 3) = 2x + 1$ भए $f(x)$ र $f(-3)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x + 3) = 2x + 1, f(x + 3) = 2(x + 3) - 5$

अथवा, $x + 3$ को सट्टा x राख्दा,

अथवा, $f(x) = 2x - 5$

फेरि, $f(-3) = 2 \times (-3) - 5 = -6 - 5 = -11$

वैकल्पिक तरिका

मानौँ, $x + 3 = a$,

अथवा, $x = a - 3$

$f(x + 3) = 2x + 1$

अथवा, $f(a) = 2(a - 3) + 1$

अथवा, $f(a) = 2a - 5$

अथवा, $f(x) = 2x - 5$ (x को सट्टा a राख्दा)

उदाहरण 3

यदि $f(x) = 2x$ भए $f(a + b) = f(a) + f(b)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x$, $f(a) = 2a$, $f(b) = 2b, f(a + b) = 2(a + b)$

अब, L.H.S. $= f(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = f(a) + f(b) =$ R. H. S.

उदाहरण 4

यदि एउटा फलन $f: R \rightarrow R$ लाई $f(3x) = f(3) + f(x)$ द्वारा परिभाषित गरिएको छ भने $f(1)$, $f(3)$ र $f(9)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(3x) = f(3) + f(x)$

$x = 1$ राख्दा, $f(3 \times 1) = f(3) + f(1)$

अथवा, $f(3) = f(3) + f(1)$

अथवा, $f(1) = f(3) - f(3) = 0$

$\therefore f(1) = 0$

$x = 0$ राख्दा, $f(3 \times 0) = f(3) + f(0)$

अथवा, $f(0) = f(3) + f(0)$

अथवा, ,$f(3) = f(0) - f(0) = 0$

$\therefore f(3) = 0$

$x = 3$ राख्दा, $f(3 \times 3) = f(3) + f(3)$

अथवा, $f(9) = 0 + 0 = 0$

$\therefore f(9) = 0$

उदाहरण 5

यदि फलन $f(x) = \text{p}\,x + \text{q}$ र $f(1) = 4$ र यदि $f(3) = 6$ भए

(क) p र q को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) फलन $f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $f(-3) + f(0)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(क) यहाँ, $f(x) = \text{p}x + \text{q}$ र $f(1) = 4$ र यदि $f(3) = 6$

तर, $f(1) = \text{p} + \text{q}$ र $f(3) = 3\text{p} + \text{q}$

प्रश्नबाट, $\text{p} + \text{q} = 4 \ldots \text{(i)}$

$3\text{p} + \text{q} = 6 \ldots \text{(ii)}$

समीकरण (i) र (ii) लाई हल गर्दा, $\text{p} = 1$ र $\text{q} = 3$

(ख) फलन $f(x) = \text{p}x + \text{q} = x + 3$

(ग) यहाँ, $f(x) = x + 3, f(0) = 0 + 3 = 3, f(-3) = -3 + 3 = 0$

अब, $f(-3) + f(0) = 0 + 3 = 3.$

अभ्यास 1.1 (H)

1 . (क) यदि $f(x) = 4x + 5$, भए $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $f(x) = 2x^2 - 1$, भए $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\text{h}(x) = 3x^2 + 2x - 1$, भए $\text{h}(0)$, $\text{h}(2)$, $\text{h}(4)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि $\text{g}(x) = x^3 - 2$, भए $\text{g}(1)$, $\text{g}(-1)$, $\text{g}(2)$, $\text{g}(-2)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) यदि $f(x) = \dfrac{(x^2+3x-2)}{(x-2)}$ $x-2 \neq 0$ भए $f(4) - f(1) + f(0)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. (क) यदि $f(2x+3) = 2x-1$, भए $f(x)$, र $f(-2)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $f(3x-4) = 6x-5$, भए $f(x)$, र $f(2)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $f(3x-5) = 6x-13$, भए $f(5x)$, र $f(-3)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि $f(3x+2) = 12x-5$, भए $f(x)$, र $f(6)$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (क) यदि $f(\mathrm{y}) = \mathrm{a}^{\mathrm{y}}$, भए $f(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = f(\mathrm{a}) \div f(\mathrm{b})$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ख) यदि $f(x) = 5^x$, भए $f(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = f(\mathrm{a}) \times f(\mathrm{b})$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ग) यदि $f(\mathrm{m}) = 7^{\mathrm{m}}$, भए $f(x \cdot \mathrm{y}) = (f(\mathrm{y}))^x$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

4. (क) यदि एउटा फलन $f: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ लाई $f(5x) = f(5) + f(x)$ द्वारा परिभाषित गरिएको छ भने $f(1)$, $f(5)$ र $f(25)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि एउटा फलन $f(x+3) = f(3) + f(x)$ भए $f(0) = 0$, $f(-3) = -f(3)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ग) यदि एउटा फलन $f(x+7) = f(10) + f(x)$ भए $f(3) = 0$, $f(-4) = -f(10)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(घ) यदि एउटा फलन $f(x+\mathrm{a}) = f(x) + f(\mathrm{a}), \mathrm{a} \in \mathrm{R}$ भए $f(0) = 0$, $f(-\mathrm{a}) = -f(\mathrm{a})$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

5. (क) यदि एउटा फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ र $\mathrm{g}(x) = 1 - 3x$ बराबर हुने क्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि एउटा फलन $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ र $\mathrm{g}(x) = 2x^2 - 3x - 17$ छ x को मानहरू कति कति हुँदा $f(x) = \mathrm{g}(x)$ हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि एउटा फलन $\mathrm{h}(\mathrm{t}) = 5\mathrm{t}^2 - 3\mathrm{t} + 4$ र $\mathrm{g}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}^2 + 4\mathrm{t} + 1$ छ र $\mathrm{h}(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\mathrm{t})$ भए x को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) यदि फलन $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ र $f(2) = 2$, $f(-3) = -13$ भए

(अ) a र b का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् । (आ) फलन $f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि फलन $f(x) = \mathrm{m}x + \mathrm{c}$ र $f(3) = 9$, $f(5) = 13$ भए m र c का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

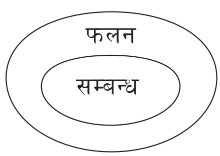
1.	(क) 13, 17, 25	(ख) 1, –1, 7	(ग) –1, 15, 55	(घ) –1, –3, 6, –10	(ङ) 16
2.	(क) $x-4, -6$	(ख) $2x+3, 7$	(ग) $10x-3, -9$	(घ) $4x+3, 27$	
4.	(क) 0, 0, 0	5. (क) $\{-2, \frac{1}{2}\}$	(ख) –3, –4	(ग) 1, $\frac{3}{4}$	
6.	(क) (अ) 3, –4	(आ) $3x-4$,	(इ) –3 ख) 2, 3		

1.1.9 सम्बन्ध र फलनबिच भिन्नता (Difference Between Relation and Function)

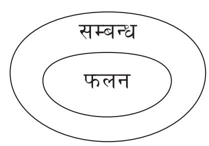
तलको तालिका अध्ययन गर्नुहोस् ।

सम्बन्ध	फलन
दुई समूहबिचको कार्टेसियन गुणनफलको उपसमूहलाई सम्बन्ध भनिन्छ ।	फलन विशेष प्रकारको सम्बन्ध हो जसमा क्षेत्रको प्रत्येक सदस्यको सहक्षेत्रको एक मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध रहेको हुन्छ ।
दुई समूहहरू A र B बिचको सम्बन्धलाई $R : A \rightarrow B$ ले जनाइन्छ । यहाँ सम्बन्धको क्षेत्र, A को उपसमूह पनि हुन सक्छ ।	यदि A र B लाई क्रमश: क्षेत्र र सहक्षेत्र मान्दा A र B बिचको फलनलाई $f : A \rightarrow B$ ले जनाइन्छ । यहाँ, फलनको क्षेत्र समूह A नै हुन्छ ।
उदाहरण : $R = \{(1,1). (1, -1), (4, 2), (4, -2)\}$	उदाहरण : $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

विचारणीय प्रश्न : सम्बन्ध र फलनको सम्बन्ध जनाउन तलको कुन चित्र सही छ ? निष्कर्ष पनि लेख्नुहोस् ।



(a)



(b)

उदाहरण 1

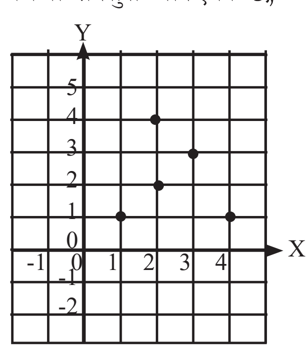
तलका सम्बन्धहरू फलन हुन् या होइनन् कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(क) $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

(ख) R

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

(ग) सम्बन्ध R लाई तलको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ,



समाधान

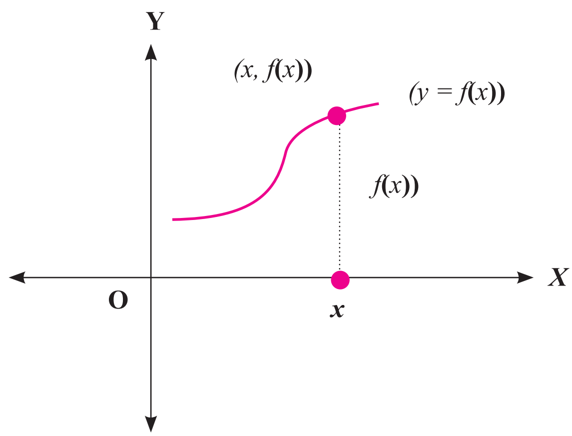
(क) क्षेत्रको एउटा सदस्य 2 को 3 र 4 सँग सम्बन्ध भएकाले दिइएको सम्बन्ध फलन होइन ।

(ख) क्षेत्रको प्रत्येक सदस्यको विस्तारक्षेत्रको एउटा मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध भएकाले दिइएको सम्बन्ध फलन हो ।

(ग) लेखाचित्रबाट 2 को सम्बन्ध 2 र 4 सँग भएकाले दिइएको सम्बन्ध फलन होइन ।

1.1.10 फलन $y = x^n$ (n = 1, 2, 3) को लेखाचित्र (Graph of the Function $y = x^n$, n = 1, 2, 3)

कुनै पनि फलन $y = f(x)$ को लेखाचित्र भनेको उक्त फलनको चित्रात्मक प्रस्तुति हो जसले फलनको व्यवहारलाई दृश्यात्मक रूपमा प्रस्तुत गर्छ, जसबाट धेरै कुराको व्याख्या, विश्लेषण तथा अनुमान गर्न सकिन्छ ।



फलन $y = f(x)$ को लेखाचित्र भन्नाले उक्त फलनलाई मान्य हुने सबै $(x, f(x))$ वा (x, y) हरूको समूह हो । यस खण्डमा हामी फलनहरू $y = x$, $y = x^2$ र $y = x^3$ को लेखाचित्र खिच्न सिक्ने छौँ ।

यस खण्डमा हामीले लिएका सबै फलनहरूको क्षेत्र र विस्तारक्षेत्र, वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह (set of real numbers) लाई मानिएको छ ।

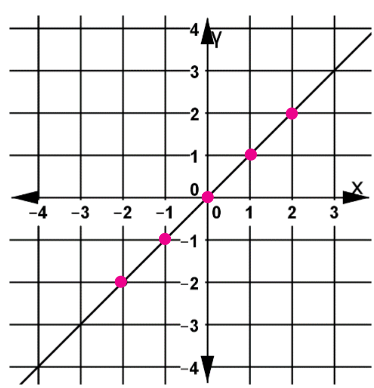
क्रियाकलाप 1

(क) $y = f(x) = x$ को लेखाचित्र (Graph of $y = x$)

समाधान

x	–2	–1	0	1	2
y	–2	–1	0	1	2

क्रमजोडाहरू (–2, –2), (–1, –1), (0, 0), (1, 1), (2, 2) हरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी जोड्दा दायाँको लेखाचित्र बन्छ ।

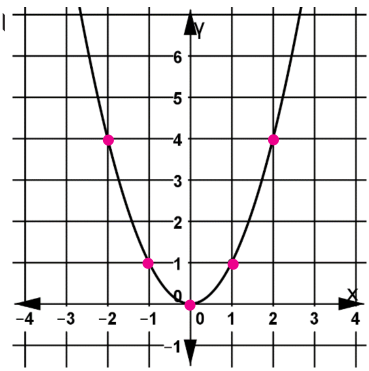


(ख) फलन $y = f(x) = x^2$ लाई लेखाचित्रमा भर्नुहोस् ।

दिइएको तालिका भरी x र y मानहरूको क्रमजोडा (x, y) बनाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुहोस् ।

x	0	1	–1	2	–2	3	–3
y	...	...	...	...	...	...	...

फलन $f(x) = y = x^2$ लाई लेखाचित्रमा देखाउने केही विन्दुहरू पत्ता लगाऔँ ।



दिइएको फलन $y = x^2$

x स्वतन्त्र चल तथा y निर्भर चल हो । त्यसैले x को मानहरू हामी आफैँले राखी y को मानहरू निकाली (x, y) को क्रमजोडा बनाउँदा

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

क्रमजोडाहरू (–2, 4), (–1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) हरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी जोड्दा,

नोट : $y = x^2$ को लेखाचित्रलाई पारावोला (parabola) भनिन्छ । यसलाई शीर्षविन्दु (Turning point or vertex) (0, 0) भएको वर्गफलनको लेखाचित्र भनिन्छ ।

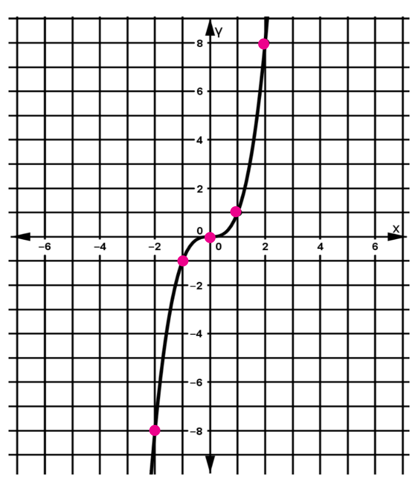
(ग) फलन $y = f(x) = x^3$ को लेखाचित्र

दिइएको फलन $y = x^3$

x स्वतन्त्र चल तथा y निर्भर चल हो । त्यसैले x को मानहरू हामी आफैँले राखी y को मानहरू निकाली (x, y) को क्रमजोडा बनाउँदा

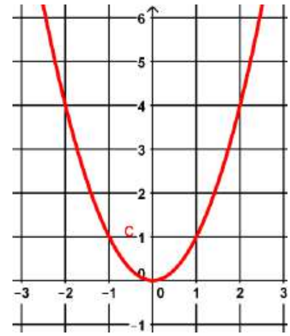
x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–1	0	1	8

क्रमजोडाहरू (–2, –8), (–1, –1), (0, 0), (1, 1), (2, 8) हरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी जोड्दा



उदाहरण 1

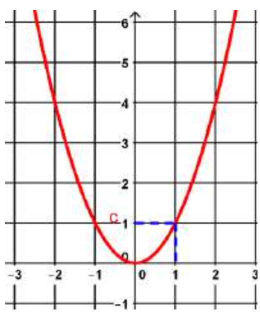
दिइएको लेखाचित्रबाट तोकिएका x को मानको आधारमा y वा $f(x)$ को मान निकाल्नुहोस् ।



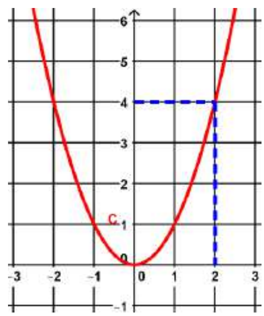
x	0	1	2	–1
$y = f(x)$	...	...	...	...

समाधान

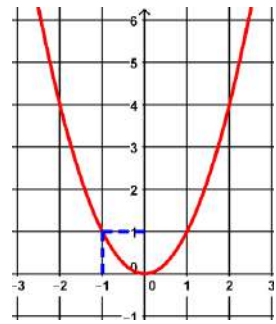
लेखाचित्रबाट, $x = 0$ हुँदा, $f(x) = 0$ छ ।



$x = 1$ हुँदा $f(x) = 1$



$x = 2$ हुँदा $f(x) = 4$



$x = -1$ हुँदा $f(x) = 1$

अभ्यास 1.1 (I)

1. तलका कुन कुन सम्बन्ध फलन हुन्, कारणसहित लेख्नुहोस् :

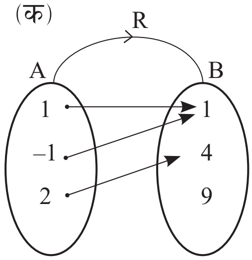
   (क) R = {(1, 2), (3, 5), (5, 7), (7, 9)}

   (ख) R = {(1, 2), (2, 3), (3, 5), (3, 6)}

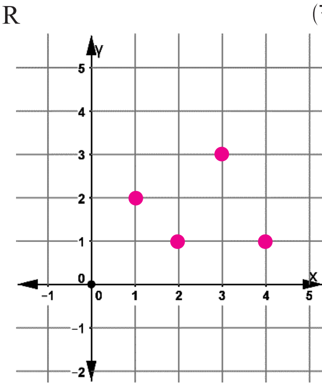
   (ग) R = {(1, 3), (1, 5), (4, 3)}

2. तलका कुन कुन सम्बन्धहरू फलन हुन्, कारणसहित लेख्नुहोस् :

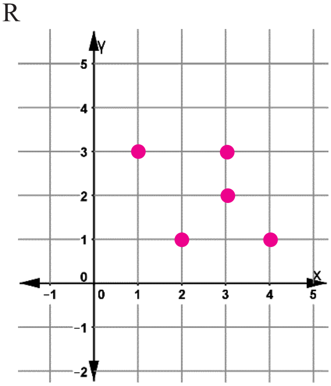
   (क)



   (ख) R



   (ग) R



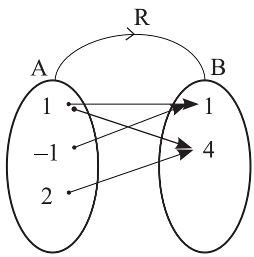
(घ) R

x	1	2	3
y	1	4	9

(ङ) R

x	1	1	2
y	1	–1	4

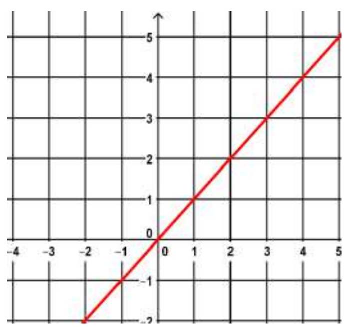
(च)



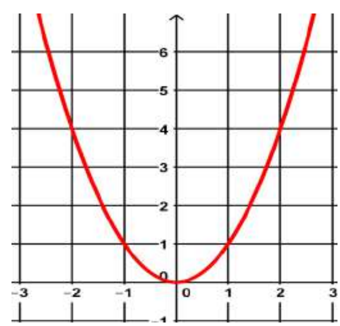
3. (क) फलन $f(x) = x$ को लेखाचित्र खिच्नुहोस् । (ख) फलन $f(x) = x^2$ को लेखाचित्र खिच्नुहोस् ।

(ग) फलन $f(x) = x^3$ को लेखाचित्र खिच्नुहोस् ।

4. तलको लेखाचित्रका आधारमा तोकिएको विन्दुमा x वा y को मान निकाल्नुहोस् ।



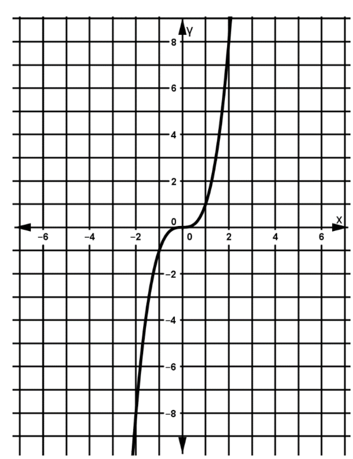
x	3	–1
y	…	……..



x	….	…
y	4	1

5. दायाँ फलन $f(x)$ को लेखाचित्र दिइएको छ ।

लेखाचित्रबाट $f(0), f(-1), f(2)$ को मानहरू लेख्नुहोस् ।



उत्तर

प्रश्न 1 देखि 3 सम्मको उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) 3, –1 (ख) 2, 1 5. $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(2) = 8$

1.2 बहुपदीय (Polynomials)

1.2.0 परिचय (Introduction)

Al-Khwarizmi
(780-850 C.E.)

ग्रिकका विद्वान Diophantus ले विभिन्न समीकरणहरूको अध्ययन सुरु गरेका थिए। ऐतिहासिक रूपमा बहुपदीयको अध्ययन वर्गसमीकरण र यसको हल गर्ने समस्याबाट सुरु भई ज्यामितीय तरिकाले अर्थात् वर्ग पूरा गरेर हल गर्ने तरिका भने पहिलो पटक अरबी गणितज्ञ अल-ख्वारिज्मीले (Al-Khwarizmi) गरेका थिए। बहुपदीयको प्रयोग गणितमा मात्र नभई अर्थशास्त्र, कम्प्युटर विज्ञान तथा अन्य विविध क्षेत्रहरूका समस्या समाधान गर्नसमेत गरिन्छ।

1.2.1 बहुपदीयको अवधारणा र यसको मूलहरू (Concept of Polynomial and Its Roots)

क्रियाकलाप 1 एक चलयुक्त बहुपदीय

समस्या

दायाँको चित्रमा लम्बाइ $2x + 3$ एकाइ र चौडाइ $x + 2$ एकाइ भएको एउटा आयत दिइएको छ।

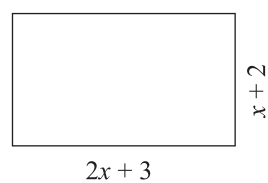
(क) उक्त आयतको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(ख) क्षेत्रफल कति पदीय विजीय अभिव्यञ्जक हो ?

(ग) प्रत्येक पदमा चलको घाताङ्क कति छन् ? लेख्नुहोस्।

(घ) के सबै घाताङ्कहरू पूर्णसङ्ख्या हुन् ?

(ङ) प्रत्येक पदहरूमा चलको गुणाङ्कहरू कति कति छन् ?



cx^n को स्वरूपमा भएको आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूलाई नै एउटा चल x मा भएको बहुपदीयहरू (Polynomials in one Variable) भनिन्छ, जहाँ n एउटा पूर्णसङ्ख्या (whole Number) र c अचल (constant) राशि हो। बहुपदीयहरूलाई p(x), q(x), r(x),... आदि सङ्केतहरूले जनाइन्छ। जस्तै : $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 6$, $q(x) = 3x - 2$ आदि बहुपदीयहरू हुन् तर $x^{-3} + 2x^2 - 5x$, $\frac{1}{x} + 5$ आदि बहुपदीयहरू होइनन् किनभने यहाँ x^{-3} मा x को घाताङ्क -3 पूर्णसङ्ख्या होइन। त्यसैगरी $\frac{1}{x}$ मा x को घाताङ्क -1 पूर्णसङ्ख्या होइन।

उदाहरण 1

तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) बहुपदीय $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ मा कतिओटा पदहरू रहेका छन् ? x^3 र x को गुणाङ्कहरू के के हुन् ? लेख्नुहोस्।

(ख) $p(x) = \sqrt[4]{x^8} + 5x - 2$ र $q(x) = \sqrt[3]{x} + 5x - 2$ बहुपदीयहरू हुन् वा होइनन् ? कारणसहित लेख्नुहोस्।

समाधान

(क) यहाँ, $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ छ । उक्त बहुपदीयमा जम्मा चारओटा पद रहेका छन् । x^3 र x को गुणाङ्कहरू क्रमश: 1 र –2 छन् ।

(ख) $p(x) = \sqrt[4]{x^8} + 5x - 2 = (x^8)^{\frac{1}{4}} + 5x - 2 = x^2 + 5x - 2$ हुन्छ । यहाँ प्रत्येक पदहरूमा चलको घाताङ्क पूर्णसङ्ख्यामा भएकाले $p(x)$ बहुपदीय हो ।

दोस्रो अभिव्यञ्जक, $q(x) = \sqrt[3]{x} + 5x - 2$ छ । यसमा पहिलो पदमा $\sqrt[3]{x}$ रहेको छ जसलाई $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$) लेख्न सकिन्छ । तसर्थ, $q(x) = \sqrt[3]{x} + 5x - 2 = x^{\frac{1}{3}} + 5x - 2$, मा चल x को घाताङ्क $\frac{1}{3}$ पूर्ण सङ्ख्या नभएकोले $q(x)$ बहुपदीय होइन ।

बहुपदीयहरूको स्तरीय स्वरूप र डिग्री (Standard Form of a Polynomial and it's Degree)

बहुपदीयमा चलको घाताङ्कहरू क्रमशः घट्दो वा बढ्दो क्रममा भएमा त्यसलाई स्तरीय स्वरूपको बहुपदीय (polynomial in standard form) भनिन्छ । $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ लाई स्तरीय स्वरूपको बहुपदीय भनिन्छ किनकि चलको घाताङ्कहरू क्रमशः घट्दो क्रममा छन् । त्यसैगरी, $q(x) = 2x^4 + 3x^2 - 4$ को रूपमा लेखी चलको घाताङ्कहरू क्रमशः घट्दो क्रमको पूर्ण सङ्ख्याहरूमा बनाई स्तरीय स्वरूपको रूपमा लेख्न सकिन्छ ।

बहुपदीयहरूको प्रत्येक पदहरूमा भएको चलको घाताङ्कमध्ये सबैभन्दा ठुलो घाताङ्कलाई उक्त बहुपदीयको डिग्री भनिन्छ । बहुपदीयको सबैभन्दा ठुलो घाताङ्क भएको पदको गुणाङ्कलाई मुख्य गुणाङ्क (leading coefficiant) भनिन्छ ।

उदाहरण 2

बहुपदीय $p(x) = 3x^5 - 6$ लाई स्तरीय स्वरूपमा लेख्नुहोस् । यसको डिग्री कति छ ? मुख्य गुणाङ्क कति छ ?

समाधान

दिइएको बहुपदीय $p(x) = 3x^5 - 6$ लाई निम्नानुसार स्तरीय स्वरूपमा लेख्दा,

$$p(x) = 3x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 6$$

यसको डिग्री 5 हुन्छ । मुख्य गुणाङ्क 3 हो ।

अभ्यास 1.2 (A)

1. बहुपदीयको परिभाषा उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
2. बहुपदीय $4x^5 + 2x^3 - 7x + 6$ मा x^3 र x^2 को गुणाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।
3. बहुपदीय $4x^6 - 7x + 6$ मा कतिओटा पद छन् ? यसको डिग्री कति हुन्छ ?
4. तलको मध्ये कुन कुन बहुपदीयहरू हुन् र कुन कुन बहुपदीयहरू होइनन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(क) $x^2 + \sqrt{5}$ (ख) $\sqrt{y} + 3$ (ग) $z + \frac{5}{z}$

(घ) $\sqrt{y} + y\sqrt{3}$ (ङ) $x^3 - 7x^2 + 2x - 4$ (च) $3x^2 - 11x + 6$ (छ) $4x^3 + \sqrt[3]{x}$

5. तल दिइएका बहुपदीयहरूको डिग्री लेख्नुहोस् :

   (क) $2x^4 - 5x^2 - 1$ (ख) $x^{10} + 2x - 4 + 3x^3$

   (ग) $x^5 + 2x^3 - 7x^7 + 6$ (घ) $-2x^3 + 5x^2 + 7x + x^5$

6. तलको बहुपदीयहरूलाई स्तरीय स्वरूपमा लेख्नुहोस् :

   (क) $2x^3 + 5x^2 + 7x + 9x^4$ (ख) $x^4 + 2x + 1 + 3x^3$

   (ग) $x^5 + 2x^3 - 7x + 6$ (घ) $2x^4 + 7x^2 - 3$

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. x^3 र x^2 को गुणाङ्कहरू क्रमशः 2 र 0 हुन्छ ।
3. पदहरूको सङ्ख्या = 3, डिग्री = 6 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
5. (क) 4 (ख) 10 (ग) 7 (घ) 5
6. (क) $2x^3 + 5x^2 + 7x + 9x^4 = 9x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x$

   (ख) $x^4 + 2x + 1 + 3x^3 = x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 2x + 1$

   (ग) $x^5 + 2x^3 - 7x + 6 = x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0.x^2 - 7x + 6$

   (घ) $2x^4 + 7x^2 - 3 = 2x^4 + 0x^3 + 7x^2 + 0x - 3$

बहुपदीयहरूको मूल (Root of the Polynomials)

क्रियाकलाप 1

निर्देशन : एउटा बहुपदीय $p(x) = x^2 - 7x + 12$ छ । तलको तालिका भर्नुहोस् ।

x	1	2	3	4	...
$p(x)$					

x को मान कति हुँदा $p(x)$ को मान 0 आयो ?

दिइएको बहुपदीयमा चलराशिको मान राख्दा जुन मानले बहुपदीयलाई शून्य बनाउँछ, सोही मानलाई उक्त बहुपदीयको मूल (root) भनिन्छ । अर्थात् यदि $x = a$ राख्दा बहुपदीय $p(a) = 0$ भएमा x को एउटा मूल a हुन्छ ।

अर्को तरिकाले माथिको बहुपदीयको मूल निकाल्दा,

मानौँ, $p(x)$ को मूल a भए $p(a) = 0$ हुन्छ ।

$p(a) = 0$

अथवा, $a^2 - 7a + 12 = 0$

अथवा, $(a - 4)(a - 3) = 0$

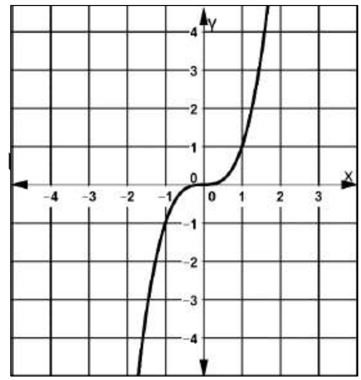
अथवा, $a - 3 = 0$

यहाँ, $a - 4 = 0$, $a = 4$ वा $a = 3$

तसर्थ, $p(x)$ का मूलहरू 3 र 4 हुन्छन् ।

उदाहरण 1

दायाँको चित्रमा $p(x) = x^3$ को लेखाचित्र दिइएको छ । उक्त लेखाचित्र हेरी $p(x)$ को एउटा मूल (root) कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

दिइएको लेखाचित्रमा $p(x)$ ले X - अक्षमा $x = 0$ मा भेट गरेको छ । त्यसैले यसको मूल (root), 0 हुन्छ ।

अर्थात्, $p(0) = 0^3 = 0$

उदाहरण 2

यदि बहुपदीय $p(x) = 2x^2 - kx + 8$ को एउटा मूल 4 भए k को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको बहुपदीय $p(x)$ को एउटा मूल 4 छ त्यसैले $p(4) = 0$ हुन्छ

$p(4) = 0$

अथवा, $2\cdot4^2 - k\cdot4 + 8 = 0$

अथवा, $32 - 4k + 8 = 0$

अथवा, $40 - 4k = 0$

अथवा, $k = 10$

तसर्थ, k को मान 10 हुन्छ ।

अभ्यास 1.2 (B)

1. बहुपदीयको मूल भन्नाले के बुझिन्छ । उदाहरणसहित लेख्नुहोस् । साथै यसको ज्यामितीय अर्थ पनि लेख्नुहोस् ।
2. (क) यदि बहुपदीय $p(x)$ को एउटा मूल 2 भए यसको लेखाचित्रले X – अक्षको कुन विन्दुमा भेट गरेको हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

   (ख) यदि बहुपदीय $p(x)$ को एउटा मूल –1 भए यसको लेखाचित्रले X – अक्षको कुन विन्दुमा भेट गरेको हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

   (ग) यदि बहुपदीय $p(x)$ को मूलहरू 3 र –1 भए यसको लेखाचित्रले X – अक्षको कुन कुन विन्दुहरूमा भेट गरेको हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

3. तलको बहुपदीयका मूलहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $p(x) = x + 3$ (ख) $p(x) = x^2 - 9$ (ग) $p(x) = x^2 - 1$

(घ) $p(x) = 2x^2 - 7x + 6$ (ङ) $p(x) = x^2 - 5x + 6$

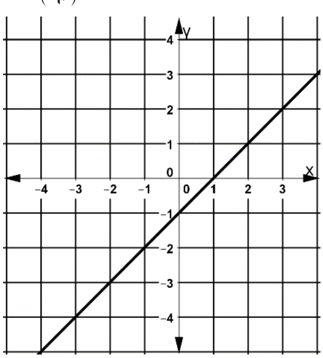
4. (क) यदि बहुपदीय $p(x) = kx + 3$ को एउटा मूल 3 भए k को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि बहुपदीय $p(x) = x^2 - kx + 6$ को एउटा मूल 3 भए k को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

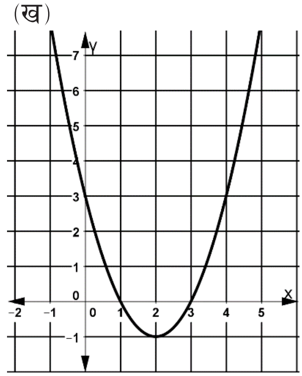
(ग) यदि बहुपदीय $p(x) = kx^2 - 25$ को एउटा मूल 5 भए k को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. तलको लेखाचित्रबाट बहुपदीय $p(x)$ को मूल पत्ता लगाउनुहोस् ।

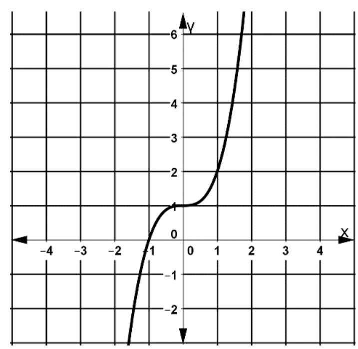
(क)



(ख)



(ग)



उत्तर

1	शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।				
2	(क) (2, 0)	(ख) (–1, 0)	(ग) (–1, 0) र (3, 0)		
3	(क) –3	(ख) 3 र –3	(ग) 1 र –1	(घ) 2 र $\frac{3}{2}$	(ङ) 2 र 3
4	(क) –1	(ख) 5	(क) 1		
5	(क) 1	(ख) 1, 3	(ग) –1		

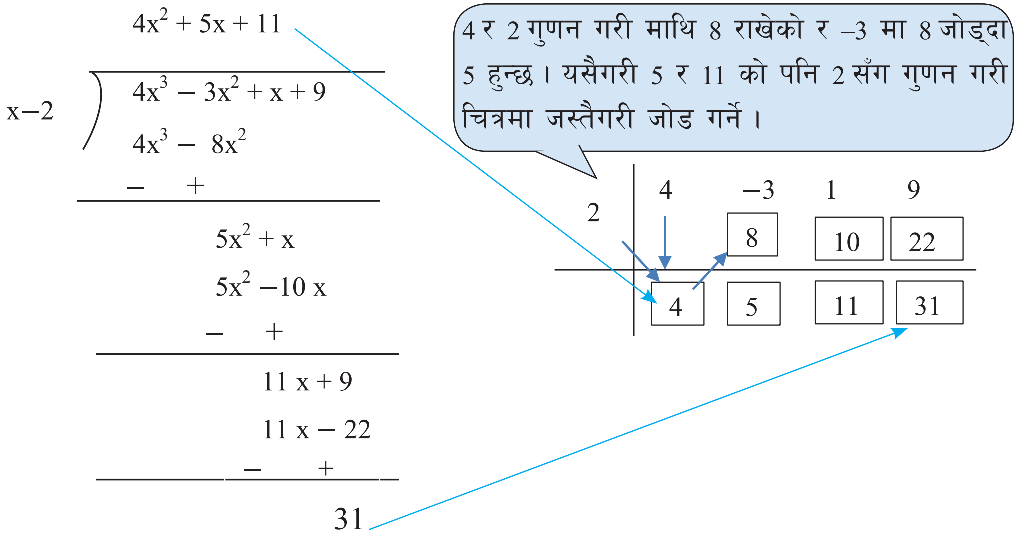
1.2.2 बहुपदीयहरूको भाग (Division of Polynomials)

सङ्क्षिप्त भागविधि (Synthetic Division)

सङ्क्षिप्त भागविधि, बहुपदीयलाई दुईपदीयले भाग गर्ने छोटकरी विधि हो । विभिन्न बहुपदीयहरूको गुणनखण्ड पत्ता लगाउन तथा बहुपदीयहरूको मूल पत्ता लगाउन यो विधिको प्रयोग गर्न सकिन्छ । यसको तरिका अध्ययनका लागि तलको भाग क्रिया अध्ययन गर्नुहोस् ।

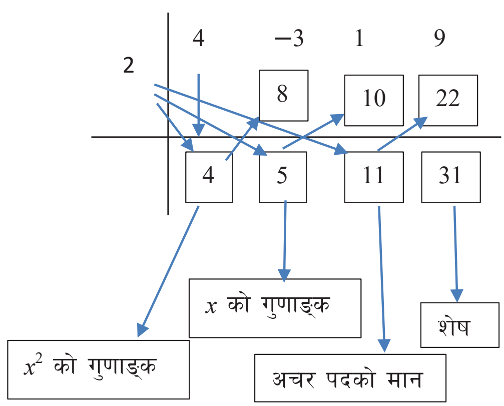
बहुपदीय $4x^3 - 3x^2 + x + 9$ लाई $x - 2$ ले भाग गरी भागफल र शेष पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ, भाजक $x - 2$ र भाज्य $4x^3 - 3x^2 + x + 9$ छन् । साधारण भागविधिबाट भाग गर्दा,



माथिको भागलाई एकैपटक छोटकरीमा गर्दा,

दिइएको बहुपदीयलाई (भाज्य) स्तरीय स्वरूपमा नभएमा पहिला स्तरीय स्वरूपमा राख्नुपर्छ । माथि दिइएको बहुपदीय स्तरीय स्वरूपमा छ । अब $x-2$ हाम्रो भाजक हो त्यसैले 2 ले भाग गर्ने । चित्रमा देखाए जस्तै गरी सर्वप्रथम भाज्य बहुपदीयमा भएको गुणाङ्कहरू लेख्नुपर्छ र माथिको सबै प्रक्रियाहरू एकैपटक गर्नुपर्छ ।



तसर्थ भागफल (Quotient) $= 4x^2 + 5x + 11$ र शेष (Remainder) $= 31$

यहाँ भाज्यको डिग्रीभन्दा भाजकको डिग्री 1 कम हुन्छ ।

बहुपदीय $p(x)$ लाई दुइपदीय $(x - a)$ ले भाग गर्ने छोटकरी विधि नै सङ्क्षिप्त भागविधि (Synthetic Dividion Method) हो । यस विधिबाट भाग गर्दा भागफलको डिग्री भाज्यको डिग्रीभन्दा एक कम हुन्छ । विशेषगरी बहुपदीयको गुणनखण्डहरू पत्ता लगाउन, भागफल तथा शेष पत्ता लगाउन यस विधिको प्रयोग गरिन्छ ।

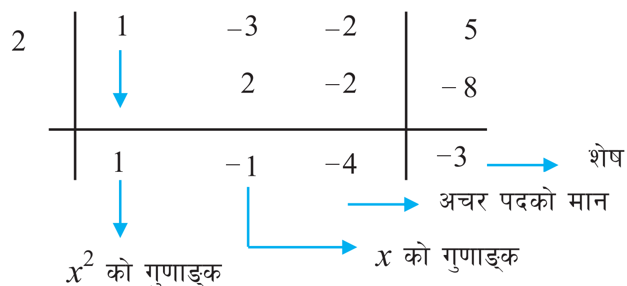
उदाहरण 1

$x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ लाई $x - 2$ ले भाग गरी भागफल र शेष पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ दिइएको बहुपदीय स्तरीय स्वरूपमा छ । भाजक $x - 2$ भएकाले हामी सङ्क्षिप्त भागविधिमा 2 ले भाग गर्छौं । अर्थात् भाजक $x - 2$ लाई $(x - a)$ सँग तुलना गर्दा $a = 2$ हुन्छ ।

सङ्क्षिप्त भागविधिबाट भाग गर्दा,



भागफल (Quotient) $= x^2 - x - 4$ शेष (Remainder) $= -3$

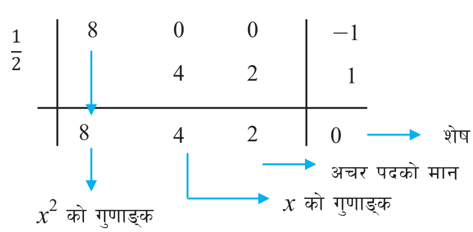
उदाहरण 2

बहुपदीय $8x^3 - 1$ लाई $2x - 1$ ले सङ्क्षिप्त भागविधि प्रयोग गरी भागफल र शेष पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ दिइएको बहुपदीय स्तरीय स्वरूपमा लेख्दा, $8x^3 + 0{\cdot}x^2 + 0{\cdot}x - 1$, चल राशिको गुणाङ्कहरू क्रमश: 8, 0, 0 र –1 छन् । भाजक $2x - 1$ भएकाले भाजक $2x - 1$ लाई $(x - a)$ सँग तुलना गर्दा, $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $a = \frac{1}{2}$ हुन्छ । तसर्थ $\frac{1}{2}$ ले भाग गर्दा,

सङ्क्षिप्त भागविधिअनुसार,



$\therefore$ भागफल (Quotient) $= \frac{1}{2}(8x^2 + 4x + 2) = 4x^2 + 2x + 1$ (किन ?) शेष (Remainder) $= 0$

अभ्यास 1.2 (C)

1. सङ्क्षिप्त भागविधिमा भाजकको डिग्री कति हुन्छ ?
2. सङ्क्षिप्त भागविधिमा भागफल र भाज्यबिचको डिग्रीको अन्तर तलका मध्ये कति हुन्छ ?
   (क) –1 (ख) 1 (ग) n – 1 (घ) n

3. सङ्क्षिप्त भागविधि प्रयोग गरी तलको बहुपदीयहरूलाई तोकिएको भाजकले भाग गर्दा आउने भागफल र शेष पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) भाज्य $= x^3 - 3x^2 + 4x - 3$, भाजक $= x - 1$

(ख) भाज्य $= 2x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, भाजक $= x - 2$

(ग) भाज्य $= 2x^3 - 11x^2 - 19x - 10$, भाजक $= x - 5$

(घ) भाज्य $= y^3 - 3y^2 - 4y + 12$, भाजक $= y + 2$

(ङ) भाज्य $= m^3 - 7m^2 + 7m + 15$, भाजक $= m + 1$

(च) भाज्य $= 5x^2 - 6x - 9$, भाजक $= x - 2$

4. सङ्क्षिप्त भागविधिको प्रयोग गरी भागफल र शेष पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) भाज्य $= 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$, भाजक $= 2x - 1$

(ख) भाज्य $= 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$, भाजक $= 2x + 1$

(ग) भाज्य $= 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2$, भाजक $= 3x + 2$

(घ) भाज्य $= 3x^3 - 13x^2 + 16$, भाजक $= 3x - 4$

(ङ) भाज्य $= 6x^3 - 4 + 13x^2$, भाजक $= 3x + 2$

5. (क) यदि $2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x - 1) \cdot Q(x) + R$ भए $Q(x)$ र R को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $x^3 - 19x - 30 = (x + 2) \cdot Q(x) + R$ भए $Q(x)$ र R को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $x^3 - 21x - 20 = (x + 1) \cdot Q(x) + R$ भए $Q(x)$ र R को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1.	1	2. 1			
3	(क) भागफल = $x^2 - 2x + 2$	शेष $= -1$	(ख) भागफल = $2x^2 + 8x + 11$	शेष $= 28$
	(ग) भागफल = $2x^2 - x - 24$	शेष $= -130$	(घ) भागफल = $x^2 - 5x + 6$	शेष $= 0$
	(ङ) भागफल = $x^2 - 8x + 15$	शेष $= 0$	(च) भागफल = $5x + 4$	शेष $= -1$
4	(क) भागफल = $x^2 - 5x + 6$	शेष $= 0$	(ख) भागफल = $x^2 + x - 6$	शेष $= 0$
	(ग) भागफल = $2x^2 - 3x + 1$	शेष $= 0$	(घ) भागफल = $x^2 - 3x - 4$	शेष $= 0$
	(ङ) भागफल = $2x^2 + 3x - 2$	शेष $= 0$		
5	(क) $Q(x) = 2x^2 - 5x - 4$,	$R = 6$	(ख) $Q(x) = x^2 - 2x - 15$,	$R = 0$
	(ग) $Q(x) = x^2 - x - 20$,	$R = 0$		

1.3 समीकरण र असमानता (Equation and Inequality)

1.3.0 परिचय (Introduction)

हामीले दैनिक जीवनमा विभिन्न शब्दहरू जस्तै कुनै ठाउँको यात्रा गर्दा लाग्ने समय बताउन 'बढीमा 2 घण्टा' वा, कुनै सामानको मूल्य तोक्दा वा पसलेसँग मूल्य घटाउन अनुरोध गर्दा 'कम्तीमा पचास रुपियाँ' तथा 'बढीमा रु. एक हजार दिन सक्ने' भन्दा कम, भन्दा बढी जस्ता शब्द वा वाक्यहरू प्रयोग गरिरहेका हुन्छौँ । यी सबै कुराहरू असमानतासँग सम्बन्धित छन् ।

तलका उदाहरणहरू हेरौँ :

- मोहनले एक घण्टामा बढीमा रु 90 कमाउँछ ।
- सरिनाले एक घण्टामा कम्तीमा रु. 80 कमाउँछिन् ।

यदि मोहनको एक घण्टाको कमाइलाई x र सरिनाको एक घण्टाको कमाइ y भए, उनीहरूको कमाइलाई गणितीय वाक्यमा कसरी लेख्न सकिन्छ ? सोच्नुहोस् ।

मोहन र सरिनाको कमाइलाई गणितीय वाक्यमा लेख्दा,

- मोहनको एक घण्टाको कमाइ $x \leq 90$
- सरिनाको एक घण्टाको कमाइ $\mathrm{y} \geq 80$

यी दुबै वाक्यहरूलाई गणितमा असमानता भनिन्छ ।

ट्रिकोटोमीका चिह्नहरू ($<, >, \leq, \geq$) प्रयोग भएका गणितीय कथनहरूलाई असमानता भनिन्छ । असमानतामा चल राशिको डिग्री एक भएको असमानताहरूलाई रेखीय असमानता (Linear In-equlity) भनिन्छ । जस्तै $x \leq 4,\ \mathrm{y} > 10, x + 2\mathrm{y} \geq 5$ आदि ।

दैनिक जीवनका न्यूनतम तथा अधिकतम समस्याहरूको समाधान गर्न तथा माथिल्लो कक्षाहरूमा अध्ययनका लागि हामीलाई असमानताको अध्ययन आवश्यकता पर्छ ।

1.3.1 एकचलयुक्त रेखीय असमानता र लेखाचित्रमा प्रस्तुत (Linear Inequality of Single Variable and Its Graphical Representation)

क्रियाकलाप 1

उद्देश्य : दिइएको कथनलाई असमानतामा व्यक्त गर्नु

समस्या : सहर A बाट सहर B मा यात्रा गर्दा कम्तीमा 2 घण्टाको समय लाग्छ भन्ने कथनलाई असमानतामा कसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ ?

यदि रेखीय असमानतामा एउटा मात्र चलराशि भएमा त्यस्तो असमानतालाई एकचलयुक्त रेखीय असमानता भनिन्छ । एकचलयुक्त रेखीय असमानताका विभिन्न स्वरूपहरू यसप्रकार छन्

कथन	असमानता
x को मान a भन्दा कम	$x < a$ वा $a > x$
x को मान a भन्दा बढी	$x > a$ वा $a < x$
x को मान कम्तीमा a छ, a अथवा a भन्दा बढी छ	$x \geq a$ वा $a \leq x$
x को मान बढीमा a छ, a अथवा a भन्दा कम छ	$a \geq x$ वा $x \leq a$

उदाहरण 1

एक जना खेलाडीले तोकिएको समयमा आफ्नो प्रतिस्पर्धीभन्दा 5 गुणा दौडिँदा उसले 200 m वा सो भन्दा बढी दुरी पार गर्छ भने,

(क) माथिको समस्यालाई असमानतामा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ख) असमानताको हल गरी प्रतिस्पर्धीले पार गरेको न्यूनतम दुरी कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, प्रतिस्पर्धी खेलाडीले पार गरेको दुरी $= x$ m, खेलाडीले पार गरेको दुरी $= 5x$ m

(क) पार गरेको दुरी 200 m भन्दा बढी भएकाले,

$5x - x \geq 200$

(ख) माथिको असमानता हल गर्दा,

अथवा, $5x - x \geq 200$

अथवा, $4x \geq 200$

अथवा, $x \geq \frac{200}{4}$ [दुबैतिर 4 ले भाग गरेको]

अथवा, $x \geq 50$

तसर्थ, न्यूनतम पार गरेको दुरी 50 रहेछ ।

असमानताहरूको हल गर्दा ध्यान दिनुपर्ने कुराहरू

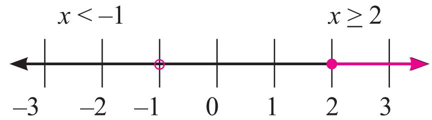
- सङ्ख्यालाई असमानताको दुबैतिर जोड्दा वा घटाउँदा असमानताको चिह्न परिवर्तन हुँदैन ।
- उही धनात्मक सङ्ख्याले असमानताको दुबैतिर गुणन वा भाग गर्दा असमानताको चिह्न परिवर्तन हुँदैन ।
- उही ऋणात्मक सङ्ख्याले असमानताको दुबैतिर गुणन वा भाग गर्दा असमानताको चिह्न परिवर्तन हुन्छ ।

क्रियाकलाप 1

$x \geq 2$ र $x < -1$ लाई सङ्ख्या रेखा र लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्ने तरिकालाई अध्ययन गर्नुहोस् ।

पहिलो असमानता $x \geq 2$ लिँदा,

यहाँ x को मान 2 वा 2 भन्दा ठुलो रहेको छ । तसर्थ $x = 2$ ले जनाउने सिधारेखा दिइएको असमानताको सिमा रेखा हुन्छ ।

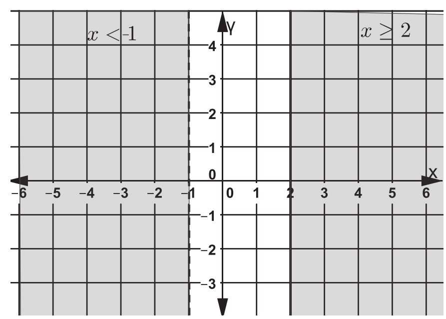


पहिला $x = 2$ विन्दु राख्ने असमानता चिह्न "≥" मा भन्दा ठुलो र बराबर पनि भएकाले सिमारेखा खिच्दा गाढा रेखा (Solid line) खिच्नुपर्छ । x को मान 2 र 2 भन्दा धेरै भएकाले लेखाचित्रमा देखाए जस्तै $x = 2$ को दायाँतिर छाया पारी हलक्षेत्रलाई देखाउनुपर्छ ।

दोस्रो असमानता $x < -1$ लिँदा,

यहाँ x को मान -1 भन्दा सानो रहेको छ ।

तसर्थ $x = -1$ ले जनाउने सिधारेखा दिइएको असमानताको सिमा रेखा हुन्छ ।



लेखाचित्रमा पहिला $x = -1$ ले जनाउने सिधारेखा खिच्ने र असमानता चिह्नमा भन्दा सानो (<) भएकाले सिमारेखा खिच्दा लेखाचित्रमा जस्तै थोप्ले रेखा (dotted line) खिच्नुपर्छ । x को मान -1 भन्दा सानो भएकाले लेखाचित्रमा देखाए जस्तै $x = -1$ को बायाँतिर छाया पारी हलक्षेत्रलाई देखाउनुपर्छ ।

एक वा दुई चलयुक्त रेखीय असमानताहरूको हलक्षेत्रलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा तलका प्रक्रियाहरू अपनाइन्छ

- यदि असमानतामा "≤" वा "≥" चिह्न भएमा सिमारेखाका विन्दुहरू पनि हलक्षेत्रमा पर्ने जनाउन गाढा सिमारेखा खिच्नुपर्छ ।
- यदि असमानतामा "<" वा ">" चिह्न भएमा सिमारेखाका विन्दुहरू हलक्षेत्रमा नपर्ने जनाउन डट भएको सिमारेखा खिच्नुपर्छ ।

अभ्यास 1.3 (A)

1. रेखीय असमानता भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
2. तलका असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी हलक्षेत्रलाई छाया पारी देखाउनुहोस् ।

(क) $x \geq 0$ (ख) $x \leq 0$ (ग) $x \geq 3$ (घ) $x > 1$ (ङ) $x \geq -2$

(च) $x > -3$ (छ) $x < 2$ (ज) $y \geq 0$ (झ) $y \leq 0$ (ञ) $y \geq 1$

(ट) $y > 3$ (ठ) $y \geq -4$ (ड) $y > -5$ (ढ) $y < 2$

3. तलको असमानताहरू हल गरी असमानता क्षेत्रमा छाया पारी देखाउनुहोस् ।

(क) $2x + 5 \leq 15$ (ख) $2x + 5 \geq 15$ (ग) $x + 3 > 7$

(घ) $5x \leq 20$ (ङ) $\frac{7-x}{2} \geq 1$ (च) $\frac{2+x}{3} < 1$

(छ) $(3x + 1) \geq \frac{2}{3}(4x - 3)$ (ज) $\frac{5}{4}(x + 1) \leq \frac{3}{2}(x - 1)$

(झ) $\frac{1}{3}(x + 2) \geq \frac{1}{5}(x + 6)$ (ञ) $\frac{3x+1}{2} \leq \frac{2x-1}{3}$

(ट) $\frac{4x+1}{3} \geq \frac{3x-1}{2}$

4. तलका कथनहरू अध्ययन गरी असमानतामा व्यक्त गरी समाधान गर्नुहोस् ।

(क) कुनै सङ्ख्याको तीन गुणामा 4 जोड्दा 13 भन्दा कम हुन्छ ।

(ख) यदि 3 लाई कुनै सङ्ख्याको दुई गुणाबाट घटाउँदा 5 भन्दा ठुलो वा बराबर हुन्छ ।

(ग) यदि एउटा राजमार्गमा मोटरसाइकल कम्तीमा 40 कि.मी. प्रतिघण्टाका दरले र बढीमा 60 कि. मी. प्रतिघण्टाका दरले कुदाउँदा 120 कि.मी. पार गर्न लाग्ने समयको अन्तराल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

(घ) सहबुद्धिनले पहिलो, दोस्रो र तेस्रो परीक्षाको अतिरिक्त गणित विषयको परीक्षामा क्रमशः 72, 85 र 75 अङ्क प्राप्त गरे भने अब औसत प्राप्ताङ्क कम्तीमा 80 हुन उनले चौथो परीक्षामा कति अङ्क प्राप्त गर्नुपर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) लाक्पासँग रु. 500 छ । उसले रु 20 प्रतिगोटा पर्ने एकाथरी कलम आधा दर्जन र रु 40 प्रतिगोटा पर्ने अर्कोथरी कलम बढीमा कतिओटा किन्न सक्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् । अब ऊसँग कति रकम बाँकी रहन्छ ?

(च) सनमले रु. 2000 मा दुईखाले पुरस्कारको पाकेट तयार गर्न लगाइन् जसमा पहिलोखाले पुरस्कारको प्रतिपाकेट रु. 300 र दोस्रोखाले पुरस्कारलाई प्रतिपाकेट रु. 500 पर्छ । यदि पहिलो खालको पुरस्कार 3 ओटा चाहिएको छ भने दोस्रो खालको पुरस्कार बढीमा कतिओटा किन्न सक्छिन होला ? कति रकम बाँकी रहन्छ होला ?

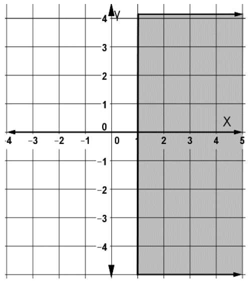
(छ) कुनै एउटा त्रिभुजको आधार 5 cm छ । यदि क्षेत्रफल 20 वर्ग से.मी. देखि 30 वर्ग से.मी. को बिचमा रहँदा उचाइको अन्तराल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

(ज) यदि कुनै वर्गको परिमिति 40 cm देखि 200 cm सम्म पर्छ भने यो अवस्था मान्यता हुने गरी सम्भावित लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

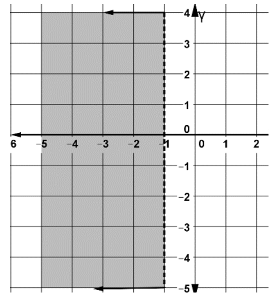
(झ) A ले T20 क्रिकेटको पहिलो दुई खेलमा क्रमशः 30 र 85 रन बनाएछ अब औसतमा कम्तीमा 50 रन बनाउन तेस्रो खेलमा उसलाई कम्तीमा कति रन आवश्यक पर्छ ?

5. तलको ग्राफले जनाउने असमानताहरूलाई गणितीय कथनका रूपमा लेख्नुहोस् ।

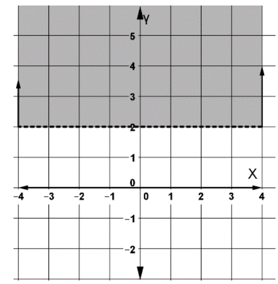
(क)



(ख)



(ग)



उत्तर

1 र 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्

3. (क) $x \leq 5$ (ख) $x \geq 5$ (ग) $x > 4$ (घ) $x \leq 4$ (ङ) $x < 5$ (च) $x < 1$

छ) $x \geq -9$ (ज) $x \geq 11$ (झ) $x \geq 4$ ञ) $x \leq -1$ (ट) $x \leq 5$ लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) $x < 3$ (ख) $x \geq 4$ (ग) $2 \leq t \leq 3$ (घ) $x \geq 118$

(ङ) 9, 20 (च) 2, 100 (छ) $2 < h < 3$ (ज) $10 \leq l \leq 50$ (झ) $x \geq 35$

5. (क) $x \geq 1$ (ख) $x < -1$ (ग) $y > 2$

1.3.2 दुई चलयुक्त रेखीय असमानता र लेखाचित्रमा प्रस्तुत (Linear Inequality of Two Variable and Graphical Representation)

क्रियाकलाप 1

सम्राटलाई आमाले चकलेट किन्न भनी रु. 30 दिनुभयो । पसलमा दुई प्रकारका चकलेट छन् । पहिलो प्रकारको चकलेटको मूल्य प्रतिगोटा रु. 5 र अर्को प्रकारको चकलेटको मूल्य रु. 10 प्रतिगोटा पर्ने रहेछ । अब सम्राटले रु. 30 बाट दुबै प्रकारका चकलेट बढीमा कति कतिओटा किन्न सक्छ होला ? पहिलो प्रकारको चकलेट x ओटा र दोस्रो प्रकारको चलकेट y ओटा किनेमा जम्मा खर्चलाई असमानतामा कसरी व्यक्त गर्ने होला ? उक्त असमानतालाई लेखाचित्रमा कसरी प्रस्तुत गर्ने होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

आमाले सम्राटलाई दिनुभएको जम्मा रकम रु. 30 छ ।

पहिलो प्रकारको x ओटा चकलेटको प्रतिगोटा रु. 5 को दरले जम्मा खर्च = रु. $5x$

दोस्रो प्रकारको y ओटा चकलेटको प्रतिगोटा रु. 10 को दरले जम्मा खर्च = रु. 10y

दुबै चकलेटको जम्मा खर्च ≤ 30

अब माथिको अवस्थालाई असमानतामा व्यक्त गर्दा,

$5x + 10y \leq 30$

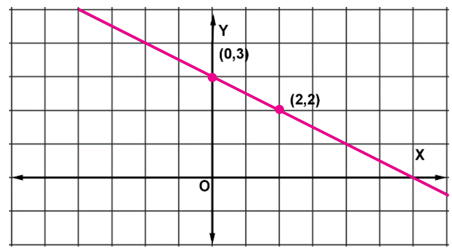
माथिको असमानतामा दुईओटा चलराशिहरू x र y रहेका छन त्यसैले यस्तो असमानतालाई दुई चलयुक्त असमानता भनिन्छ । दुई चलयुक्त असमानतालाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा

(क) एक चलयुक्त असमानतामा जस्तै : हामीले सबैभन्दा पहिला दिइएको असमानताको सीमारेखा निकाल्नुपर्छ । माथिको असमानताको सीमारेखा $5x + 10y = 30$ हुन्छ ।

(ख) समीकरण $5x + 10y = 30$ लाई मान्य हुने गरी तलको जस्तै गरी क्रमजोडा (x, y) बनाउनुपर्छ ।

x	0	2
y	3	2

क्रमजोडाहरू (0, 3) र (2, 2)



(ग) क्रमजोडाहरू (0, 3) र (2, 2) लाई क्रमशः लेखाचित्रमा देखाए जस्तै अङ्कन गरी स्केलका सहायताले जोडी सिधारेखा खिच्नुपर्छ । यसरी सिधारेखा खिच्दा असमानता चिह्न हेर्नुपर्छ । यहाँ असमानता चिह्न "≤" भएकाले गाढा सिधा रेखा खिच्नुपर्छ ।

(घ) हलक्षेत्र पत्ता लगाउनका लागि सिमारेखामा नपर्ने कुनै एक विन्दु परीक्षण गर्नुपर्छ । जसका लागि दिइएको असमानतामा (0, 0) राखी परीक्षण गर्न सकिन्छ । यदि परीक्षण गर्दा सम्बन्ध सत्य भएमा परीक्षणविन्दुतर्फ छाया पारी हलक्षेत्र देखाउनुपर्छ भने यदि परीक्षण असत्य आएमा हल क्षेत्रलाई परीक्षण विन्दुको विपरीत दिशामा छाया पारी देखाउनुपर्छ । यसको अर्थ छाया पारिएको क्षेत्रको जुनसुकै विन्दु लिएर माथिको असमानतामा राख्दा सधैँ सत्य वा मान्य हुन्छ ।

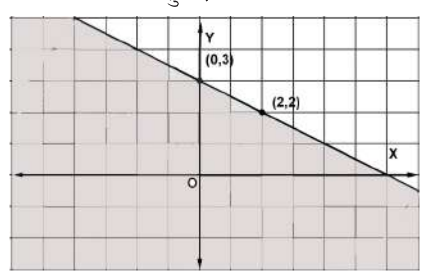
(ङ) उद्गम विन्दु (0, 0) परीक्षण गर्दा,

$5x + 10y < 30$

अथवा, $5 \times 0 + 10 \times 0 < 30$

अथवा, $0 < 30$ (True)

उद्गम विन्दु भएको क्षेत्रमा छाया पारी हलक्षेत्र खिच्दा



दुईओटा चलराशिहरू समावेश भएको असमानतालाई दुईचलयुक्त असमानता भनिन्छ । यस्तो असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्दा सबैभन्दा पहिला सिमारेखाको समीकरणलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुपर्छ । हलक्षेत्र देखाउन सीमा रेखामा नपर्ने विन्दुको परीक्षण गर्नुपर्छ । यसका लागि दिइएको असमानतामा परीक्षण विन्दु (0, 0) राख्दा, यदि सत्य भएमा परीक्षण विन्दुतिर छाया पारी हलक्षेत्र देखाउनुपर्छ भने यदि असत्य आएमा हलक्षेत्रलाई परीक्षण विन्दुको विपरीत दिशामा छाया पारी देखाउनुपर्छ ।

उदाहरण 1

$2x + 3y \leq 12$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

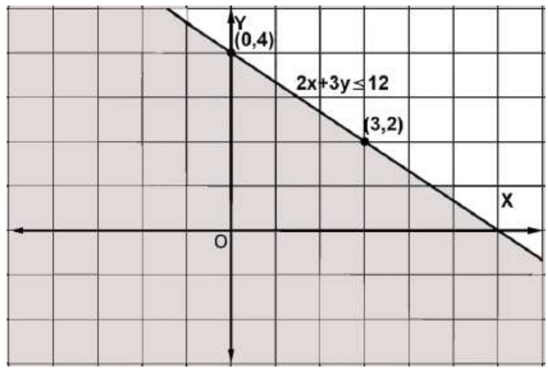
समाधान

दिइएको असमानता, $2x + 3y \leq 12$ सीमारेखा, $2x + 3y = 12$

माथिको समीकरण मान्य हुनेगरी x र y को मानहरू निकाल्दा,

x	3	0
y	2	4

विन्दुहरू (3, 2) र (0, 4) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्दा



उद्गम विन्दु (0, 0) परीक्षण

$2x + 3y \leq 12$

$2 \times 0 + 3 \times 0 \leq 12$

$0 \leq 12$ (सत्य भयो)

अभ्यास 1.3 (B)

1. दुई चलयुक्त रेखीय असमानता भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
2. तलका असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा छाया पारी प्रस्तुत गर्नुहोस् :

   (क) $y \leq x + 5$ (ख) $y \geq 3x + 2$ (ग) $y \leq 2x - 3$ (घ) $2y \geq x - 4$

   (ङ) $3x + 2y \geq 6$ (च) $2x - y \leq 10$ (छ) $3x - 5y + 15 \geq 0$ (ज) $3x + 4y \leq 24$
3. तलका कथनहरूलाई असमानतामा व्यक्त गर्नुहोस् :

   (क) रमनसँग रु 5000 छ । उसले उक्त रकम पाइन्ट र टिसर्ट किन्न खर्च गर्छ । यदि प्रतिगोटा पाइन्टको मूल्य रु 1000 र प्रतिगोटा टिसर्टको मूल्य रु 500 भए उसले किन्न सक्ने सम्भावित पाइन्ट र टिसर्टको सङ्ख्यालाई असमानतामा व्यक्त गर्नुहोस् ।

   (ख) रीतासँग रु. 1000 छ जसबाट उनले रु. 50 पर्ने र रु. 80 पर्ने दुईखालको कापीहरू किन्ने योजना बनाइन् । उनले किन्न सक्ने सम्भावित कापीहरूको सङ्ख्याहरूलाई असमानतामा व्यक्त गर्नुहोस् ।

   (ग) 3 किलो स्याउ र 2 किलो अनार किन्दा रु. 1,200 भन्दा कम लाग्छ भने खर्चहरूलाई असमानतामा व्यक्त गर्नुहोस् ।

उत्तर

1 र 2 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) $2x + y \leq 10$ (ख) $5x + 8y \leq 100$ (ग) $3x + 2y < 1200$

1.4 सङ्ख्या पद्धति (Number System)

1.4.0 पुनरवलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस्

(क) आनुपातिक (rational) र अनानुपातिक (irrational) सङ्ख्याहरूबिच के फरक छ ?

(ख) $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ को निश्चित मान आउँछ ?

(ग) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{6}$ लाई अनानुपातिक सङ्ख्याहरू भन्न सकिन्छ ?

1.4.1 सर्डको परिचय र यसका क्रियाहरू (Introduction to Surd and Its Operations)

1.4.1.1 सर्डको परिचय (Introduction to Surd)

तलको वर्गमूल तथा घनमूलहरू अध्ययन गरी मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

$\sqrt{16}$ = ? $\sqrt{9}$ = ? $\sqrt[3]{64}$ = ? $\sqrt{4}$ = ? $\sqrt{3}$ = ? $\sqrt[3]{4}$ = ? $\sqrt{2}$ = ?

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt[3]{4}$ को मान निश्चित गर्न सकिएन । त्यसैले यी सबै सर्डहरू हुन् । यी सबै सङ्ख्याहरू साधारणमूलक चिह्न (Radical Sign) " $\sqrt{\ }$ " भित्र रहेका छन् र उक्त चिह्नभित्रका सङ्ख्याहरू जस्तै 2, 3 र 4 भने आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् । यिनीहरूको पूर्ण वर्गमूल पत्ता लगाउन पनि सकिँदैन । यस्ता सङ्ख्याहरूलाई सर्ड भनिन्छ । यो एउटा विशेष खालको मूल चिह्न समावेश भएको अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational Number) हो ।

साधारणमूलक चिह्नभित्र रहेका सङ्ख्याहरूको मूल पूर्ण सङ्ख्या वा आनुपातिक सङ्ख्यामा पत्ता लगाउन सकिँदैन भने त्यस्ता सङ्ख्याहरू सर्डहरू हुन् । कुनै सर्ड $\sqrt[n]{a}$ मा यदि a एउटा आनुपातिक सङ्ख्या र n एउटा प्राकृतिक सङ्ख्या भए $\sqrt[n]{a}$ लाई n क्रम (n^{th} order) भएको सर्ड भनिन्छ । जस्तै $\sqrt[3]{5}$ को क्रम 3 हो यसलाई Third order root पनि भनिन्छ । सबै सर्डहरू अनानुपातिक सङ्ख्याहरू हुन्, तर सबै अनानुपातिक सङ्ख्याहरू सर्ड नहुन सक्छन् । जस्तै π, e आदि । यहाँ e युलर सङ्ख्या हो जहाँ, e = 2.7.828... हुन्छ ।

उदाहरण 1

सर्डहरू $\sqrt[4]{15}$ र $\sqrt[7]{12}$ को क्रम लेख्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको सर्डहरूको क्रम क्रमशः 4 र 7 हो ।

उदाहरण 2

सर्डहरू $2\sqrt{3}$, $5\sqrt[3]{2}$ र $\sqrt[4]{5}$ लाई समान क्रम भएको सर्डहरूमा बदल्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको सर्डहरूको क्रमहरू क्रमश: 2, 3 र 4 छन् । तिनीहरूको ल.स. 12 हुन्छ । अब सबै सर्डहरूको क्रमलाई 12 बनाउँदा,

$$2\sqrt{3} = 2\sqrt[2\times6]{3^6} = 2\sqrt[12]{729}$$

$$5\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3\times4]{2^4} = 5\sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4\times3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

उदाहरण 3

सर्डहरू $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ र $\sqrt[6]{27}$ लाई ठुलोदेखि सानो क्रममा मिलाएर राख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, सर्डहरूको क्रम 2, 3 र 6 को ल.स.6 हुन्छ । अब सबै सर्डहरूको क्रम 6 बनाएपछि क्रम मिलाउन सकिन्छ । त्यसैले,

$$\sqrt{5} = \sqrt[2\times3]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3\times2]{4^2} = \sqrt[6]{16}$$

$$\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{27}$$

यहाँ $16 < 27 < 125$ भएकाले , $\sqrt[3]{4} < \sqrt[6]{27} < \sqrt{5}$ हुन्छ ।

सर्डका क्रियाहरू (Operation on Surds)

सर्डहरूको जोड तथा घटाउ (Addition and Subtraction on Surds)

सजातीय सर्डहरूमात्रै जोड्न तथा घटाउन सकिन्छ । यसरी सजातीय सर्डहरू जोड तथा घटाउ गर्दा गुणाङ्कहरू मात्र जोड्ने तथा घटाउने गरिन्छ । जस्तै :

(क) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ (ख) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

सर्डहरूको गुणन तथा भाग (Multiplication and Division of Surds)

समान क्रम भएका सर्डहरूको गुणन र भाग गरेको उदाहरण हेरौँ:

(क) $7\sqrt{2}\times2\sqrt{5}$ $=(7\times2)\sqrt{2\times5}$ $=14\sqrt{10}$	(ख) $8\sqrt{10}\div2\sqrt{5}$ $=\frac{8\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$ $=\frac{8}{2}\times\sqrt{\frac{10}{5}}$ $=4\sqrt{2}$

उदाहरणबाट समान क्रम भएका सर्डहरू गुणन वा भाग गर्दा सर्डका गुणाङ्कसँग गुणाङ्क र सर्डसँग सर्डको गुणन वा भाग गरिन्छ भन्ने बुझ्न सकिन्छ ।

असमान क्रम भएका सर्डहरूको उदाहरण हेरौँ:

$$\sqrt[3]{5}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3\times2]{5^2}}{\sqrt[2\times3]{3^3}}=\frac{\sqrt[6]{25}}{\sqrt[6]{27}}=\sqrt[6]{\frac{25}{27}}$$

फरक फरक क्रम भएका सर्डहरू पनि गुणन गर्न तथा भाग गर्न सकिन्छ तर त्यसका लागि सर्वप्रथम समान क्रममा बदल्नुपर्छ । माथिको उदाहरणमा $\sqrt[3]{5}\div\sqrt{3}$ मा, सर्डहरूका क्रम 3 र 2 को ल.स. 6 भएकाले समान क्रम 6 बनाइएको हो ।

विचारणीय प्रश्न : सर्डहरूको जोड, घटाउ, गुणन तथा भाग गरिसकेपछिको नतिजा के सधैँ सर्ड नै हुन्छ ?

सर्डसम्बन्धी केही नियमहरू (Laws of Radicals)

साधारणत: सर्डसँग सम्बन्धित केही समस्याहरू समाधान गर्दा आवश्यक पर्ने नियमहरू तल प्रस्तुत गरिएको छ :

1. $\sqrt[n]{a}=(a)^{\frac{1}{n}}$
2. $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

उदाहरण 4

सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{27}+\sqrt{75}-8\sqrt{3}$

समाधान

यहाँ दिइएको,

$\sqrt{27} + \sqrt{75} - 8\sqrt{3}.$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 3} + \sqrt{3 \times 5 \times 5} - 8\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$

$= (3 + 5 - 8)\sqrt{3}$

$= 0$

सर्डहरूको आनुपातिकरण (Rationalization of Surd)

भिन्नको हरमा भएको सर्डलाई आनुपातिक सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्ने प्रक्रियालाई सर्डयुक्त भिन्नको आनुपातिकरण भनिन्छ ।

जस्तै : (क) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ यहाँ सर्डको हर आनुपातिक सङ्ख्यामा रूपान्तरण भएको छ ।

(ख) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3 \times (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

दिइएको सर्डलाई गुणन गरी आनुपातिक सङ्ख्यामा बदल्ने सङ्ख्यालाई उक्त दिइएको सर्डको आनुपातिक गुणनखण्ड (rationalizing factor) भनिन्छ । जस्तै $\sqrt{3}$ को आनुपातिक गुणनखण्ड $\sqrt{3}$ नै हो किनकि $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ हुन्छ जुन एउटा आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

त्यस्तै $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ को आनुपातिक गुणनखण्ड $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ हो किनकि

$(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \times (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$ जुन एउटा आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

तसर्थ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ र $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ एकअर्काको आनुपातिक गुणनखण्ड हुन ।

उदाहरण 5

सरल गर्नुहोस् : $\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$

समाधान

यहाँ दिइएको,

$\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$

$= \frac{(\sqrt{x})^2 - (1)^2}{\sqrt{x} + 1}$

$= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)}$

$= \sqrt{x} - 1$

उदाहरण 6

सरल गर्नुहोस् : $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

समाधान

यहा दिइएको,

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$ [हरलाई आनुपातीकरण गरी सरल गर्दा]

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{xa}+a-x+2\sqrt{xa}-a}{x-a}$$

$$= \frac{4\sqrt{xa}}{x-a}$$

वैकल्पिक तरिका

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$ [हरहरूको ल.स. लिँदा]

$$= \frac{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{a}+(\sqrt{a})^2-\left((\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{a}+(\sqrt{a})^2\right)}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}$$

$$[\therefore (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,\ a^2-b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$= \frac{x+2\sqrt{xa}+a-x+2\sqrt{xa}-a}{x-a}$$

$$= \frac{4\sqrt{xa}}{x-a}$$

अभ्यास 1.4 (A)

1. सर्डलाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।

2. तलका सर्डहरूको क्रम लेख्नुहोस् :

   (क) $\sqrt{6}$ (ख) $\sqrt[3]{9}$ (ग) $3\sqrt[7]{6}$ (घ) $\sqrt[n]{a}$

3. (क) m को मान कति हुँदा x^3 र $\sqrt[3]{x^{m-1}}$ बराबर हुन्छन् ?

   (ख) यदि y^4 र $\sqrt[4]{y^{2x}}$ बराबर भए x को मान कति होला ?

4. सरल गर्नुहोस् :

   (क) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$ (ख) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$ (ग) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ (घ) $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt{36}}$

   (ङ) $\sqrt[3]{40}\times\sqrt[3]{25}$ (च) $\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{16}}$

5. सरल गर्नुहोस् :

   (क) $4\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{7}$ (ख) $\frac{24}{\sqrt{3}}-\frac{18}{\sqrt{3}}$ (ग) $3\sqrt{3}+\frac{6}{\sqrt{3}}$ (घ) $\sqrt[4]{16807}$

   (ङ) $\sqrt[3]{250}$ (च) $3\sqrt{2}+\sqrt[4]{2500}+\sqrt[4]{64}+6\sqrt{8}$

   (छ) $\sqrt{50}+\sqrt{18}-8\sqrt{2}$ (ज) $4\sqrt[3]{250}-8\sqrt[3]{128}+4\sqrt[3]{54}$

   (झ) $4\sqrt[3]{24}-11\sqrt[3]{192}+6\sqrt[3]{648}$ (ञ) $\sqrt{125}-\sqrt{45}+\sqrt{5}$

6. सरल गर्नुहोस् :

   (क) $\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ (ख) $\sqrt[3]{54}\times\sqrt[3]{4}$

   (ग) $6\sqrt[3]{4}\times7\sqrt[3]{12}$ (घ) $\sqrt{40}\times\sqrt{18}$

   (ङ) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})\times(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})$ (च) $(\sqrt{2}+4\sqrt{3})\times(\sqrt{12}-2\sqrt{3})$

   (छ) $(3-2\sqrt{3})^2$ (ज) $(5+2\sqrt{2})^2$

   (झ) $(7\sqrt{5}-2\sqrt{7})^2$ (ञ) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

   (ट) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

   (ठ) $\frac{\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{16}}{2\sqrt[3]{2}}$ (ड) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ (ढ) $\frac{6\sqrt{45}-2\sqrt{80}-3\sqrt{20}}{2\sqrt{180}}$

7. हरलाई आनुपातीकरण गरी सरल गर्नुहोस् :

   (क) $\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ (ख) $\frac{2+\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}}$ (ग) $\frac{7\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{48}-\sqrt{18}}$ (घ) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

(ङ) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (च) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(छ) $\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ (ज) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

(झ) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ (ञ) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

उत्तर

1 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 2. (क) 2 (ख) 3 (ग) 7 घ) n

3 (क) 10 (ख) 8

4 (क) $\sqrt{15}$ (ख) 4 (ग) $\sqrt{3}$ (घ) $\frac{1}{2}$ (ङ) 10 च) 1

5 (क) $5\sqrt[3]{7}$ (ख) $2\sqrt{3}$ (ग) $5\sqrt{3}$ (घ) $7\sqrt[4]{7}$

(ङ) $5\sqrt[3]{2}$ (च) $7\sqrt[4]{4}+15\sqrt{2}$ (छ) 0 (ज) 0 (झ) 0 (ञ) $3\sqrt{5}$

6 (क) 10 (ख) 6 (ग) $84\sqrt[3]{6}$ (घ) $12\sqrt{5}$ (ङ) $6+\sqrt{10}$ (च) 0 (छ) $3(7-4\sqrt{3})$

(ज) $33+20\sqrt{2}$ (झ) $27-28\sqrt{35}$ (ञ) $a-b$ (ट) 2 (ठ) 1 (ड) 5 (ढ) $\frac{1}{3}$

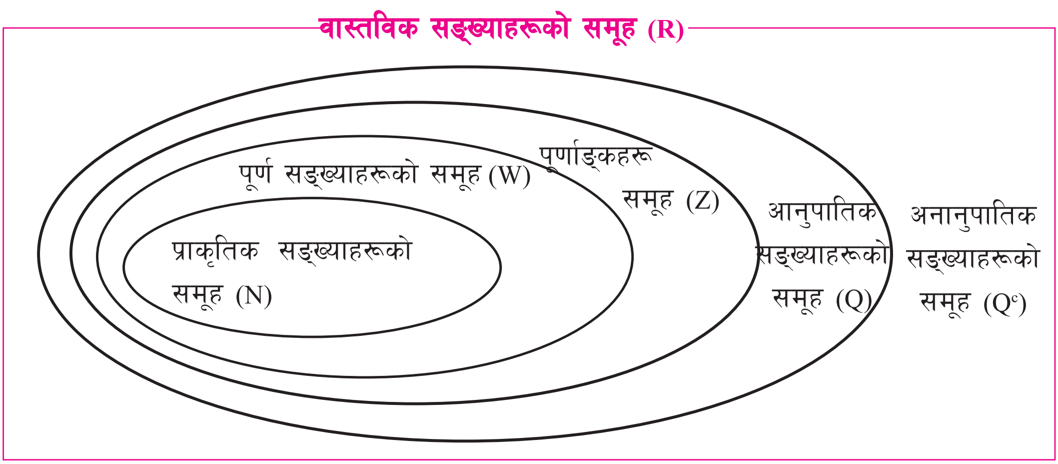
7 (क) $6(7+\sqrt{5})$ (ख) $\frac{11+4\sqrt{7}}{-3}$ (ग) $\frac{54+\sqrt{6}}{20}$ (घ) $2+\sqrt{3}$ (ङ) 8 (च) 10

(छ) $2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1$ (ज) $\frac{2(x+a)}{x-a}$ (झ) $2x$ (ञ) $4x\sqrt{x^2-1}$

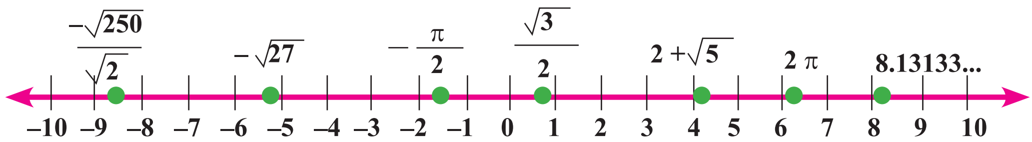
1.4.2 वास्तविक सङ्ख्या (Real Numbers)

क्रियाकलाप 1

तलको चित्र अध्ययन गरी विभिन्न प्रकारका सङ्ख्याका समूह र तिनका उपसमूह पत्ता लगाउनुहोस् ।



आनुपातिक (Rational) र अनानुपातिक (Irrational) सङ्ख्याहरूको समूहको संयोजन (Union) नै वास्तविक सङ्ख्याहरू (Real Numbers) को समूह हो । वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई निम्नानुसार वास्तविक सङ्ख्यारेखा (Real Number Line) मा पनि प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :



विचारणीय प्रश्न : कुनै दुई वास्तविक सङ्ख्याहरूबिचमा कतिओटा वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्छन् होला ? अनुमान गर्नुहोस् ।

कुनै दुईओटा वास्तविक सङ्ख्याहरूबिच असीमित (Infinite) वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्छन् । उदाहरणका लागि कुनै दुई वास्तविक सङ्ख्याहरू 1 र 2 को बिचमा असीमित (Infinite) वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्छन्, जस्तै : 1.01, 1.001, 1.4, 1.0011, 1.00005 ... आदि । तसर्थ दुई वास्तविक सङ्ख्याहरूबिच यस्ता अनगन्ती वास्तविक सङ्ख्याहरू भेटिन्छन् ।

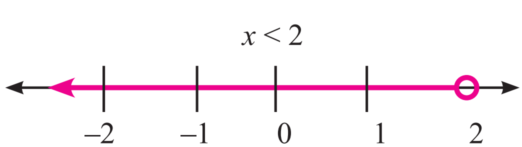
आनुपातिक (Rational) र अनानुपातिक (Irrational) सङ्ख्याहरूको समूहको संयोजन (Union) नै वास्तविक सङ्ख्याहरू (Real Numbers) को समूह हो । कुनै दुईओटा वास्तविक सङ्ख्याहरूबिच असीमित (Infinite) वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्छन । वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई हेर्नका लागि हामीले सङ्ख्या रेखा (Number Line) मा प्रस्तुत गरिन्छ ।

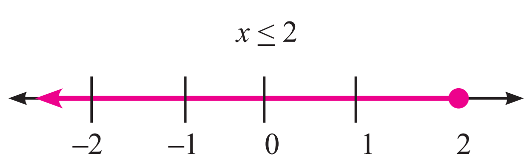
अन्तरालको अवधारणा (Concept of Interval)

क्रियाकलाप 1

समस्या : x वास्तविक सङ्ख्या हो र $x < 2$, $x \leq 2, x > 2$, $x \geq 2, -1 < x < 2$ र $-1 \leq x \leq 2$ को अर्थ लेखी सङ्ख्यारेखामा देखाउनुहोस् ।

$x < 2$ भनेको x को मान 2 भन्दा साना सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् जसमा 2 छैन र 2 भन्दा साना वास्तविक सङ्ख्याहरू असीमित हुने भएकाले यस्तो समूहमा असीमित सदस्यहरू हुन्छन् । त्यस्तै

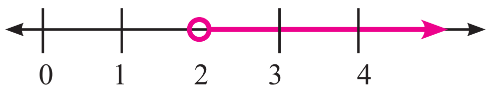




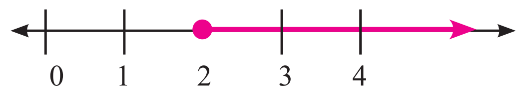
$x \leq 2$ भनेको x को मान 2 सहितको 2 भन्दा साना सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् , 2 र 2 भन्दा साना वास्तविक सङ्ख्याहरू असीमित हुने भएकाले यस्तो समूहमा पनि असीमित सदस्यहरू हुन्छन् । यसलाई सङ्ख्यारेखामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

त्यस्तै $x > 2$ र $x \geq 2$

$x > 2$



$x \geq 2$



- $x > 2$ भनेको x को मान 2 भन्दा ठुला सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो जसमा 2 छैन ।
- $x \geq 2$ भनेको x को मान 2 सहितको 2 भन्दा ठुला सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो ।

यसलाई सङ्ख्यारेखामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

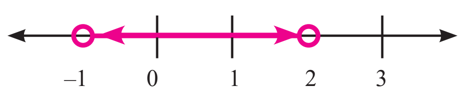
त्यस्तै अर्को उदाहरण हेरौँ : $-1 < x < 2$ र $-1 \leq x \leq 2$

$-1 < x < 2$ भनेको x को मान -1 र 2 बाहेक -1 देखि 2 सम्ममा सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् । यस्तो समूहमा असीमित वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्छन् ।

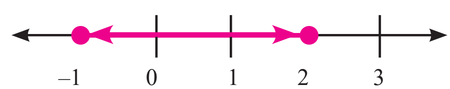
त्यस्तै $-1 \leq x \leq 2$ भनेको x को मान -1 र 2 सहितको -1 देखि 2 सम्ममा सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् । यस्तो समूहमा पनि असीमित वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्छन् ।

यसलाई सङ्ख्यारेखामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

$-1 < x < 2$



$-1 \leq x \leq 2$



माथिको उदाहरणबाट हामीले यो भन्न सक्छौँ कि दुई वास्तविक सङ्ख्याहरू -1 र 2 बिचको अन्तराललाई $-1 < x < 2$ र $-1 \leq x \leq 2$ ले जनाइन्छ । यहाँ -1 र 2 लाई अन्तरालको अन्तिम विन्दुहरू भनिन्छ । यस अन्तरालमा पहिलोमा -1 र 2 पर्दैनन् भने दोस्रोमा दुबै पर्छन् । $x < 2$ र $x > 2$ तथा $x \leq 2$ र $x \geq 2$ हरूलाई अन्तराल भनिदैन किनकि यिनिहरूमा दुई अन्तिम विन्दुहरू छैनन् ।

कुनै दुई वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई अन्तिम विन्दुहरू मानी अन्तरविना (Without Gap) ती दुई विन्दुहरूबिचको सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह नै अन्तराल (Interval) हो । यस्ता अन्तरालहरूमा असीमित वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्छन् । यस्ता अन्तरालहरूमा निश्चित गरिएका दुई अन्तिम विन्दुहरू पर्न पनि सक्छन् अथवा नपर्न पनि सक्छन । दुई वास्तविक सङ्ख्याहरू a र b (जसमा $a < b$ छ) को अन्तराललाई a र b परेमा $a \leq x \leq b$ र a र b नपरेमा $a < x < b$ ले जनाउन सकिन्छ ।

अन्तरालहरूलाई निम्न प्रकारहरूमा वर्गीकरण गरिएको पाइन्छ :

(क) बन्द अन्तराल (Closed Interval)

मानौँ अन्तरालका दुई अन्तिम वास्तविक सङ्ख्याहरू a र b $(a < b)$ छन । a देखि b सम्मको बन्द अन्तराल a र b सहित a देखि b सम्मका सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो यसलाई [a, b] ले जनाइन्छ ।

गणितीय रूपमा लेख्दा, $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b, x \in R\}$

सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,

उदाहरण 1

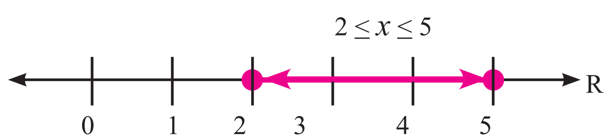
2 देखि 5 सम्मको बन्द अन्तराल भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? सङ्केतमा लेखी सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

2 देखि 5 सम्मको बन्द अन्तराल भन्नाले 2 र 5 सहितको 2 देखि 5 सम्मको सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह भन्ने बुझिन्छ । यसलाई सङ्केतमा [2, 5] लेखिन्छ ।

गणितीय रूपमा लेख्दा, $[2, 5] = \{x : 2 \leq x \leq 5, x \in R\}$

सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,

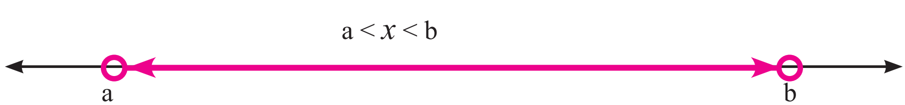


(ख) खुला अन्तराल (Open Interval)

मानौँ अन्तरालका दुई अन्तिम वास्तविक सङ्ख्याहरू a र b छन् जसमा b भन्दा a सानो छ अर्थात् $a < b$ छ । a देखि b सम्मको खुला अन्तराल भनेको a र b बाहेक a देखि b सम्मका सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो जसलाई (a, b) ले जनाइन्छ ।

गणितीय रूपमा लेख्दा, $(a, b) = \{x : a < x < b, x \in R\}$

सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,



उदाहरण 2

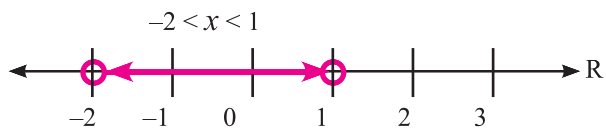
–2 देखि 1 सम्मको खुला अन्तराल भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? सङ्केतमा लेखी सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

–2 देखि 1 सम्मको खुला अन्तराल भनेको –2 र 1 बाहेकका सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह भन्ने बुझिन्छ । यसलाई सङ्केतमा (–2, 1) लेखिन्छ ।

गणितीय रूपमा लेख्दा, $(-2, 1) = \{ x : -2 < x < 1, x \in R \}$

सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,

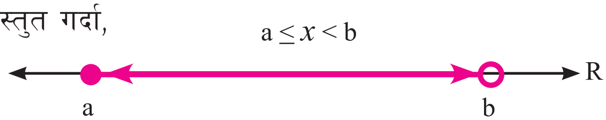


(ग) बायाँ बन्द दायाँ खुला अन्तराल (Left closed Right opened Interval)

मानौँ अन्तरालका दुई अन्तिम वास्तविक सङ्ख्याहरू a र b छन् जसमा $(a < b)$ छ । a देखि b सम्मको दायाँ खुला बायाँ बन्द अन्तराल भनेको a सहित b बाहेकको a देखि b सम्मका सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो, जसलाई [a, b) ले जनाइन्छ ।

गणितीय रूपमा लेख्दा, $[a, b) = \{ x : a \leq x < b, x \in R \}$

सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,



उदाहरण 3

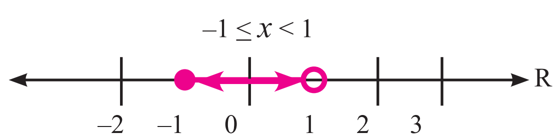
[–1, 1) को अन्तराल भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? समूहमा लेखी सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

[–1, 1) को अन्तराल भनेको –1 भएको र 1 बाहेकको –1 देखि 1 सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह भन्ने बुझिन्छ । यसलाई सङ्केतमा [–1, 1) लेखिन्छ ।

गणितीय रूपमा लेख्दा, $[-1, 1) = \{x : -1 \leq x < 1, x \in R \}$

सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,

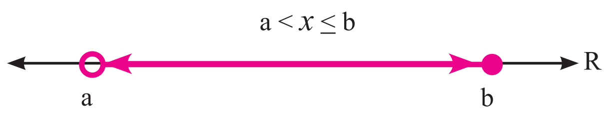


(घ) बायाँ खुला दायाँ बन्द अन्तराल (Left open/Right closed interval)

मानौँ अन्तरालका दुई अन्तिम वास्तविक सङ्ख्याहरू a र b $(a < b)$ छन् । a देखि b सम्मको बायाँ खुला दायाँ बन्द अन्तराल भनेको a बाहेक b सहितको a भन्दा ठुलो र b सम्मका सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो जसलाई (a, b] ले जनाइन्छ ।

गणितीय रूपमा लेख्दा, $(a, b] = \{ x : a < x \leq b, x \in R \}$

सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,



उदाहरण 4

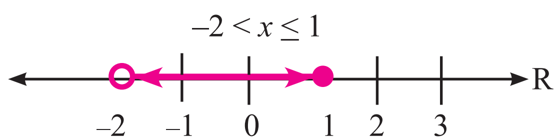
(–2, 1] को अन्तराल भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? सङ्केतमा लेखी सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

(–2, 1] को अन्तराल भन्नाले –2 बाहेक –2 भन्दा ठुला 1 सम्मको सबै वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो ।

गणितीय रूपमा लेख्दा, $(-2, 1] = \{x : -2 < x \leq 1, x \in R \}$

सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,



अभ्यास 1.4 (B)

1. बन्द अन्तराल भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
2. खुला अन्तराल भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
3. तलका मध्ये दायाँ खुला र बायाँ बन्द भएको अन्तराल कुन हो :

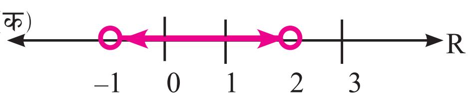
   (क) [a, b] (ख) (a, b] (ग) [a, b) (घ) (a, b)

4 तलको अन्तरालहरूको अर्थसहित सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

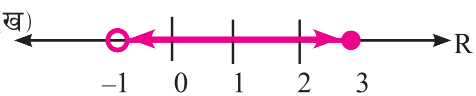
   (क) [1, 3] (ख) (–2, 4) (ग) (–3, 0) (घ) (0, 5)

5. तलको सङ्ख्यारेखाले जनाउने अन्तराललाई सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

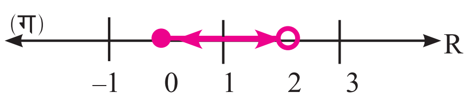
(क)



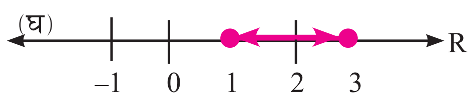
(ख)



(ग)



(घ)



उत्तर

1 र 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (ग) (a, b) 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
5. (क) (–1, 2) (ख) [–1, 3] (ग) [0, 2] (घ) [1, 3]

1.5 मेट्रिक्स (Matrix)

1.5.0 परिचय (Introduction)

Cayley

Matrix भन्ने शब्दको सुरुआत सन् 1850 मा Sylvester ले गरेका हुन् । मेट्रिक्सलाई जनाउन अङ्ग्रेजी वर्णमालाका ठुला अक्षरहरू जस्तै A , B, ... को प्रयोग गर्ने काम भने Cayley ले सन् 1858 मा गरे भन्ने इतिहासमा पाइन्छ ।

गणितको विभिन्न विधाहरूमा मेट्रिक्सको ज्ञान अत्यन्त आवश्यक छ । दैनिक जीवनका विविध समस्याहरू समाधानसहित आधुनिक इन्जिनियरिङ, तथ्याङ्कशास्त्र, वाणिज्यशास्त्र, भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान, कम्प्युटर विज्ञान, Cryptography, स्थानान्तरणको अध्ययन, अर्थशास्त्रलगायतको विविध विधाहरूमा मेट्रिक्सको प्रयोग गरिन्छ ।

1.5.1 मेट्रिक्सको परिचय (Introduction to Matrix)

क्रियाकलाप 1

तलको तालिका हेरौँ :

तीनओटा पसलमा एकबोरा चामलको मूल्य दिइएको छ ।

पसल / चामल	बासमती	जिरा मसिनो	सोना मनसुली
A	रु. 2200	रु. 2000	रु. 2450
B	रु. 2210	रु. 2050	रु. 2500
C	रु. 2190	रु. 2010	रु. 2480

माथिको तालिकालाई अझै छोटकरीमा पसलहरूको नाम र मूल्य पङ्क्तिमा (तेर्सो रेखामा) र चामलहरूको नाम र मूल्यलाई लहरमा (ठाडो रेखामा) राखी प्रतिबोरा मूल्यहरूलाई निम्नअनुसार पनि प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

		बासमती चामल	जिरा मसिनो	सोना मनसुली
पङ्क्ति → १	A	2200	2000	2450
पङ्क्ति → २	B	2210	2050	2500
पङ्क्ति → ३	C	2190	2010	2480
		↑ लहर १	↑ लहर २	↑ लहर ३

$$\begin{bmatrix} 2200 & 2000 & 2450 \\ 2210 & 2050 & 2500 \\ 2190 & 2010 & 2480 \end{bmatrix}$$

माथिको ठुलो कोष्ठ '[ ]' भित्र राखिएको सम्पूर्ण सङ्ख्यात्मक मानसहितको पूरा प्रस्तुतिलाई मेट्रिक्स (Matrix) भनिन्छ । यसलाई निम्नानुसार अङ्ग्रेजी वर्णमालाको ठुला अक्षरले जनाई लेख्न सकिन्छ :

$$R = \begin{bmatrix} 2200 & 2000 & 2450 \\ 2210 & 2050 & 2500 \\ 2190 & 2010 & 2480 \end{bmatrix}$$

माथिको मेट्रिक्स R भित्रका प्रत्येक मानहरूलाई मेट्रिक्स R का सदस्यहरू भनिन्छ ।

लहर (Column) र पङ्क्ति (Row) का रूपमा [ ] वा ( ) चिह्नभित्र तथ्याङ्कको आयताकार प्रस्तुतिलाई मेट्रिक्स (Matrix) भनिन्छ ।

पङ्क्ति र लहरका रूपमा रहेका सङ्ख्याहरूको आयातकार प्रस्तुतिलाई मेट्रिक्स (Matrix) भनिन्छ । मेट्रिक्सलाई [ ] वा ( ) कोष्ठकभित्र लेखिन्छ । सामान्यतः मेट्रिक्सलाई अङ्ग्रेजी वर्णमालाका ठुला अक्षरहरू A, B, C... इत्यादिले जनाइन्छ । मेट्रिक्सका सदस्यहरू (elements) लाई अङ्ग्रेजी वर्णमालाका साना अक्षरहरू a, b, c, ... इत्यादिले जनाइन्छ । मेट्रिक्स, तथ्याङ्कको प्रस्तुतीकरणको एउटा तरिका मात्र हो, यसको आफ्नो परिमाणात्मक वा सङ्ख्यात्मक मान हुँदैन ।

उदाहरण 1

तलको तालिकामा तीन जना विद्यार्थीहरूको स्तर अङ्क (Grade point) दिइएको छ। उक्त जानकारीहरूलाई मेट्रिक्सका रूपमा लेख्नुहोस् :

विद्यार्थीको नाम	विषय		
	गणित	विज्ञान तथा प्रविधि	नेपाली
सनम	3.8	3.6	3.2
रहमान	3.6	3.2	3.8
पेम्बा	3.8	3.6	3.2

समाधान

माथिको तालिकामा भएको तथ्याङ्कलाई मेट्रिक्समा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

$$A = \begin{bmatrix} 3.8 & 3.6 & 3.2 \\ 3.6 & 3.2 & 3.8 \\ 3.8 & 3.6 & 3.2 \end{bmatrix}$$

मेट्रिक्सको क्रम (Order of Matrix):

दिइएको मेट्रिक्स $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ मा मेट्रिक्स X का लहर कतिओटा छन् ? त्यसैगरी पङ्क्ति कतिओटा छन् ? लहर र पङ्क्ति प्रयोग गरी यसको क्रम लेख्नुहोस । मेट्रिक्स X मा जम्मा कति सदस्यहरू छन् ? के लहर र पङ्क्ति गुणन गर्दा सबै सदस्य सङ्ख्या आउँछ ? परीक्षण गर्नुहोस् ।

मेट्रिक्स X को क्रमलाई, पङ्क्ति × लहरका रूपमा लेख्दा, 3 × 2 हुन्छ । यसलाई 3 cross 2 मेट्रिक्स भनी पढ्न सकिन्छ । यसलाई $X_{3 \times 2}$ लेखिन्छ ।

मेट्रिक्समा (पङ्क्तिको सङ्ख्या) × (लहरको सङ्ख्या) का रूपमा गरिएको प्रस्तुतिलाई मेट्रिक्सको क्रम भनिन्छ । अर्थात्, मेट्रिक्सको क्रम = पङ्क्तिको सङ्ख्या × लहरको सङ्ख्या हुन्छ । $A_{m \times n}$ मेट्रिक्सको क्रम m × n मा पहिलो सङ्ख्या m ले पङ्क्ति सङ्ख्या र दोस्रो सङ्ख्या n ले लहर सङ्ख्या जनाउँछ ।

मेट्रिक्समा, मेट्रिक्सको जम्मा सदस्य सङ्ख्या = पङ्क्तिको सङ्ख्या × लहरको सङ्ख्या हुन्छ ।

उदाहरण 2

तलका मेट्रिक्सहरूको क्रम पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $A = [1 \quad 0 \quad 3]$

(ख) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

(ग) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(घ) $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

समाधान

(क) मेट्रिक्स A को क्रम = 1 × 3

(ख) मेट्रिक्स P को क्रम = 2 × 3

(ग) मेट्रिक्स I को क्रम = 2 × 2

(घ) मेट्रिक्स V को क्रम = 3 × 3

उदाहरण 3

यदि एउटा मेट्रिक्सको जम्मा सदस्य सङ्ख्या 10 भए उक्त मेट्रिक्सको सम्भावित क्रमहरू के के हुन सक्छन् ? लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ मेट्रिक्सको जम्मा सदस्य सङ्ख्या = 10, क्रम m × n भएको मेट्रिक्सका जम्मा mn सदस्यहरू हुन्छन् । त्यसैले गुणन गर्दा 10 आउने प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको क्रमजोडा बनाउँदा,

(1, 10), (10, 1), (2, 5), (5, 2)

सम्भावित क्रमहरू = 1 × 10, 10 × 1, 5 × 2 र 2 × 5

मेट्रिक्सका सदस्यहरूको स्थान (Positions of Elements of Matrix)

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गर्नुहोस् :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

माथिको उदाहरणमा,

a_{11} = पहिलो पङ्क्ति र पहिलो लहरको सदस्य = 1

a_{12} = पहिलो पङ्क्ति र दोस्रो लहरको सदस्य = –2

a_{13} = पहिलो पङ्क्ति र तेस्रो लहरको सदस्य = 3

a_{21} = दोस्रो पङ्क्ति र पहिलो लहरको सदस्य = –4

a_{22} = दोस्रो पङ्क्ति र दोस्रो लहरको सदस्य = – 3

a_{23} = दोस्रो पङ्क्ति र तेस्रो लहरको सदस्य = 0

तसर्थ, मेट्रिक्स A का सदस्यहरूको स्थानबाट सजिलै सदस्यहरू पहिचान गर्न सकिन्छ ।

मेट्रिक्सका हरेक सदस्यहरूको आफ्नो एक मात्र स्थान हुन्छ । ती प्रत्येक सदस्यहरूको स्थानलाई पङ्क्तिको सङ्ख्या र लहरको सङ्ख्याद्वारा निर्धारण गर्न सकिन्छ। कुनै पनि मेट्रिक्स A को सदस्यहरूलाई a_{ij} ले जनाइन्छ जहाँ i ले पङ्क्तिको सङ्ख्या र j ले लहरको सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।

मेट्रिक्सका सदस्यहरूलाई a_{mn} का रूपमा लेख्ने गरिन्छ, जहाँ m भनेको पङ्क्तिको सङ्ख्या र n भनेको लहरको सङ्ख्या हो । मेट्रिक्सका सदस्यहरूको स्थानहरूको सम्बन्ध प्रयोग गरी विभिन्न क्रमका मेट्रिक्सहरू निर्माण गर्न सजिलो हुन्छ ।

साधारणतः सदस्यहरूको स्थानका आधारमा मेट्रिक्सलाई निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

तसर्थ माथिको मेट्रिक्सलाई $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ले जनाइन्छ, जहाँ $i = 1, 2, 3, ..., m$ र $j = 1, 2, 3, ..., n$

उदाहरण 4

एउटा मेट्रिक्स $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ छ, जसका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् ।

(क) मेट्रिक्स Q को क्रम लेख्नुहोस् ।

(ख) a_{21}, a_{14}, a_{33} र a_{24} को मानहरू लेख्नुहोस् ।(ग) $a_{21} + a_{34} - a_{23}$ को मान कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ

(क) मेट्रिक्स Q को क्रम 3×4 हुन्छ ।

(ख) यहाँ, $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

a_{21} = दोस्रो पङ्क्ति र पहिलो लहर = 2 a_{14} = पहिलो पङ्क्ति र चौथो लहर = 3

a_{33} = तेस्रो पङ्क्ति र तेस्रो लहर = 8 a_{24} = दोस्रो पङ्क्ति र चौथो लहर = 0

(ग) $a_{21} + a_{34} - a_{23}$
$= 2 + 0 - 5$
$= -3$

उदाहरण 5

क्रम 3×4 भएको मेट्रिक्स निर्माण गर्नुहोस् जसका सदस्यहरू $a_{ij} = 2i + j$ का रूपमा रहेका छन् ।

समाधान

मानौँ, $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ भए $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

यहाँ, $a_{ij} = 2i + j$

त्यसैले,

$a_{11} = 2 \times 1 + 1 = 3$
$a_{12} = 2 \times 1 + 2 = 4$
$a_{13} = 2 \times 1 + 3 = 5$
$a_{14} = 2 \times 1 + 4 = 6$

$a_{21} = 2 \times 2 + 1 = 5$
$a_{22} = 2 \times 2 + 2 = 6$
$a_{23} = 2 \times 2 + 3 = 7$
$a_{24} = 2 \times 2 + 4 = 8$

$a_{31} = 2 \times 3 + 1 = 7$
$a_{32} = 2 \times 3 + 2 = 8$
$a_{33} = 2 \times 3 + 3 = 9$
$a_{34} = 2 \times 3 + 4 = 10$

आवश्यक मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

अभ्यास 1.5 (A)

1. तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) मेट्रिक्सलाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् । यसलाई जनाउने सङ्केत पनि लेख्नुहोस् ।

(ख) मेट्रिक्सको क्रम भन्नाले के बुझ्नुहुन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

(ग) मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ मा a_{22} को मान कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

(घ) कुनै मेट्रिक्स A मा a_{23} ले तलका मध्ये कुन स्थानलाई जनाउँछ ?

(अ) दोस्रो पङ्क्ति तेस्रो लहर (आ) दोस्रो लहर तेस्रो पङ्क्ति
(इ) तेस्रो लहर दोस्रो पङ्क्ति (ई) तेस्रो पङ्क्ति दोस्रो लहर

(ङ) यदि कुनै मेट्रिक्सको क्रम 3×2 भए उक्त मेट्रिक्सको जम्मा सदस्य सङ्ख्या तलका मध्ये कुन हो ?

(अ) 5 (आ) 1 (इ) 6 (ई) 9

2. तलको मेट्रिक्सहरूको क्रमसहित सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

(क) $P = [1 \quad 4 \quad 2]$ (ख) $X = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -7 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ (ग) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ भए तलको प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) a_{32} मा कुन सदस्य छ ?

(ख) $(a_{32} + a_{21})^2$ को मान कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

(ग) $a_{31} - a_{22} + a_{13}$ को मान कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

4. तल दिइएका मेट्रिक्सहरू निर्माण गर्नुहोस् :

(क) मेट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{2\times3}$ जहाँ $a_{ij} = 3i + 2j$ छ ।

(ख) मेट्रिक्स $B = [b_{ij}]_{3\times2}$ जहाँ $b_{ij} = 2i^2 - j$ छ ।

(ग) मेट्रिक्स $X = [x_{ij}]_{3\times3}$ जहाँ $x_{ij} = |2i - j|$ छ ।

(घ) मेट्रिक्स : $= [m_{ij}]_{2\times4}$ जहाँ $m_{ij} = \frac{(i-j)^2}{2}$ छ ।

(ङ) मेट्रिक्स $P = [p_{ij}]_{2\times3}$ जहाँ $p_{ij} = (i \times j)^2$ छ ।

5. तीन जना विद्यार्थीहरूले तीन विषयमा प्राप्त गरेको स्तर अङ्क (grade point) लेखी एउटा मेट्रिक्स बनाउनुहोस् । त्यसको क्रम र अवयवहरू साथीहरूसँग छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) 0 (घ) दोस्रो पङ्क्ति तेस्रो लहर (ङ) 6

2. (क) P को क्रम $= 1 \times 3$, $P = [p_{ij}]_{1\times3}$ (ख) X को क्रम $= 4 \times 2$, $X = [x_{ij}]_{4\times2}$

(ग) M को क्रम $= 3 \times 2$, $M = [m_{ij}]_{3\times2}$ 3. (क) 0 (ख) 4 (ग) 4

4. (क) $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ (ख) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \\ 17 & 16 \end{bmatrix}$ (ग) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(घ) $M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ (ङ) $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix}$

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मेट्रिक्सका प्रकारहरू (Types of Matrices)

तलका उदाहरण हेरौँ :

पङ्क्ति मेट्रिक्स	लहर मेट्रिक्स	आयतकार मेट्रिक्स	वर्ग मेट्रिक्स
$A = [1 \quad 2 \quad 3]$	$B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -8 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

माथिका उदाहरणमा,

- पहिलो मेट्रिक्स A मा एउटा मात्र पङ्क्ति छ । त्यसैले यसलाई पङ्क्ति मेट्रिक्स (Row matrix) भनिन्छ ।
- दोस्रो मेट्रिक्स B मा एउटा मात्र लहर छ । त्यसैले यसलाई लहर मेट्रिक्स भनिन्छ ।
- तेस्रो मेट्रिक्स C मा लहर र पङ्क्ति एकभन्दा बढी छन् र तिनको सङ्ख्या बराबर छैन । यस्तो मेट्रिक्सलाई आयतकार मेट्रिक्स भनिन्छ ।
- चौथो मेट्रिक्स D मा लहर र पङ्क्तिको सङ्ख्या बराबर छ । यस्तो मेट्रिक्सलाई वर्ग मेट्रिक्स (Square matrix) भनिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : के सबै मेट्रिक्स आयतकार मेट्रिक्स भन्न सकिन्छ ?

शून्य वा खाली मेट्रिक्स (Zero or Null Matrix)

मेट्रिक्सहरू $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ को क्रमहरू कति कति होलान ?

तिनीहरूको सदस्यहरू कस्ता छन् ?

दिइएका सबै मेट्रिक्सहरूको सदस्यहरू शून्य छन् त्यसैले क्रम जति भए पनि सबै सदस्यहरू शून्य भएकाले माथिका मेट्रिक्सहरूलाई शून्य मेट्रिक्सहरू भनिन्छ ।

सबै सदस्यहरू शून्य भएका मेट्रिक्सहरूलाई शून्य मेट्रिक्सहरू (Zero Matrix) भनिन्छ । शून्य मेट्रिक्सहरूलाई $O_{m \times n}$ ले जनाइन्छ ।

(च) विकर्ण मेट्रिक्स (Diagonal Matrix)

तलको प्रश्नहरूको उत्तर खोजी गर्नुहोस् :

वर्ग मेट्रिक्सहरू $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ मा मुख्य विकर्णहरूमा के के सदस्य छन् ?

मुख्य विकर्णमा भन्दा बाहेकका ठाउँमा कस्ता सदस्यहरू छन् ? यस्तो मेट्रिक्सलाई के भनिन्छ होला ?

माथिका पहिलो वर्ग मेट्रिक्स M मा मुख्य विकर्णमा 1 र 2 छन् र अन्य स्थानका सबै सदस्यहरू शून्य छन् । त्यसैगरी वर्ग मेट्रिक्स N मा मुख्य विकर्णमा 1, 5 र –4 छन् र अन्य स्थानका सबै सदस्यहरू शून्य छन् । दुबै वर्गाकार मेट्रिक्सहरूमा मुख्य विकर्णबाहेकका सबै सदस्यहरू शून्य भएकाले यस्ता मेट्रिक्सहरूलाई विकर्ण मेट्रिक्स भनिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : के वर्ग मेट्रिक्सहरू $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ लाई पनि विकर्ण मेट्रिक्स भन्न सकिन्छ ?

मुख्य विकर्णबाहेकका सबै सदस्यहरू शून्य भएका वर्ग मेट्रिक्सहरूलाई विकर्ण मेट्रिक्स (Diagonal matrix) भनिन्छ । विकर्ण मेट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ मा $i \neq j$ का लागि $a_{ij} = 0$ हुन्छ ।

(छ) स्केलर मेट्रिक्स (Scalar Matrix)

वर्ग मेट्रिक्सहरू $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ र $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ मा मुख्य विकर्णमा कस्ता सदस्यहरू छन् ?

के ती सबै बराबर छन् ? मुख्य विकर्ण बाहेकका सदस्यहरू कस्ता छन् ?

माथिका दुबै वर्ग मेट्रिक्सहरूमा मुख्य विकर्णहरूमा एउटै सदस्यहरू छन् र मुख्य विकर्णबाहेकका सबै सदस्यहरू शून्य छन् । यस्ता वर्ग मेट्रिक्सहरूलाई स्केलर मेट्रिक्स भनिन्छ ।

मुख्य विकर्णका सबै सदस्यहरू एउटै (बराबर) भएको विकर्ण मेट्रिक्सलाई स्केलर मेट्रिक्स भनिन्छ । माथिका मेट्रिक्सहरू स्केलर मेट्रिक्सहरू हुन् । सामान्यत: विकर्ण मेट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ मा $i \neq j$ का लागि $a_{ij} = 0$ र $i = j$ को लागि $a_{ij} = k$ हुन्छ ।

(ज) एकाइ वा एकात्मक मेट्रिक्स (Unit or Identity Matrix)

वर्ग मेट्रिक्सहरू $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ र $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ मा मुख्य विकर्णमा कस्ता सदस्यहरू छन् ?

के ती सबै बराबर छन् ? कति छन् ? मुख्य विकर्णबाहेकका सदस्यहरू कस्ता छन् ?

माथिका दुबै वर्ग मेट्रिक्सहरूमा मुख्य विकर्णहरूमा सबै सदस्यहरू 1 छ र मुख्य विकर्णबाहेकका सबै सदस्यहरू शून्य छन् । यस्ता वर्ग मेट्रिक्सहरूलाई एकाइ मेट्रिक्स (Unit or Identity Matrix) भनिन्छ ।

मुख्य विकर्णका सबै सदस्यहरू 1 भएको स्केलर मेट्रिक्सलाई एकाइ मेट्रिक्स (Unit or Identity Matrix) भनिन्छ। माथिका मेट्रिक्सहरू स्केलर मेट्रिक्सहरू हुन् । सामान्यत: विकर्ण मेट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ मा $i \neq j$ को लागि $a_{ij} = 0$ र $i = j$ को लागि $a_{ij} = 1$ हुन्छ । एकाइ मेट्रिक्सहरूलाई I ले जनाइन्छ । जस्तै 2×2 को एकाइ मेट्रिक्स $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : के सबै एकात्मक मेट्रिक्सलाई स्केलर मेट्रिक्स भन्न सकिन्छ ?

(झ) त्रिभुजाकार मेट्रिक्स (Triangular Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 8 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

यी मेट्रिक्सका विशेषताहरू खोजी गर्नुहोस् ।

यहाँ, पहिलो दुई मेट्रिक्सहरूमा मुख्य विकर्णभन्दा तलपट्टिका सदस्यहरू शून्य छन् । यसरी मुख्य विकर्णभन्दा तलपट्टिका सबै सदस्यहरू शून्य भएकाले पहिलो दुइओटा वर्गाकार मेट्रिक्सलाई माथिल्लो त्रिभुजाकार मेट्रिक्स (upper triangular matrix) भनिन्छ ।

त्यसैगरी पछिल्ला दुई मेट्रिक्सहरूमा मुख्य विर्कणभन्दा माथिका सबै सदस्यहरू शून्य छन् । यसरी मुख्य विकर्णभन्दा माथिपट्टिका सबै सदस्यहरू शून्य भएकाले पछिल्ला दुई वर्गाकार मेट्रिक्सहरूलाई तल्लो त्रिभुजाकार मेट्रिक्स (lower triangular matrix) भनिन्छ ।

यसरी माथिका सबै मेट्रिक्सहरूलाई त्रिभुजाकार मेट्रिक्स भनिन्छ ।

मुख्य विकर्णभन्दा माथि वा तलपट्टिका सबै सदस्य हरू शून्य भएको वर्गाकार मेट्रिक्सलाई त्रिभुजाकार मेट्रिक्स (Triangular Matrix) भनिन्छ । यो माथिल्लो त्रिभुजाकार मेट्रिक्स (upper triangular matrix) र तल्लो त्रिभुजाकार मेट्रिक्स (lower triangular matrix) गरी दुई प्रकारको हुन्छ । वर्ग मेट्रिक्स A, त्रिभुजाकार मेट्रिक्स भए, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ मा $i > j$ वा $i < j$ को लागि $a_{ij} = 0$ हुन्छ ।

(ञ) सममिति मेट्रिक्स (Symmetric Matrix)

वर्गाकार मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ मा पङ्क्तिमा भएका सदस्यहरूलाई लहरमा र लहरमा भएका सदस्यहरूलाई पङ्क्तिमा लेख्नुहोस् । के फरक पाउनुभयो ? के पहिलेकै मेट्रिक्स बन्यो ?

माथिको मेट्रिक्स A मा पङ्क्ति र लहर साटासाट गर्दा सोही मेट्रिक्स बन्छ । यस्तो खालको गुण भएकाले मेट्रिक्स A लाई सममिति मेट्रिक्स भनिन्छ ।

एउटा वर्गाकार मेट्रिक्समा लहर (column) लाई पङ्क्ति (row) मा र पङ्क्ति (row) लाई लहर (column) मा परिवर्तन गर्दा मेट्रिक्समा कुनै परिवर्तन नभएमा त्यस्तो मेट्रिक्सलाई सममिति मेट्रिक्स (symmetric matrix) भनिन्छ । यदि मेट्रिक्स A सममिति मेट्रिक्स भए $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ मा $i \neq j$ को लागि $a_{ij} = a_{ji}$ हुन्छ ।

(ट) बराबर मेट्रिक्सहरू (Equal Matrices)

वर्ग मेट्रिक्सहरू $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ छन् । यहाँ a_{ij} र b_{ij} हरूलाई सङ्गती सदस्यहरू भनिन्छ ।

जस्तै a_{12} र b_{12} सङ्गती सदस्यहरू हुन् । तसर्थ कुनै दुई मेट्रिक्सहरू वराबर छ छैन भनी हेर्न क्रम र सङ्गती सदस्यहरू हेर्नुपर्छ ।

र जस्तै : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -8 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -8 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ मा मेट्रिक्सहरू A र C को क्रम उही छ र सङ्गती सदस्यहरू पनि बराबर छन् त्यसैले यी दुबै मेट्रिक्सहरूलाई बराबर मेट्रिक्स भनिन्छ । यसलाई $A = C$ ले जनाइन्छ । त्यसैगरी मेट्रिक्सहरू B र D को क्रम उही छ र सङ्गती सदस्यहरू पनि बराबर छन् त्यसैले यी दुबै मेट्रिक्सहरूलाई बराबर मेट्रिक्स भनिन्छ । यसलाई $B = D$ ले जनाइन्छ ।

तर मेट्रिक्सहरू A र B को क्रम उही छैन र सङ्गती सदस्यहरू पनि बराबर छैनन् त्यसैले यी दुबै मेट्रिक्सहरूलाई बराबर मेट्रिक्स भनिदैन । यसलाई $A \neq B$ ले जनाइन्छ त्यस्तै $A \neq D$ हुन्छ ।

क्रम उही र सङ्गती सदस्यहरू पनि बराबर भएका मेट्रिक्सहरूलाई बराबर मेट्रिक्स भनिन्छ। त्यसैगरी यदि दुई मेट्रिक्सहरू बराबर भएमा तिनीहरूको क्रम र सङ्गती सदस्यहरू पनि बराबर हुन्छन् ।
जस्तै : $\begin{bmatrix} z & x \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ भए $a = 1, b = 5, x = 3$ र $z = 2$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

उदाहरणसहित विकर्ण मेट्रिक्सको परीभाषा दिनुहोस् ।

समाधान

कुनै पनि वर्ग मेट्रिक्सको मुख्य विकर्णका सदस्यहरूबाहेक अन्य सबै सदस्यहरू शून्य छन् भने त्यस्तो मेट्रिक्सलाई विकर्ण मेट्रिक्स भनिन्छ । जस्तै $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

उदाहरण 2

यदि $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & a^2 \\ 10b & 1 \end{bmatrix}$ भए a, y, a र b का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & a^2 \\ 10b & 1 \end{bmatrix}$

दुई मेट्रिक्सहरू बराबर भएकाले यिनीहरूको सङ्गती सदस्यहरू पनि बराबर हुन्छन् । त्यसैले सङ्गती सदस्यहरू तुलना गर्दा,

$x = 2$	$y = 1$	$a^2 = 4$ अथवा, $a = \pm\sqrt{4}$ अथवा, $a = \pm 2$	$10b = 5$ अथवा, $b = \frac{5}{10}$ अथवा, $b = \frac{1}{2}$

$\therefore x = 2, y = 1, a = \pm 2, b = \frac{1}{2}$

उदाहरण 3

x र y को कुन कुन मानहरूले गर्दा मेट्रिक्सहरू $\begin{bmatrix} 2x+y & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ र $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & x+y \end{bmatrix}$ बराबर हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ , $\begin{bmatrix} 2x+y & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & x+y \end{bmatrix}$

सङ्गती सदस्यहरू तुलना गर्दा,

$2x + y = 6$ … (i)

$x + y = 8$ … (ii)

माथिका दुबै समीकरणहरू हल गर्दा,

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 6 \\ \underline{-x \pm y} & = & \underline{-8} \\ x & = & -2 \end{array}$$

x को मान समीकरण (i) मा राख्दा, $y = 6 - 2x = 6 - 2\times(-2) = 6 + 4 = 10$

$\therefore x = -2, y = 10$ भएमा दुई मेट्रिक्सहरू बराबर हुन्छन् ।

अभ्यास 1.5 (B)

1. (क) यदि मेट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ भए तलका मध्ये कुन अवस्थामा A वर्ग मेट्रिक्स हुन्छ ?

   (अ) $m < n$ (आ) $m > n$

   (इ) $m = n$ (ई) कुनै पनि होइन

   (ख) उदारहणसहित तलका मेट्रिक्सहरूको परिचय दिनुहोस् :

   (अ) वर्गाकार मेट्रिक्स (आ) विकर्ण मेट्रिक्स

   (इ) स्केलर मेट्रिक्स (ई) सममिति मेट्रिक्स

   (ग) एकात्मक मेट्रिक्स र स्केलर मेट्रिक्सबिच तुलना गर्नुहोस् ।

2. दिइएका मेट्रिक्सका प्रकार लेख्नुहोस् :

   (क) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (ख) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ग) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

   (घ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (ङ) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (च) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

3. तलका प्रत्येक अवस्थामा x, y र z का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $\begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ 2y & z \end{bmatrix}$ र $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ बराबर मेट्रिक्स हुन् ।

(ख) $\begin{bmatrix} 5x-1 & 0 \\ 2y & 3z+5 \end{bmatrix}$ एउटा एकात्मक मेट्रिक्स हो ।

(ग) $\begin{bmatrix} 4 & x^2 \\ 5 & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2z-3 & 8 \end{bmatrix}$

(घ) $\begin{bmatrix} 3x+1 & 0 \\ 0 & \frac{z}{3} \end{bmatrix}$ मुख्य विकर्णमा 7 भएको स्केलर मेट्रिक्स हो ।

(ङ) $\begin{bmatrix} 5 & y+5 \\ 2y & 4 \end{bmatrix}$ एउटा सममिति मेट्रिक्स हो ।

(च) $\begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & x-y \end{bmatrix}$

(छ) $\begin{bmatrix} 2x+y & x-3y \\ 2 & 2z-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 2 & 5z+3 \end{bmatrix}$

(ज) $\begin{bmatrix} Sinx & Cosy \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & tanz \end{bmatrix}$ जहाँ $0 \le x, y, z \le 90^\circ$

4. यदि $\begin{bmatrix} a-b & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & ab \end{bmatrix}$ भए a र b को सम्भावित मानहरू कति कति होलान् ।

5. यदि मेट्रिक्स A मा पङ्क्तिको सङ्ख्या $(2x-3)$ र लहरको सङ्ख्या $(y + 5)$ छ त्यसैगरी मेट्रिक्स B मा पङ्क्तिको सङ्ख्या $(x + 2)$ र लहरको सङ्ख्या $(3y - 1)$ छ । यदि A र B बराबर मेट्रिक्सहरू भए मेट्रिक्स A को क्रम पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 2.(क) स्केलर मेट्रिक्स (ख) एकाइ मेट्रिक्स
(ग) तल्लो त्रिभुजाकार मेट्रिक्स (घ) पङ्क्ति मेट्रिक्स (ङ) सममिति मेट्रिक्स (च) विकर्ण मेट्रिक्स

3. (क) $x = 8, y = 5, z = 5$ (ख) $x = \frac{2}{5}, y = 0, z = \frac{-4}{3}$ (ग) $x = \pm 4, y = \pm 2, z = 4$
(घ) $x = 2, z = 21$ (ङ) $y = 5$ (च) $x = 4, y = 0$ (छ) $x = 6, y = -2, z = -3$
(ज) $x = 30^\circ, y = 0^\circ, z = 45^\circ$

4. $a = 4, b = 2$ अथवा $a = -2, b = -4$ 5. 7×8

1.5.2 मेट्रिक्सका क्रियाहरू (Operations On Matrix)

मेट्रिक्सहरूको जोड (Addition of Matrices)

क्रियाकलाप 1

कुनै दुईओटा पसलमा गत हप्ता आइतबारदेखि मङ्गलबारसम्म बिक्री भएका आलु, गोलभैँडा र काउलीका परिमाणहरू (kg) तल तालिकामा उल्लेख गरिएको छ :

पहिलो पसल

दिन / परिमाण	आलु	गोलभैँडा	काउली
आइतबार	3	4	6
सोमबार	5	7	10
मङ्गलबार	8	5	11

दोस्रो पसल

दिन / परिमाण	आलु	गोलभैँडा	काउली
आइतबार	5	7	3
सोमबार	4	6	5
मङ्गलबार	7	3	10

माथिका दुई तालिकाहरू अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूका उत्तर लेख्नुहोस् :

(क) आइतबार दुईओटा पसलमा गरी जम्मा कति के.जी (kg) आलु बिक्री भयो होला ?

(ख) मङ्गलबार दुईओटा पसलमा गरी जम्मा कति के.जी. (kg) काउली बिक्री भयो होला ?

(ग) आइतबारदेखि मङ्गलबारसम्म दुईओटै पसलमा गरी प्रत्येक तरकारीहरू कति कति के.जी. बिक्री भयो ?

उपर्युक्त छलफलका आधारमा पहिलो पसल र दोस्रो पसलका प्रत्येक तरकारीको बिक्री परिमाणलाई मेट्रिक्सद्वारा निम्नानुसार राख्न सकिन्छ :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

अब मेट्रिक्स जोडको स्वरूपअनुसार मेट्रिक्स A र B लाई आपसमा जोड्दा

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3 & 7+4 & 3+6 \\ 4+5 & 6+7 & 5+10 \\ 7+8 & 3+5 & 10+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 9 & 13 & 15 \\ 15 & 8 & 21 \end{bmatrix}$$

आइतबारदेखि मङ्गलबारसम्म आलु क्रमश: 8 kg, 9 kg र 15 kg , गालभैँडा क्रमश : 11 kg, 13 kg र 8 kg त्यसैगरी काउली क्रमश: 9 kg, 15 kg र 21 kg बिक्री भयो ।

समान क्रम भएका मेट्रिक्सहरू मात्र जोड्न र घटाउन सकिन्छ । यसरी मेट्रिक्सहरू जोड गर्दा समान स्थानका सदस्यहरू अर्थात् सङ्गती सदस्यहरू जोड्नुपर्छ । मेट्रिक्सहरूको घटाउमा पनि जोडको जस्तै प्रक्रिया अपनाइन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ भए A + B तथा A – B पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,
$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0+2 & -5+6 & 2+1 \\ 1+7 & 5+3 & 3+0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0-2 & -5-6 & 2-1 \\ 1-7 & 5-3 & 3-0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & -11 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.5.3 मेट्रिक्स जोडका गुणहरू (Properties of Matrix Addition)

(क) बन्दी नियम (Closure Property)

तलको उदाहरण अध्ययन गर्नुहोस् :

यदि $P = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ भए P + Q कस्तो मेट्रिक्स बन्ला ? के P, Q र P + Q का क्रमहरू एउटै होलान् ?

यहाँ, $P = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ र $P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 5+3 \\ 2+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

मेट्रिक्स P र Q को क्रम 2×2 हुँदा तिनीहरूको योगफल P + Q पनि एउटा मेट्रिक्स नै हो जसको क्रम पनि 2×2 छ ।

दुईओटा समान क्रमका मेट्रिक्सहरूको योगफल पनि उही क्रमको मेट्रिक्स नै हुन्छ । मेट्रिक्स जोडको यो गुणलाई बन्दी गुण (closure property) भनिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : के मेट्रिक्सहरूको घटाउमा पनि बन्दी नियम मान्य हुन्छ ? उदाहरणसहित परीक्षण गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

(ख) क्रम विनियम गुण (Commutative Property)

कुनै दुई मेट्रिक्सहरू लिऔँ, जस्तै : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

A + B र B + A निकाल्दा के एउटै नतिजा आउँछ ?

$$A + B = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2 & 1+0\\2+1 & 3+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 7\end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+1 & 0+1\\1+2 & 4+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 7\end{bmatrix}$$

यसरी, A + B = B + A भयो । तसर्थ जुनसुकै मेट्रिक्सहरूमा A + B = B + A हुन्छ । मेट्रिक्स जोडको यस्तो गुणलाई क्रम विनियम गुण (Commutative Property) भनिन्छ ।

जुनसुकै समानक्रमका मेट्रिक्सहरू A र B मा A + B = B + A हुन्छ । मेट्रिक्स जोडको यस्तो गुणलाई क्रम विनियम गुण (Commutative Property) भनिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : के मेट्रिक्सहरूको घटाउमा पनि क्रमविनिमय नियम मान्य हुन्छ ? उदाहरणसहित परीक्षण गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

(ग) सङ्घीय गुण (Associative Property)

मानौँ, मेट्रिक्सहरू $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$ र $C = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ छ ।

(A + B) + C र A + (B + C) निकाल्दा,

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 1\\5 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 2\\5 & 5\end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 2\\5 & 5\end{bmatrix}$$

$\therefore$ (A + B)+ C = A + (B + C)

अतः मेट्रिक्सहरूको जोडमा सङ्घीय गुण हुन्छ ।

कुनै तीनओटा समानक्रमका मेट्रिक्सहरू A, B र C मा (A + B) + C = A + (B + C) हुन्छ अर्थात् पहिला A र B योगफलमा C लाई जोडी आउने योगफल र A मा B र C को योगफल लाई जोड्दा आउने योगफल सधैँ बराबर हुन्छ । मेट्रिक्स जोडको यस्तो गुणलाई सङ्घीय गुण (Associative property) भनिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : के मेट्रिक्सहरूको घटाउमा पनि सङ्घीय नियम मान्य हुन्छ ? उदाहरणसहित परीक्षण गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

(घ) एकात्मक गुण (Existence of Additive Identity)

मानौँ $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$ र $O = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ छ ।

अब,

$$A + O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 2+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$O + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0+1 & 0+1 \\ 0+2 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

यसरी माथिको मेट्रिक्स A को लागि, $A + O = O + A = A$ हुने गरी जहिले पनि सोही क्रमको एउटा शून्य मेट्रिक्स पाइन्छ । यस्तो खालको मेट्रिक्स जोडको गुणलाई एकात्मक गुण (Existence of additive identity) भनिन्छ ।

कुनै पनि मेट्रिक्स A को लागि, $A + O = O + A = A$ हुने गरी जहिले पनि सोही क्रमको एउटा शून्य मेट्रिक्स पाइन्छ । मेट्रिक्स जोडको यस्तो गुणलाई एकात्मक गुण (Existence of additive identity) भनिन्छ ।

(ङ) जोडको विपरीत नियम (Existence of Additive Inverse)

एउटा मेट्रिक्स लिऔँ, $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, के मेट्रिक्स A सँग जोड गर्दा शून्य मेट्रिक्स आउने गरी अर्को समान क्रमको मेट्रिक्स पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

अवश्य सकिन्छ जस्तै अर्को एउटा मेट्रिक्स $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ लिऔँ

अब, $A + B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

$$B + A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

यसरी $A + B = B + A = O$ (शून्य मेट्रिक्स)

माथिका दुई मेट्रिक्सहरू जोड गर्दा शून्य मेट्रिक्स आएकाले माथिका दुई मेट्रिक्सहरूलाई एकअर्काको विपरीत मेट्रिक्स भनिन्छ ।

कुनै पनि मेट्रिक्स A को लागि, $A + B = B + A = O$ (शून्य मेट्रिक्स) हुने गरी अर्को समान क्रमको मेट्रिक्स $B = -A$ भेटिन्छ । मेट्रिक्स जोडको यो गुणलाई विपरीत गुण (Existence of additive inverse) भनिन्छ । यस्तो अवस्थामा A र B लाई एकअर्काको विपरीत मेट्रिक्स भनिन्छ । अर्थात्, कुनै पनि मेट्रिक्स A को विपरीत मेट्रिक्स सोही क्रमको अर्को मेट्रिक्स $-A$ हुन्छ ।

1.5.4 मेट्रिक्सको स्केलर गुणन (Scalar Multiplication of Matrix)

मेट्रिक्स A लाई कुनै स्केलर k ले गुणन गर्दा A को सबै सदस्यहरूलाई k ले गुणन गर्नुपर्छ ।

जस्तै : यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ भए $kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ भए 3A को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ दिइएको मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

अब, $3A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 3 \\ 3\times 4 & 3\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore 3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

उदाहरण 2

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} x & 2y \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ छ र A + B समान क्रमको एउटा शून्य मेट्रिक्स भए x र y को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ A + B एउटा शून्य मेट्रिक्स भएकाले

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 2y \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} 1+x & 3+2y \\ -9+9 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} 1+x & 3+2y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

अब, सङ्गती मानहरू बराबर गर्दा,

$1 + x = 0$, $x = -1$, त्यसैगरी, $3 + 2y = 0$, अथवा, $2y = -3$ अथवा, $y = \frac{-3}{2}$

अभ्यास 1.5 (C)

1. मेट्रिक्सको जोड र घटाउका पूर्व सर्तहरू के के हुन् ? लेख्नुहोस् ।
2. (क) मेट्रिक्स जोडका गुणहरू के के हुन्, लेख्नुहोस् ।

   (ख) यदि A र B समान क्रमका मेट्रिक्सहरू छन् । A + B = B + A लाई मेट्रिक्स जोडको कुन गुण भनिन्छ ? लेख्नुहोस् ।

   (ग) मेट्रिक्स जोडको सङ्घीय गुण लेख्नुहोस् ।
3. तलका कुन कुन मेट्रिक्सहरू जोड गर्न सकिन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस्:

   (क) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (ख) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (ग) $Q = [1 \quad 2 \quad -2]$

   (घ) $R = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (ङ) $X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

4. यदि $X=\begin{bmatrix}4 & 6\\8 & 0\end{bmatrix}$ र $Y=\begin{bmatrix}1 & 5\\7 & 0\end{bmatrix}$ भए तलको मेट्रिक्सहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $X+Y$ (ख) $X-Y$ (ग) $2X+3Y$ (घ) $\frac{1}{2}X-2Y$

5 (क) यदि $X=\begin{bmatrix}-2 & 2\\8 & 6\end{bmatrix}$ र $Y=\begin{bmatrix}-4 & -5\\7 & 0\end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स जोडको क्रमविनिमय गुणको परीक्षण गरी प्रमाणित गर्नुहोस् । के मेट्रिक्सहरूबिचको घटाउमा पनि क्रमविनिमय गुण मान्य हुन्छ ? परीक्षण गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि $P=\begin{bmatrix}4 & 2\\8 & 6\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}4 & 5\\6 & 1\end{bmatrix}$ र $R=\begin{bmatrix}4 & 8\\3 & 0\end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स जोडको सङ्घीय गुणको परीक्षण गरी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ग) यदि $M=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$ भए तलको कथनहरू प्रमाणित गर्नुहोस् :

(अ) $M+H=H+M$ (आ) $(M+H)+N=M+(H+N)$

(इ) $M+(-M)=O$ (O एउटा समान क्रम भएको शून्य मेट्रिक्स हो ।)

6. तलको प्रत्येक अवस्थामा x र y को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\begin{bmatrix}1 & 4x\\0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 8\\4 & 3y\end{bmatrix}$

(ख) $\begin{bmatrix}1 & 3x\\0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\0 & y\end{bmatrix}=$ I एउटा 2×2 क्रमको एकात्मक मेट्रिक्स हो ।

(ग) यदि मेट्रिक्स $\begin{bmatrix}x+5 & 2\\0 & 2y-3\end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{bmatrix}4 & 2\\0 & -7\end{bmatrix}$ हो ।

(घ) $2\begin{bmatrix}5 & 4x\\7 & y-3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}4 & 1\\-2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 8\\4 & 3y\end{bmatrix}$

(ङ) $2\begin{bmatrix}3x & 0\\0 & y-3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$ एउटा समान क्रमको शुन्य मेट्रिक्स हो ।

7. (क) यदि $P=\begin{bmatrix}3 & 0\\4 & -2\end{bmatrix}$ र $3P+X=\begin{bmatrix}8 & 6\\9 & 6\end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स X पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -2\end{bmatrix}$ र $R=\begin{bmatrix}4 & 8\\3 & 0\end{bmatrix}$ भए $2P-3X=3R$ हुने गरी मेट्रिक्स X पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. यदि मेट्रिक्स $P+Q=\begin{bmatrix}5 & 0\\3 & -2\end{bmatrix}$ र $P-Q=\begin{bmatrix}8 & 4\\2 & 6\end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्सहरू P र Q पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. यदि मेट्रिक्स $X=\begin{bmatrix}-3 & -1\\6 & 7\end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स X को विपरीत मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. समान क्रम
2. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) क्रमविनिमय गुण

   (ग) यदि A, B र C समान क्रमको मेट्रिक्स हो, जसमा $(A+B)+C=A+(B+C)$ लाई सङ्घीय गुण भनिन्छ ।
3. समान क्रम भएकाले मेट्रिक्स A र X, मेट्रिक्स P र R
4. (क) $X+Y=\begin{bmatrix}5 & 11\\15 & 0\end{bmatrix}$ (ख) $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (ग) $2X+3Y=\begin{bmatrix}11 & 27\\37 & 0\end{bmatrix}$ (घ) $\frac{1}{2}X-2Y=\begin{bmatrix}0 & -7\\-10 & 0\end{bmatrix}$
5. (क) मेट्रिक्सहरूबिचको घटाउमा क्रमविनिमय गुण मान्य हुँदैन । (ख) र (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
6. (क) $x=\frac{3}{2}, y=3$ (ख) $x=\frac{-2}{3}, y=-2,$ (ग) $x=-9, y=5$ (घ) $x=\frac{5}{8}, y=12$ (ङ) $x=-2, y=-6$
7. (क) $X=\begin{bmatrix}-1 & 6\\-3 & 12\end{bmatrix}$ (ख) $X=\begin{bmatrix}\frac{-10}{3} & -8\\-3 & \frac{-4}{3}\end{bmatrix}$ 8. $P=\begin{bmatrix}\frac{13}{2} & 2\\\frac{5}{2} & 2\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}\frac{-3}{2} & -2\\\frac{1}{2} & -4\end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix}3 & 1\\-6 & -7\end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, एकात्मक मेट्रिक्स

परियोजना कार्य

1. 5/5 जनाको समूह बनाई नजिकैका दुईओटा स्टेसनरी पसलमा जानुहोस् । एकै किसिमको कुनै 5 ओटा स्टेसनरी सामग्रीहरूको मौज्दात सङ्ख्यालाई मेट्रिक्सका रूपमा लेखी दुबै स्टेसनरी पसलका सो सामग्रीहरूको जम्मा मौज्दात सङ्ख्या र सोही दिन बिक्रीपछि बाँकी रहेका सामग्रीहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउन प्रयोग हुने मेट्रिक्सका क्रियाहरू लेख्नुहोस् । सोही क्रियाद्वारा बाँकी मौज्दात पत्ता लगाई प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
2. 5/5 जनाको समूह बनाई विद्यालयको चमेनागृहमा जानुहोस् । कुनै तीन दिनको लगातार खेर गएका खानाहरू (खाना, तरकारी तथा अन्य) अलग अलग परिमाणहरू (kg) को तथ्याङ्क सङ्कलन गर्नुहोस् । ती तथ्याङ्कलाई मेट्रिक्सको स्वरूपमा लेखी प्रत्येक दिन जम्मा कति परिमाणमा खाना खेर गए मेट्रिक्सको क्रिया गरी पत्ता लगाउनुहोस् । तोकिएको ढाँचामा प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
3. प्रत्येक विद्यार्थीले आफ्नो घरमा उपलब्ध भएको मोबाइल वा कम्प्युटरको इन्टरनेट ब्राउजर (जस्तै : Google, Chrome, Firefox, Internet Explorer etc.) खोली मेट्रिक्सको कुनै पाँचओटा प्रयोगहरू खोजी गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

पाठ 2

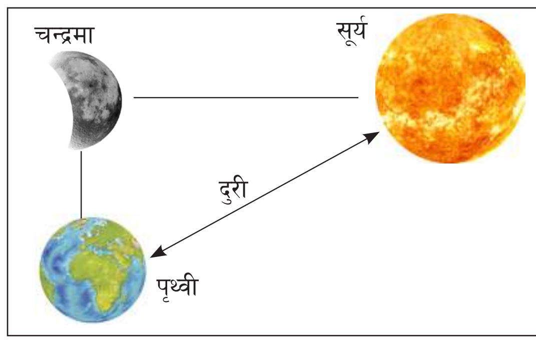
त्रिकोणमिति
(Trigonometry)

2.1 परिचय

त्रिभुजका तीनओटा कोण र भुजाहरूको मापनमा आधारित गणितको एउटा विधा त्रिकोणमिति हो । हिप्पार्कस (Hipparchus) लाई त्रिकोणमितिका पिता भनि चिनिन्छ किनभने उनले नै त्रिकोणमितीय तालिका सङ्कलन गरेका थिए ।

त्रिकोणमितिको प्रयोग खगोल विज्ञान र भूगोलमा सुरु भएको पाइन्छ र आजभोलि भौतिक विज्ञान, इन्जिनियरिङ क्षेत्रमा अत्यधिक भएको पाइन्छ । उदाहरणका लागि अग्ला भवन र पहाडहरूको उचाइको नाप लिन, पुल निर्माणको सर्भे गर्न, सडक निर्माण आदिको सर्भे गर्न जस्ता कार्यहरूमा त्रिकोणमितिको प्रयोग भइरहेको छ ।

यो पहाडमा चढेर पहाडको उचाइ नाप्न सकिँदैन । पहाडको उचाइ कसरी पत्ता लगाउने होला ?



पृथ्वीदेखि सूर्य र चन्द्रसम्मको दुरी कसरी पत्ता लगाउने होला ?

2.1.1 कोणिक नाप (Measurement of Angles)

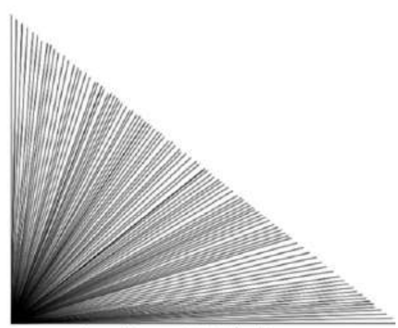
(क) षट्दशांशक पद्धति (Sexagesimal System)

यस पद्धतिमा कोणलाई डिग्री (°) एकाइमा नापिन्छ । परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखासँग एक फन्को लगाउँदा 360° को कोण बन्छ र एक समकोणमा 90° हुन्छ । प्रत्येक 1° लाई 60 मिनेट र 1 मिनेटलाई 60 सेकेन्डमा विभाजन गरिएको हुन्छ ।

सम्बन्ध : 1 समकोण . 90° (डिग्री)

1° (डिग्री) = 60' (मिनेट)

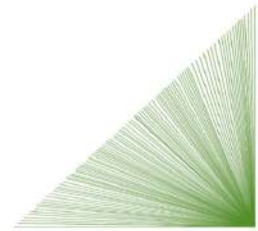
1' (मिनेट) = 60" (सेकेन्ड)



1समकोण = 90° (डिग्री)

(ख) शतांशक पद्धति (Centesimal System)

यस पद्धतिमा कोणलाई ग्रेड (^{g}) एकाइमा नापिन्छ । परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखासँग एक फन्को परिक्रमण गर्दा 400^g को कोण बन्छ र 1 समकोणमा 100^g हुन्छ । प्रत्येक 1^g लाई 100 मिनेट र प्रत्येक 1 मिनेटलाई 100 सेकेन्डमा विभाजन गरिएको हुन्छ ।



1 समकोण = 100^g (ग्रेड)

1 समकोण = 100^g (ग्रेड)

1^g (ग्रेड) = 100'(मिनेट)

1' (मिनेट) = 100"(सेकेन्ड)

उदाहरण 1

(क) 60°15' 30" लाई षट्दशांशक पद्धतिको सेकेन्डमा बदल्नुहोस् ।

(ख) 20° 10' 12" लाई डिग्रीमा बदल्नुहोस् ।

समाधान

(क) यहाँ, 60°15 30" = (60 × 60 × 60 + 15 × 60 + 30)"
= (216000 + 900 + 30)" = 216930"

(ख) 20°10'12"

$$= \left(20 + \frac{10}{60} + \frac{12}{60 \times 60}\right)^\circ = \left(20 + \frac{1}{6} + \frac{1}{300}\right)^\circ$$

$$= \left(\frac{20 \times 300 + 50 + 1}{300}\right)^\circ = \left(\frac{6000 + 50 + 1}{300}\right)^\circ = \left(\frac{6051}{300}\right)^\circ = 20.17^\circ$$

उदाहरण 2

(क) शतांशक पद्धतिको सेकेन्डमा बदल्नुहोस् : 27^g 50' 60"

(ख) ग्रेडमा बदल्नुहोस् : 45^g 40' 90"

समाधान

(क) 27^g 50' 60" = (27 × 100 × 100 + 50 ×100 + 60)" = (270000 + 5000 + 60)" = 275060"

(ख) 45^g 40' 90"

$$= \left(45 + \frac{40}{100} + \frac{90}{100 \times 100}\right)^g$$

$$= \left(45 + \frac{4}{10} + \frac{9}{1000}\right)^g = \left(\frac{45000 + 400 + 9}{1000}\right)^g = \left(\frac{45409}{1000}\right)^g = 45.409^g$$

2.1.2 षट्दशांशक र शतांशक पद्धतिबाट एकअर्को पद्धतिमा रूपान्तरण (Conversion of System of Sexagesimal and Centesimal to each other System)

षट्दशांशक र शतांशक पद्धतिबिचको रूपान्तरण निम्नअनुसार गर्न सकिन्छ :

षट्दशांशक पद्धतिबाट शतांशक पद्धतिमा परिवर्तन गर्ने तरिका	शतांशक पद्धतिबाट षट्दशांशक पद्धतिमा परिवर्तन गर्ने तरिका
हामीलाई थाहा छ, 1 समकोण $= 90°$ (डिग्रीमा) 1 समकोण $= 100^g$ (ग्रेडमा) अतः $90° = 100^g$ $1° = \left(\frac{100}{90}\right)^g = \left(\frac{10}{9}\right)^g$ अतः कुनै कोणको डिग्री मान $D°$ छ भने, $D° = \left(\frac{10}{9} \times D\right)^g$	हामीलाई थाहा छ, 1 समकोण $= 90°$ (डिग्रीमा) 1 समकोण $= 100^g$ (ग्रेडमा) अतः $100^g = 90°$ $1^g = \left(\frac{90}{100}\right)^\circ = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$ अतः कुनै कोणको ग्रेड मान G^g छ भने, $G^g = \left(\frac{10}{9} \times G\right)^\circ$

उदाहरण 3

षट्दशांशक पद्धतिमा दिइएको कोण $81°$ लाई शतांशक पद्धति (ग्रेड) मा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको कोण $= 81°$

हामीलाइ थाहा छ, $1° = \left(\frac{10}{9}\right)^g$

अब, $81° = \left(\frac{10}{9} \times 81\right)^g = (10 \times 9)^g = 90^g$

अतः $81° = 90^g$

उदाहरण 4

शतांशक पद्धतिमा दिइएको कोण 60^g लाई षट्दशांशक पद्धतिमा (डिग्री) मा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको कोण $= 60^g$

हामीलाई थाहा छ, $1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$

अब, $60^g = \left(\frac{9}{10} \times 60\right)^\circ = (9 \times 6)^\circ = 54^\circ$

अतः $60^g = 54^\circ$

उदाहरण 5

दिइएको कोण 64°51'45" लाई शतांशक (ग्रेड) पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको कोण = 64°51'45"

अब, $64°51'45" = 64° + \left(\frac{51}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{45}{60 \times 60}\right)^{\circ}$

$= 64° + 0.85° + 0.0125°$

$= 64.8625°$

अब ग्रेडमा बदल्दा, हामीलाई थाहा छ, $1° = \left(\frac{10}{9}\right)^{g}$

त्यसैले, $64.8625° = \left(\frac{10}{9} \times 64.8625°\right)^{g}$

$= 72.06944^{g}$

$= 72^{g}\ (0.06944 \times 100)' = 72^{g}\ 6.944'$

$= 72^{g}\ 6'\ (0.944 \times 100)"$

$= 72^{g}\ 6'\ 94.4"$

अतः $64°51'45" = 72^{g}\ 6'\ 94"$

उदाहरण 6

दिइएको कोण 56^{g} 87' 50" लाई षट्दशांशक (डिग्री) पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, दिइएको कोण = 56^{g} 87' 50"

अब, $56^{g}\ 87'\ 50" = 56^{g} + \left(\frac{87}{100}\right)^{g} + \left(\frac{50}{100 \times 100}\right)^{g}$

$= 56^{g} + 0.87^{g} + 0.005^{g}$

$= 56.875^{g}$

अब, ग्रेडलाई डिग्रीमा बदल्दा, $1^{g} = \left(\frac{9}{10}\right)^{\circ}$

त्यसैले, $56.875^{g} = \left(\frac{9}{10} \times 56.875\right)^{\circ}$

$= 51.1875°$

$= 51°(0.1875 \times 60)'$

$= 51°\ 11'\ (0.25 \times 60)"$

$= 51°\ 11'\ 15"$

अतः $56^{g}\ 87'\ 50" = 51°\ 11'\ 15"$

उदाहरण 7

दुई कोणहरूको योग $100°$ र फरक 20^g भए तिनीहरूको नाप डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, आवश्यक कोणहरूको मान x र y मानौँ ।

हामीलाई थाहा छ, $1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$

$20^g = \left(\frac{9}{10} \times 20\right)^\circ = 18°$

पहिलो सर्तअनुसार, $x + y = 100°$

अथवा, $x = 100° - y$ ....(i)

दोस्रो सर्तअनुसार, $x - y = 18°$ $\{\because 20^g = 18°$ हुने भएकाले$\}$

अथवा, $x = 18° + y$ ....(ii)

अब, समीकरण (i) को x को मान समीकरण (ii) मा राख्दा

अथवा, $100° - y = 18° + y$

अथवा, $100° - 18° = y + y$

अथवा, $2y = 82°$

अथवा, $y = \frac{82°}{2}$

अथवा, $y = 41°$

फेरि, y को मान समीकरण (i) मा राख्दा

अथवा, $x = 100° - 41°$

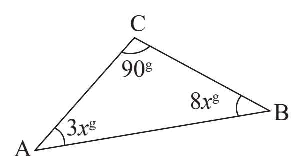
अथवा, $x = 59°$

अतः आवश्यक कोणहरू $41°$ र $59°$ हुन् ।

उदाहरण 8

त्रिभुजका दुई कोणहरू 3:8 को अनुपातमा छन् र तेस्रो कोण $81°$ छ । त्रिभुजका सबै कोणहरूलाई ग्रेडमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान



यहाँ, त्रिभुज ABC मा,

मानौँ, त्रिभुजको पहिलो कोण $(\angle A) = (3x)^g$

त्रिभुजको दोस्रो कोण $(\angle B) = (8x)^g$

त्रिभुजको तेस्रो कोण $(\angle C) = 81° = \left(\frac{10}{9} \times 81\right)^g = 90^g$

हामीलाई थाहा छ, त्रिभुज ABC मा

अथवा, $3x + 8x + 90^g = 200^g$

अथवा, $11x = 200^g - 90^g$

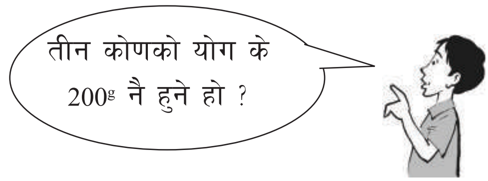
अथवा, $11x = 110^g$

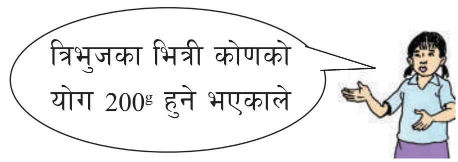
अथवा, $x = \frac{110^g}{11} = 10^g$

अतः त्रिभुजको पहिलो कोण $= 3 \times 10^g = 30^g$

त्रिभुजको दोस्रो कोण $= 8 \times 10^g = 80^g$

त्रिभुजको तेस्रो कोण $= 90^g$





अभ्यास 2.1 (A)

1. खाली ठाउँ भर्नुहोस् ।

   (क) 1 समकोण = ... (डिग्री) (ख) 1 समकोण = ... (ग्रेड)

   (ग) 2 समकोण = ... (ग्रेड) (घ) 200^g = ... (डिग्री)

   (ङ) $1^\circ = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^g$ (च) $1^g = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^\circ$

2. षट्दशांशक पद्धतिको सेकेन्डमा बदल्नुहोस् :

   (क) 35' (ख) 50' 40" (ग) 30° 40' 50"

   (घ) 55° 30' 10" (ङ) 10° 25' 48" (च) 55° 56' 28"

3. षट्दशांशक पद्धति (sexagesimal system) र शतांशक पद्धति (centesimal system) लाई परिभाषित गर्दै सोको प्रयोग कहाँ गरिन्छ । रूपान्तरण कसरी गरिन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

4. षट्दशांशक (डिग्री) पद्धतिमा बदल्नुहोस् :

   (क) 30^g 20' 10" (ख) 25^g 15' 10" (ग) 45^g 35' 25"

   (घ) 30^g 12' (ङ) 26^g 15" (च) 47^g 48' 49"

5. शतांशक (ग्रेड) पद्धतिमा बदल्नुहोस् :

   (क) 25° 45' 30" (ख) 30° 15' 15" (ग) 49° 50' 25"

   (घ) 44° 35' 25" (ङ) 80° 50' 20" (च) 76° 26' 33"

6. डिग्रीमा बदल्नुहोस् :

   (क) 50^g (ख) 80^g (ग) 130^g (घ) 160^g (ङ) 70^g (च) 250^g

7. ग्रेडमा बदल्नुहोस् :

   (क) 50^g 40' 8" (ख) 40^g 32' 33" (ग) 56^g 85' 50"

   (घ) 45^g 35" (ङ) 37^g 50' (च) 98^g 42' 37"

8. ग्रेडमा बदल्नुहोस् :

(क) 45° (ख) 270° (ग) 18° (घ) 36° (ङ) 108° (च) 54°

9. कुनै समकोण त्रिभुजको एउटा कोण 60° छ ।

(क) एउटा कोण कति डिग्री भएको त्रिभुजलाई समकोण त्रिभुज भनिन्छ ? लेख्नुहोस् ।

(ख) समकोण त्रिभुजमा सबभन्दा ठुलो कोण कति ग्रेडको हुनुपर्छ ? लेख्नुहोस् ।

(ग) बाँकी कोणको नाप डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. त्रिभुजका तीन भित्री कोणहरू 1 : 2 : 3 को अनुपातमा छन् । त्रिभुजका प्रत्येक कोणहरू डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. एउटा त्रिभुजका तीनओटा कोणहरूको नापको अनुपात 2 : 3 : 4 छ ।

(क) तिनीहरूको मान डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) तिनीहरूको मान ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. एउटा त्रिभुजका कोणहरूको अनुपात 5 : 7 : 8 छ ।

(क) तिनीहरूको मान डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

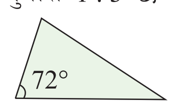
(ख) तिनीहरूको मान ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. चतुर्भुजका चार भित्री कोणहरूको अनुपात 3 : 4 : 5 :6 छ ।

(क) तिनीहरूको नाप डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सबैभन्दा सानो कोण र सबैभन्दा ठुलो कोणलाई ग्रेडमा परिवर्तन गरी तिनीहरूको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. सँगै दिइएको त्रिभुजमा एउटा कोण 72° छ । बाँकी दुई कोणहरूको अनुपात 1 : 3 छ ।



(क) बाँकी दुई कोणहरूको नाप डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) त्रिभुजका सबै कोणहरूको नाप ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) बाँकी दुई कोणहरूको अनुपात 1:5 हुनका लागि उक्त कोणहरूको डिग्री नाप कति कति हुनुपर्छ ?

15. त्रिभुजका दुई कोणहरू 3: 4 को अनुपातमा छन् र तेस्रो कोण 60^g छ ।

(क) 60^g बराबर कति डिग्री हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) त्रिभुजका तीनै कोणहरूको डिग्री मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) कोणका आधारमा सो त्रिभुज कस्तो प्रकारको त्रिभुज हो, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

16. एउटा समकोण त्रिभुजको एउटा न्यूनकोण एक समकोणको $\frac{3}{10}$ भाग छ ।

(क) एक समकोण बराबर कति डिग्री हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) एक समकोणको $\frac{3}{10}$ भाग भन्नाले कति डिग्री बुझिन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ग) अर्को न्यूनकोण कति ग्रेड होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

17. दुई कोणहरूको योग 100° र ती कोणहरूको फरक 20^g छ भने,

(क) 1 डिग्री बराबर कति ग्रेड हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) दुई कोणहरूको डिग्री मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त कोणहरू ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

18. दुई कोणहरूको योग 45° र ती कोणहरूको फरक 30^g छ ।

(क) 1 ग्रेड बराबर कति डिग्री हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) दुई कोणहरूको डिग्री मान कति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त कोणहरू ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 90° (ख) 100^g (ग) 200^g (घ) 180° (ङ) $\left(\frac{10}{9}\right)^g$ (च) $\left(\frac{9}{10}\right)^\circ$

2. (क) 2100" (ख) 3040" (ग) 110450" (घ) 19810" (ङ) 37548" (च) 201388"

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 4. (क) 27°10'51.24" (ख) 22°38'9.24" (ग) 40°49'21"

(घ) 27°6'28.8" (ङ) 23°24'48.6" (च) 42°44'11.07" 5. (क) $28^g62'37.03"$ (ख) $33^g61'57.40"$

(ग) $55^g37'80.86"$ (घ) $49^g54'47.53"$ (ङ) $89^g82'98.76"$ (च) $84^g93'61.11"$ 6. (क) 45°

(ख) 72° (ग) 117° (घ) 144° (ङ) 63° (च) 225° 7.(क) 50.4^g (ख) 40.32^g

(ग) 56.85^g (घ) 45.0035^g (ङ) 37.5^g (च) 98.42^g 8.(क) 50^g (ख) 300^g

(ग) 20^g (घ) 40^g (ङ) 120^g (च) 60^g 9. (क) 90° (ख) 100^g

(ग) 30° 10. 30°, 60°,90° 11. (क) 40°, 60°, 80° (ख) 44.44^g, 66.66^g, 88.88^g

12. (क) 45°, 63°, 72° (ख) 50^g, 70^g, 80^g 13.(क) 60°, 80°, 100°, 120° (ख) $\left(\frac{600}{9}\right)^g$

14. (क) 27°, 81° (ख) 30^g, 80^g, 90^g (ग) 18°, 90° 15. (क) 54° (ख) 54°, 54°, 72°

(ग) समद्विबाहु 16. (क) 90° (ख) 27° (ग) 70^g 17. (क) $\left(\frac{10}{9}\right)^g$

(ख) 41°, 59° (ग) $\left(\frac{590}{9}\right)^g$, $\left(\frac{410}{9}\right)^g$ 18. (क) $\left(\frac{9}{10}\right)^\circ$ (ख) 9°, 36° (ग) 10^g, 40^g

2.1.3 वृत्तीय नाप पद्धति (System of Circular Measure)

रेडियन (1^c) कोणको रचना

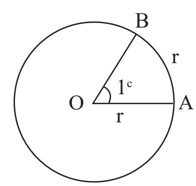
क्रियाकलाप 1

उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् । अर्धव्यास 3 cm भन्दा बढी लिइ केन्द्रविन्दु O भएको एउटा वृत्त खिच्नुहोस् । वृत्तको केन्द्रविन्दु O बाट परिधिको विन्दु A लिई अर्धव्यास खिच्नुहोस् । अर्धव्याससँग बराबर हुने चाप लिनुहोस् । अर्धव्यासले परिधिमा छोएको विन्दु A बाट सोही चापले परिधिको अर्को विन्दु B मा काट्नुहोस् । काटिएको सो विन्दु B र केन्द्रविन्दु O जोड्नुहोस् । अब यसरी वृत्तको केन्द्रमा बनेको कोण AOB को मान डिग्रीमा कति हुन्छ ? यो कोणलाई (1^c) रेडियन भनिन्छ ।

वृत्तीय नाप कोण नाप्ने मानक पद्धति हो । यस पद्धतिमा कोणलाई रेडियन (radian) (^{c}) एकाइमा नापिन्छ । (1^c) रेडियनको कोण भनेको वृत्तको केन्द्रमा वृत्तको अर्धव्यास बराबरको चापले बनाएको कोण हो ।

रेडियन कोणको प्रामाणिक एकाइ (standard unit) हो । दिइएको वृत्तमा केन्द्रविन्दु O र अर्धव्यास OA = r भएको एउटा वृत्त छ । जहाँ अर्धव्यास OA सँग बराबर भएको चाप AB छ । त्यसैले,

$OA = \overset{\frown}{AB} = r$



अत: $\angle AOB = 1^c$ हुन्छ ।

परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखासँग 1 फन्को लगाउँदा $2\pi^c$ को कोण बन्छ । त्यस्तै वृत्तको केन्द्रमा बन्ने पूरा कोण पनि $2\pi^c$ हुन्छ ।

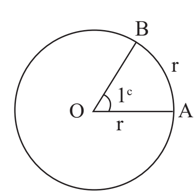
2.1.4 रेडियन नाप पद्धतिमा साध्य (Theorem on System of Radian Measure)

वृत्तीय नाप पद्धतिमा विश्वव्यापी रूपमा मानिँदै आएका केही सिद्धान्तहरू छन् । तिनीहरूलाई साध्यका रूपमा प्रमाणित गरिएको छ ।

साध्य 1 "रेडियन एउटा अचल कोण हो । (Radian is a constant angle)"

प्रमाण: केन्द्रविन्दु O र अर्धव्यास OA = r भएको एउटा वृत्त छ । अर्धव्यास OA सँग बराबर भएको चाप AB छ । त्यसैले $OA = \overset{\frown}{AB} = r$ छ । अर्धव्यास r सँग बराबर लम्बाइ भएको चाप AB लिएर केन्द्रीय कोण AOB खिचौँ । रेडियन (radian) को परिभाषाअनुसार $\angle AOB = 1^c$ हुन्छ ।

अर्धव्यास AO लाई विन्दु C सम्म लम्ब्याइ व्यास AC बनाऔँ । सूत्रअनुसार, वृत्तको परिधि (C) = $2\pi r$



अब, अर्धवृत्तको परिधि $(\overset{\frown}{ABC}) = \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

केन्द्रीय कोण $\angle AOC$ = सरल कोण $= 180°$

अब, ज्यामितीको साध्यअनुसार, केन्द्रीय कोणहरूको अनुपात तिनै सङ्गति कोणहरूको सम्मुख चापको अनुपातसँग बराबर हुन्छ । त्यसैले,

$\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABC}}$ [∵ केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापको सम्बन्धबाट]

अथवा, $\frac{1^c}{180} = \frac{r}{\pi r}$ [∵ $\angle AOC = 180°$ र $\overset{\frown}{ABC} = \pi r$, अर्धवृत्तको परिधि]

$1^c = \frac{180°}{\pi}$

1^c को मान अर्धव्यास (r) सँग अनाश्रित हुन्छ । त्यसैले $180°$ र π दुबै अचल राशि भएकाले 1^c एउटा अचल कोण हो ।

क्रियाकलाप 2

डिग्री, ग्रेड र रेडियनबिचको सम्बन्ध थाहा पाउन तलको तालिका अध्ययन गरी खाली ठाउँ पूरा गर्नुहोस् ।

कोण	डिग्री	ग्रेड	रेडियन
एक परिक्रमण	....	400^g	$2\pi^c$
एक समकोण	$\frac{360°}{4} = 90°$	....	$\frac{2\pi^c}{4} = \frac{\pi^c}{2}$
दुई समकोण	180°	....	....

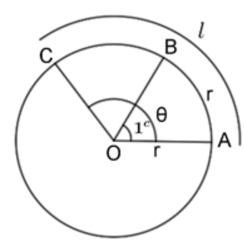
2.1.5 चापको लम्बाइ, अर्धव्यास र केन्द्रीय कोणको सम्बन्ध (The relationship among length of arc, radius and central angle)

क्रियाकलाप 3

अर्धव्यास 4 cm भन्दा बढी लिई केन्द्रविन्दु O भएको वृत्त खिच्नुहोस् । चाप AB र CD लिनुहोस् । अनि चाप AB र CD चापमा आधारित केन्द्रीय कोणहरू क्रमश: AOB र COD चाप बनाउनुहोस् । अनि प्रोटेक्टरको सहायताबाट चाप AOB र COD को मापन गरी तिनीहरूको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् । त्यसैगरी, धागो र रुलरका सहायताबाट कोणहरू AOB र COD मापन गरी तिनीहरूको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।

के केन्द्रीय कोण यसको सम्मुख चापसँग डिग्री मापनमा बराबर हुन्छ भन्ने तथ्यमा आधारित भएर बनेको हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

साध्य 2: अर्धव्यास r एकाइ भएको वृत्तमा लम्बाइ *l* एकाइ भएको चापले केन्द्रमा बनाएको कोण θ को मान $\theta = \left(\frac{l}{r}\right)^c$ हुन्छ ।



प्रमाण : मानौँ ABC एउटा वृत्त हो, जसको केन्द्रविन्दु O र अर्धव्यास OA = r छन् । दुई फरक चाप $\overset{\frown}{AB}$ र $\overset{\frown}{ABC}$) मा बनेका दुई केन्द्रीय कोणहरू क्रमश: $\angle AOB$ र $\angle AOC$ हुन् । $\overset{\frown}{AB}$ = OA = radius (r) छन् । रेडियन (radian) को परिभाषाअनुसार $\angle AOB = 1^c$ हुन्छ ।

$\overset{\frown}{ABC} = l$ र OA र OC बिचको केन्द्रीय कोण $\angle AOC = \theta$ छ ।

अब, ज्यामितीको साध्यअनुसार, केन्द्रीय कोणहरूको अनुपात तिनै सङ्गती कोणहरूको सम्मुख चापको अनुपातसँग बराबर हुन्छ । त्यसैले,

अब, $\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{\overset{\frown}{AB}}$

अथवा, $\frac{\theta}{1^c} = \frac{l}{r}$

$\therefore \theta = \left(\frac{l}{r}\right)^c$

अतः कुनै पनि वृत्तको केन्द्रीय कोण $(\theta) = \frac{\text{कोणलाई वृत्तको केन्द्रमा परिवेष्टित गर्ने चाप}}{\text{वृत्तको अर्धव्यास}}$ रेडियन हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको कोण 75° लाई रेडियन पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको कोण = 75°

हामीलाई थाहा छ, $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$

उअत $75^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \times 75\right)^c = \left(\frac{5\pi}{12}\right)^c$

अतः $75^\circ = \left(\frac{5\pi}{12}\right)^c$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

दिइएको कोण $\frac{\pi^c}{4}$ लाई डिग्रीमा बदल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको कोण = $\frac{\pi^c}{4}$

हामीलाई थाहा छ, $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

अब, $\frac{\pi^c}{4} = \left(\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{4}\right)^\circ = 45^\circ$

अतः $\frac{\pi^c}{4} = 45^\circ$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

दिइएको कोण 90^g लाई रेडियनमा बदल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको कोण $= 90^g$

हामीलाई थाहा छ, $200^g = \pi^c$

$$1^g = \frac{\pi^c}{200}$$

अब, $90^g = \left(\frac{\pi}{200} \times 90\right)^c$

अत: $90^g = \frac{9\pi^c}{20}$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

दिइएको $\frac{5\pi^c}{8}$ लाई ग्रेडमा बदल्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको कोण $= \frac{5\pi^c}{8}$

हामीलाई थाहा छ, $\pi^c = 200^g$

$$1^c = \frac{200^g}{\pi}$$

अब, $\frac{5\pi^c}{8} = \left(\frac{200}{\pi} \times \frac{5\pi}{8}\right)^g = 125^g$

अत: $\frac{5\pi^c}{8} = 125^g$ हुन्छ ।

उदाहरण 5

एउटा समकोण त्रिभुजका दुई न्यूनकोणहरूको फरक $\frac{\pi^c}{9}$ छ ।

(क) $\frac{\pi^c}{9}$ बराबर कति डिग्री कोण हुन्छ ?

(ख) दुई न्यूनकोणहरूको मान $x°$ र $y°$ लिँदा बन्ने दुई समीकरणहरू लेख्नुहोस् ।

(ग) दुई न्यूनकोणहरूको मान डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(क) $\frac{\pi^c}{9}$ लाई डिग्रीमा बदल्दा, $\frac{\pi^c}{9} = \left(\frac{\pi}{9} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 20°$

(ख) प्रश्नअनुसार, $x + y + 90° = 180°$

अथवा, $x + y = 90°$ .... (i)

र $x - y = \frac{\pi^c}{9}$

अथवा, $x - y = 20°$ .... (ii) $\{\because \frac{\pi^c}{9} = 20°\}$

(ग) अब, समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$x + y = 90°$

$x - y = 20°$

$2x = 110°$

अथवा, $x = \frac{110°}{2}$

अथवा, $x = 55°$

फेरि, x को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$55° + y = 90°$

अथवा, $y = 90° - 55°$

अथवा, $y = 35°$

अतः ती कोणहरूको मान 55° र 35° हुन्छ ।

उदाहरण 6

घडीको मिनेट सुई र घण्टा सुईको बिचमा 2:30 बज्दा कति रेडियनको कोण बन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

घडीमा 2:30 बजेको वेला मिनेटको सुई ठिक 6 मा र घण्टाको सुई दुई र तीनको बिचमा हुन्छ ।

2:30 बजे = 2 घण्टा + 30 मिनेट = (2 घण्टा + $\frac{30}{60}$ घण्टा) = (2 घण्टा + 0.5 घण्टा) = 2.5 घण्टा

अब, हामीलाई थाहा छ,

घडीको घण्टा सुईले 12 घण्टामा एक चक्कर लगाउँदा बनाउने कोण $= 2\pi^c$

घडीको घण्टा सुईले 1 घण्टामा एक चक्कर लगाउँदा बनाउने कोण $= \frac{2\pi^c}{12}$

घडीको घण्टा सुईले 2.5 घण्टामा एक चक्कर लगाउँदा बनाउने कोण $= \frac{2\pi^c}{12} \times 2.5 = \frac{5\pi^c}{12}$

त्यसैगरी, घडीको मिनेट सुईले 30 मिनेट पार गरिसकेको छ ।

घडीको मिनेट सुईले 60 मिनेटमा एक चक्कर लगाउँदा बनाउने कोण $= 2\pi^c$

घडीको घण्टा सुईले 1 मिनेटमा एक चक्कर लगाउँदा बनाउने कोण $= \frac{2\pi^c}{60}$

घडीको घण्टा सुईले 30 मिनेटमा एक चक्कर लगाउँदा बनाउने कोण $= \frac{2\pi^c}{12} \times 30 = \pi^c$

अतः घण्टा सुई र मिनेट सुईबिचको कोण $= \pi^c - \frac{5\pi^c}{12} = \frac{12\pi^c - 5\pi^c}{12} = \frac{7\pi^c}{12}$

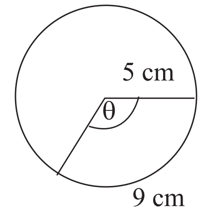
नोटः के यस समस्यालाई फरक तरिकाले पनि समाधान गर्न सकिन्छ ? सकिन्छ भने समाधान गरी तुलना गर्नुहोस् ।

उदाहरण 7

सँगै दिइएको वृत्तमा अर्धव्यास 5 cm र वृत्तमा 9 cm को चापले केन्द्रमा बनाएका कोण (θ) छ ।

(क) केन्द्रीय कोण (θ) पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) केन्द्रीय कोण (θ) रेडियन पद्धतिमा पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ, अर्धव्यासको लम्बाइ (r) = 5 cm

चापको लम्बाइ (l) = 9 cm

केन्द्रीय कोण (θ) = ?

(क) केन्द्रीय कोण पत्ता लगाउने सूत्र $(\theta) = \left(\frac{l}{r}\right)^c$

(ख) अब, सूत्रअनुसार, केन्द्रीय कोण $(\theta) = \left(\frac{l}{r}\right)^c = \left(\frac{9 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}\right)^c = 1.8^c$ हुन्छ ।

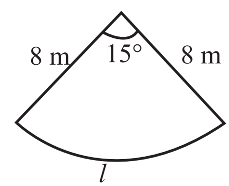
उदाहरण 8

एक जना छात्राले पिङ खेल्दा पिङको केन्द्रबाट 15° को कोण बन्छ र दिइएको पिङको लम्बाइ 8 m छ ।

(क) 15° लाई रेडियनमा बदल्नुहोस् ।

(ख) 15° लाई रेडियनमा परिवर्तन गर्नुको कारण दिनुहोस् ।

(ग) छात्राले एक पटकमा पिङमा केन्द्रबाट एकातर्फ कति दुरी पार गर्छिन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ, पिङको लम्बाइ = वृत्तको अर्धव्यास (r) = 8m

(क) केन्द्रीय कोण (θ) = 15° यसलाई रेडियनमा बदल्दा, $15° = \left(\frac{\pi}{180} \times 15\right)^c = \left(\frac{\pi}{12}\right)^c$

(ख) किनकि $(\theta) = \left(\frac{l}{r}\right)^c$ सूत्र प्रयोग गर्दा केन्द्रीयकोण (θ) सधैँ रेडियनमा हुनुपर्छ । त्यसैले, 15° रेडियनमा परिवर्तन गर्नुपर्छ ।

(ग) छात्राले एक पटकमा पिङमा केन्द्रबाट एकातर्फ पार गरेको दुरी (l) = ?

अब, केन्द्रीय कोण $(\theta) = \left(\frac{l}{r}\right)^c$

अथवा, $\left(\frac{\pi}{12}\right)^c = \left(\frac{l}{8}\right)^c$

अथवा, $\frac{22}{7 \times 12} = \frac{l}{8}$

अथवा, $l = \frac{8 \times 22}{7 \times 12}$

अथवा, $l = 2.095$m

∴ एक पटकमा छात्राले पिङमा केन्द्रबाट एकातर्फ 2.095m दुरी पार गर्छिन् ।

अभ्यास 2.1 (B)

1. खाली ठाउँ भर्नुहोस् :

   (क) 2 समकोण = ... रेडियन (ख) 200 ग्रेड = ... रेडियन

   (ग) π^c = ... डिग्री (घ) 1 रेडियन = ... डिग्री

   (ङ) $1°$ = ... रेडियन (च) 1^g = ... रेडियन

2. एक रेडियन भन्नाले के बुझिन्छ, लेख्नुहोस् ।

3. वृत्तीय नाप पद्धति भनेको के हो ? यस पद्धतिमा कोणलाई कुन एकाइमा नापिन्छ लेख्नुहोस् ।

4. केन्द्रीय कोण $(\theta) = \left(\frac{l}{r}\right)^c$ मा l र r ले के के जनाउँछन्, लेख्नुहोस् ।

5. माथिको क्रियाकलालाप 2 र 3 अध्ययन गरी प्राप्त निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

   क्रियाकलालाप 2 बाट प्राप्त निष्कर्ष ....

   क्रियाकलालाप 3 बाट प्राप्त निष्कर्ष..

6. दिइएका कोणहरूलाई रेडियनमा बदल्नुहोस् :

   (क) $30°$ (ख) $45°$ (ग) 50^g

   (घ) 70^g (ङ) $120°$ (च) 150^g

7. दिइएका कोणहरूलाई डिग्रीमा बदल्नुहोस् :

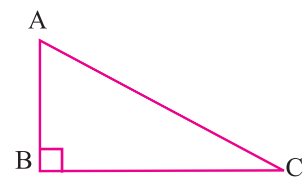
   (क) $\frac{\pi^c}{2}$ (ख) $\frac{3\pi^c}{2}$ (ग) $\frac{7\pi^c}{50}$ (घ) $\frac{3\pi^c}{4}$ (ङ) $\frac{2\pi^c}{3}$

   (च) $\frac{5\pi^c}{6}$ (छ) $\frac{4\pi^c}{9}$ (ज) $\frac{5\pi^c}{12}$ (झ) $\frac{\pi^c}{9}$

8. दिइएका कोणहरूलाई ग्रेडमा बदल्नुहोस् :

   (क) $\frac{\pi^c}{5}$ (ख) $\frac{3\pi^c}{10}$ (ग) $\frac{4\pi^c}{25}$ (घ) $\frac{\pi^c}{4}$

   (ङ) $\frac{\pi^c}{8}$ (च) $\frac{3}{2}\pi^c$



9. समकोण त्रिभुज ABC दिइएको छ ।

   (क) सो समकोण त्रिभुज ABC मा $\angle ABC$ कति डिग्री हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

   (ख) चित्रमा $\angle ABC$ को $\frac{3}{5}$ भागको मान रेडियनमा कति हुन्छ ?

   (ग) चित्रमा $\angle ABC$ को 40% को रेडियन मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. कुनै समकोण त्रिभुजको एउटा कोण $60°$ भए,

    (क) डिग्री र रेडियनको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

    (ख) बाँकी कोणको मान रेडियनमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

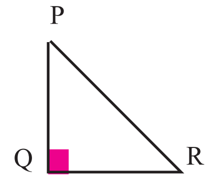
(ग) न्यूनकोणहरूको फरक रेडियनमा कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. एउटा समकोण त्रिभुजमा एउटा न्यूनकोणको मान 50° छ ।

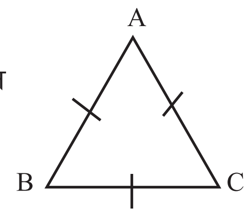
(क) बाँकी कोणको मान रेडियनमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) न्यूनकोणहरूको फरक रेडियनमा कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) सरल कोणको एक तिहाइको रेडियन मान कति हुन्छ ?

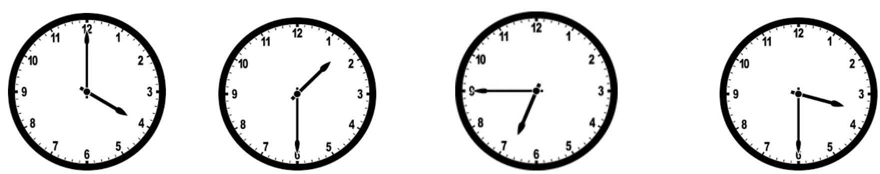


12. (क) समकोण त्रिभुज PQR का दुई न्यूनकोणहरू $\angle QPR$ र $\angle PRQ$ को फरक $\frac{3\pi^c}{10}$ छ । प्रत्येक कोणहरूको मान ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।



(ख) दिइएको समबाहु त्रिभुज ABC मा प्रत्येक कोणहरूको मान वृत्तीय नाप पद्धतिमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. तलका प्रत्येक अवस्थामा घडीको घण्टा सुई र मिनेट सुईबिचको कोणको मान वृत्तीय नापमा पत्ता लगाउनुहोस् :



(क) 4:00 (ख) 1:30 (ग) 6:45 (घ) 3:30

14. (क) यदि एउटा वृत्तको 44 cm को चापले केन्द्रमा 60° को कोण बनाउँछ भने सो वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा वृत्तको 18 cm चापले केन्द्रमा 81° को कोण बनाउँछ भने वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) 15 cm को चापले केन्द्रमा $\frac{3\pi^c}{4}$ को कोण बनाउँछ भने वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. (क) 18 cm अर्धव्यास भएको वृत्तमा 11 cm चापले केन्द्रमा बनाउने कोण डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) अर्धव्यास 7.254 cm भएको वृत्तमा 3.8 cm को चापले वृत्तको केन्द्रमा कति डिग्रीको कोण बनाउँछ ?

16. एउटा घडीको मिनेट सुई 3 cm लामो छ । 20 मिनेटमा सुईको टुप्पोले कति दुरी पार गर्छ ?

17. एउटा गाईलाई 10 m लामो डोरीले एउटा किलामा बाँधिएको छ । डोरी तन्किने गरी उक्त गाई घुमिरहेको वेला डोरीको प्रारम्भिक अवस्थाबाट अहिलेको अवस्थामा डोरीले $\frac{7\pi^c}{18}$ कोण बनाउँछ ।

(क) $\frac{7\pi^c}{18}$ लाई डिग्रीमा परिवर्तन गर्नुहोस् ।

(ख) गाईले सुरुदेखि $\frac{7\pi^c}{18}$ कोण बनाउँदासम्म पार गरेको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

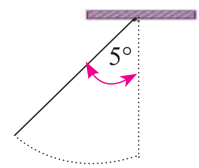
18. एउटा बाख्रालाई 14 m लामो डोरीले किलामा बाधिएको छ । डोरी तन्कने गरी घुमिरहँदा डोरीले किलामा 70° को कोण बनाउँछ ।

(क) 70° लाई रेडियनमा परिवर्तन गर्नुहोस् ।

(ख) 70° को कोण बनाउँदा बाख्राले घुमेको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि बाख्राले घुमेको दुरी पहिलाभन्दा दोब्बर भयो भने डोरीले किलामा कति डिग्रीको कोण बनाउँछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

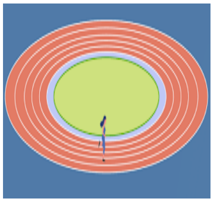
19. दोलक (पेन्डुलम) ले 20.5 cm को दुरी घुम्दा केन्द्रमा 5° को कोण बनाउँछ ।



(क) अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) उक्त वृत्ताकार बाटाको परिधि पत्ता लगाउनुहोस् ।

20. कुनै व्यक्ति प्रतिमिनेट 100 m का दरले वृत्ताकार बाटामा घुम्दा 36 सेकेन्डमा वृत्तको केन्द्रमा 56° कोण बनाउँछ ।



(क) उक्त व्यक्तिले 36 सेकेन्डमा पूरा गरेको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) बाटोको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त वृत्ताकार बाटाको परिधि पत्ता लगाउनुहोस् ।

21. यदि D, G र C ले क्रमशः कुनै कोणको डिग्री, ग्रेड र रेडियन मान दिन्छ भने प्रमाणित गर्नुहोस्

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{C}{\pi}$$

परियोजना कार्य

1. डिग्री, ग्रेड र रेडियनको सम्बन्ध के छ उल्लेख गर्नुहोस् र रूपान्तरण जनाउने चार्ट तयार पार्नुहोस्। विश्वका कुन कुन देशमा डिग्री, ग्रेड र रेडियनमध्ये कुन पद्धतिको परिचय र प्रयोग पहिला गरिन्छ ? हाम्रो देशमा गणितमा कुन पद्धतिको प्रयोग भएको पाइन्छ ? किन सबै पद्धतिबारेमा जान्न आवश्यक छ ? के डिग्री, ग्रेड र रेडियनको गहिरो अध्ययन गर्नाले विश्वका जुनकुनै देशमा गएर गणितको अध्ययन गर्न सजिलो हुन्छ वा यसले खासै असर गर्दैन ? किन ग्रेड र रेडियनलाई कक्षा ९ को ऐच्छिक गणितबाट परिचय गराइएको होला ? यी सबै प्रश्नहरूका आधारमा तयार पारिएको खोजलाई चार्ट पेपर, पावर पोइन्ट वा अन्य उपयुक्त विधिका माध्यमबाट कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
2. इन्टरनेटको सहयोगमा google map वा अन्य कुनै विधिबाट तपाईंको विद्यालय रहेको स्थान कति डिग्री, मिनेट र सेकेन्डमा पर्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1 देखि 5 सम्मका प्रश्नहरू शिक्षकलाई देखाउने ।

6. (क) $\frac{\pi^c}{6}$ (ख) $\frac{\pi^c}{4}$ (ग) $\frac{\pi^c}{4}$ (घ) $\frac{7\pi^c}{20}$ (ङ) $\frac{2\pi^c}{3}$ (च) $\frac{3\pi^c}{4}$

7. (क) 90° (ख) 270° ग) 25.2° (घ) 135° (ङ) 120° (च) 150°

(छ) 80° (ज) 75° (झ) 20°

8. (क) 40^g (ख) 60^g ग) 32^g (घ) 50^g (ङ) 25^g (च) 300^g

9. (क) 90° (ख) $\frac{3\pi^c}{10}$ (ग) $\frac{\pi^c}{5}$ 10. (क) $180° = \pi^c$ (ख) $\frac{\pi^c}{6}$ (ग) $\frac{\pi^c}{6}$

11. (क) $\frac{2\pi^c}{9}$ (ख) $\frac{\pi^c}{18}$ (ग) $\frac{\pi^c}{3}$ 12. (क) $100^g, 80^g, 20^g$ (ख) $\frac{\pi^c}{3}$

13. (क) $\frac{2\pi^c}{3}$ (ख) $\frac{3\pi^c}{4}$ (ग) $\frac{3\pi^c}{8}$ (घ) $\frac{5\pi^c}{12}$

14. (क) 42 cm (ख) 12.73 cm (ग) 6.36 cm

15. (क) 35° (ख) 30° 16. 6.28 cm

17.(क) 70° (ख) 12.22 m

18. (क) $\frac{7\pi^c}{18}$ (ख) 17.11 m (ग) 139.99 cm

19. (क) 234.82 cm (ख) 1476 cm

20. (क) 60 m (ख) 61.36 m (ग) 385.71 m 21. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

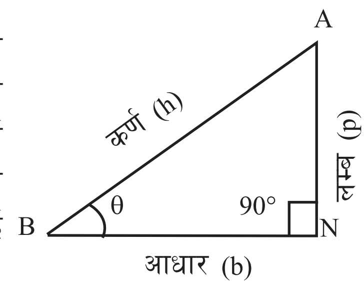
2.2 त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका सर्वसमिकाहरू (Identities of Trigonometric Ratios)

2.2.1 त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Trigonometric Ratios)

समकोण त्रिभुजहरूमा भुजाहरूबिचको सम्बन्ध पाइथागोरस साध्य ($h^2 = p^2 + b^2$) को प्रयोग त्रिकोणमितीय अनुपातको प्रयोगमा उपयोग गर्ने गरिन्छ ।

क्रियाकलाप 1

दिइएको समकोण त्रिभुजलाई अवलोकन गर्नहोस् । 90° को सम्मुख भुजालाई कर्ण (hypotenuse) भनिन्छ । सन्दर्भ कोण (θ) को सम्मुख भुजा (opposite side) लाई लम्ब (perpendicular) भनिन्छ र सन्दर्भ कोण र 90° को आसन्न भुजा (adjacent side) लाई आधार भुजा (base side) भनिन्छ । अब समकोण त्रिभुज BAN का कुनै दुई भुजाहरूबाट बन्ने सम्भावित सबै अनुपातको सूची बनाउनुहोस् ।



त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई परिभाषित यसप्रकार गरिन्छ ।

1. अनुपातहरू मध्येबाट $\frac{\text{सम्मुख भुजा (Oppsite side)}}{\text{कर्ण (hypotenuse)}}$ लाई sine अथवा छोटकरीमा sin भनिन्छ ।
   अत: $\sin\theta = \frac{p}{h}$

2. त्यस्तै $\frac{\text{आसन्न भुजा (adjacent side)}}{\text{कर्ण (hypotenuse)}}$ लाई cosinse र छोटकरीमा cos भनिन्छ । अत $\cos\theta = \frac{b}{h}$

3. $\frac{\text{सम्मुख भुजा (opposite side)}}{\text{आसन्न भुजा (adjacent side)}}$ लाई tangent र छोटकरीमा tan भनिन्छ । अत: $\tan\theta = \frac{p}{b}$

यी तीनओटा अनुपातहरूलाई आधारभूत त्रिकोणमितीय अनुपात भनिन्छ । यिनका व्युत्क्रम (Reciprocals) अनुपातहरू क्रमश: निम्नानुसार छन् ।

4. $\frac{\text{कर्ण (hypotenuse)}}{\text{सम्मुख भुजा (Oppsite side)}}$ लाई cosecant अथवा छोटकरीमा cosec भनिन्छ ।
   अत: $\text{cosec}\theta = \frac{h}{p}$

5. $\frac{\text{कर्ण (hypotenuse)}}{\text{आसन्न भुजा (adjacent side)}}$ लाई secent र छोटकरीमा sec भनिन्छ । अत: $\sec\theta = \frac{h}{b}$

6. $\frac{\text{आसन्न भुजा (adjacent side)}}{\text{सम्मुख भुजा (opposite side)}}$ लाई cotangent र छोटकरीमा cot भनिन्छ । अत: $\cot\theta = \frac{b}{p}$

2.2.2 त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका सर्वसमिकाहरू (Identities of Trigonometric Ratios)

समस्या : (क) $\sin\theta \times \text{cosec}\theta$ ....? (ख) $\tan\theta \times \cot\theta =$ ....?

(ग) $\cos\theta \times \sec\theta =$ .... ?

प्रक्रिया : परिभाषाअनुसार, हामीलाई थाहा छ, $\sin\theta = \frac{p}{h}$ र $\text{cosec}\theta = \frac{h}{p}$ हुन्छ । $\sin\theta$ र $\text{cosec}\theta$ को गुणनफल पत्ता लगाउनुहोस् । त्यसैगरी (ख) र (ग) पनि गर्नुहोस् ।

सारांशमा व्युत्क्रम (reciprocal) सम्बन्धहरू

(1) $\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$ (2) $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ (3) $\sin\theta \times \text{cosec}\theta = 1$

(4) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ (5) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ (6) $\cos\theta \times \sec\theta = 1$

(7) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ (8) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ (9) $\tan\theta \times \cot\theta = 1$

यसरी, $\sin\theta$ र $\text{cosec}\theta$; $\cos\theta$ र $\sec\theta$ तथा $\tan\theta$ र $\cot\theta$ एकअर्काका व्युत्क्रम अनुपातहरू (reciprocal relations) हुन् ।

फेरि, परिभाषाअनुसार,

(i) $\tan\theta = \frac{p}{b}$

हर र अंश दुबैमा h ले भाग गर्दा, $\tan\theta = \frac{\frac{p}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

अथवा, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{p}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{p}{b} = \tan\theta$ अतः $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\because \sin\theta = \frac{p}{h}$ र $\cos\theta = \frac{b}{h}$

(ii) $\cot\theta = \frac{b}{p}$

हर र अंश दुबैमा h ले भाग गर्दा, $\cot\theta = \frac{\frac{b}{h}}{\frac{p}{h}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

अथवा, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{b}{h}}{\frac{p}{h}} = \frac{b}{p} = \cot\theta$ अतः $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\because \cos\theta = \frac{b}{h}$ र $\sin = \frac{p}{h}$

यी सम्बन्धहरूलाई भागफल सम्बन्ध (quotient relation) भनिन्छ ।

सारांशमा भागफल सम्बन्ध (quotient relation)

(1) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

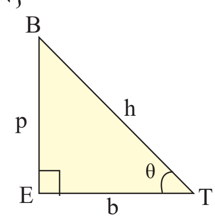
2.2.3 पाइथागोरस साध्यबाट प्राप्त हुने त्रिकोणमितीय सम्बन्ध (Relation of Trigonometric Ratios Obtained from Pythagoras Theorem)

सम्बन्ध 1. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

प्रमाण : BET एउटा समकोण त्रिभुज हो, जहाँ $\angle BET = 90°$ छ । प्रसङ्गकोण $\angle BTE = \theta$ का आधार मा $\sin\theta = \frac{p}{h} = \frac{BE}{BT}$ र $\cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{ET}{BT}$ हुन्छ ।

चित्रमा पाइथागोरस साध्यअनुसार, $p^2 + b^2 = h^2$

अथवा, $BE^2 + ET^2 = BT^2$ {∵ जहाँ p = BE, b = ET र h = BT भएकाले}



अथवा, $\frac{BE^2 + ET^2}{BT^2} = \frac{BT^2}{BT^2}$ {∵ दुबैतर्फ BT^2 ले भाग गर्दा}

अथवा, $\frac{BE^2}{BT^2} + \frac{ET^2}{BT^2} = 1$ {∵ पदहरू छुट्याउँदा}

अथवा, $\left(\frac{BE}{BT}\right)^2 + \left(\frac{ET}{BT}\right)^2 = 1$

अथवा, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ प्रमाणित भयो ।

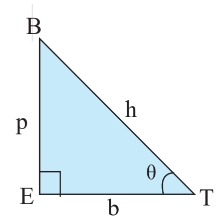
सम्बन्ध 2. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

प्रमाण : समकोण त्रिभुज BET जहाँ $\angle BET = 90°$ छ ।

प्रसङ्गकोण $\angle BTE = \theta$ को आधारमा $\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{BE}{ET}$ र $\sec\theta = \frac{h}{b} = \frac{BT}{ET}$ हुन्छ ।

अब, पाइथागोरस साध्यअनुसार, $p^2 + b^2 = h^2$

अथवा, $BE^2 + ET^2 = BT^2$ {∵ जहाँ p = BE, b = ET र h = BT भएकाले}



अथवा, $\frac{BE^2 + ET^2}{ET^2} = \frac{BT^2}{ET^2}$ {∵ दुबैतर्फ ET^2 ले भाग गर्दा}

अथवा, $\frac{BE^2}{ET^2} + \frac{ET^2}{ET^2} = \frac{BT^2}{ET^2}$ {∵ बायाँतर्फ पदहरू छुट्याउँदा}

अथवा, $\left(\frac{BE}{ET}\right)^2 + 1 = \left(\frac{BT}{ET}\right)^2$

अथवा, $(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$

अथवा, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

अथवा, $1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

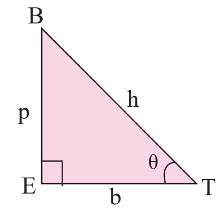
अतः $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ प्रमाणित भयो ।

सम्बन्ध 3. प्रमाणित गर्नुहोस् : $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

प्रमाण : समकोण त्रिभुज BET जहाँ $\angle BET = 90°$ छ । प्रसङ्कोण $\angle BTE = \theta$ का आधारमा $\text{cosec}\theta = \frac{h}{p} = \frac{BT}{BE}$ र $\cot\theta = \frac{b}{p} = \frac{ET}{BE}$ हुन्छ ।

अब, पाइथागोरस साध्यअनुसार, $p^2 + b^2 = h^2$

अथवा, $BE^2 + ET^2 = BT^2$ {∵ जहाँ p = BE, b = ET र h = BT भएकाले}



अथवा, $\frac{BE^2+ET^2}{BE^2} = \frac{BT^2}{BE^2}$ {∵ दुबैतर्फ BE^2 ले भाग गर्दा}

अथवा, $\frac{BE^2}{BE^2} + \frac{ET^2}{BE^2} = \frac{BT^2}{BE^2}$ {∵ पदहरू छुट्याउँदा}

अथवा, $1 + \left(\frac{ET}{BE}\right)^2 = \left(\frac{BT}{BE}\right)^2$

अथवा, $1 + (\cot\theta)^2 = (\text{cosec}\theta)^2$

अथवा, $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

अथवा, $1 = \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

अतः $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ प्रमाणित भयो ।

पाइथागोरस साध्यबाट प्राप्त हुने त्रिकोणमितीय सम्बन्धको सारांश

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
   (i) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (ii) $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$
   (iii) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ (iv) $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$
2. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
   (i) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$
   (iii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (iv) $\sec\theta = \sqrt{1 + \tan^2\theta}$
3. $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$
   (i) $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$ (ii) $\cot\theta = \sqrt{\text{cosec}^2\theta - 1}$
   (iii) $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ (iv) $\text{cosec}\theta = \sqrt{1 + \cot^2\theta}$

उदाहरण 1

जोड गर्नुहोस् : sinA + cosB + 2sinA + 5cosB

समाधान : यहाँ,

sinA + cosB + 2sinA + 5cosB

= sinA + 2sinA + cosB + 5cosB {∵ सजातीय पदहरूसँगै राख्ने }

= 3sinA + 6cosB {∵ सजातीय पदहरूको जोड}

उदाहरण 2

घटाउ गर्नुहोस् : 7secA –2secA

समाधान : यहाँ,

7secA –2secA = 5secA {∵ सजातीय पदहरूको घटाउ}

उदाहरण 3

गुणन गर्नुहोस् : $(\sin A - \cos B)(\sin A + \cos B)(\sin^2 A + \cos^2 B)$

समाधान : यहाँ,

$(\sin A - \cos B)(\sin A + \cos B)(\sin^2 A + \cos^2 B)$

$= (\sin^2 A - \cos^2 B)(\sin^2 A + \cos^2 B)$ {∵ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$}

$= (\sin^4 A - \cos^4 B)$ {∵ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$}

उदाहरण 4

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $2\sec^2\theta + \sec\theta - 6$

समाधान : यहाँ,

$2\sec^2\theta + \sec\theta - 6 = 2\sec^2\theta + (4 - 3)\sec\theta - 6$

$= 2\sec^2\theta + 4\sec\theta - 3\sec\theta - 6$

$= 2\sec\theta(\sec\theta + 2) - 3(\sec\theta + 2)$

$= (\sec\theta + 2)(2\sec\theta - 3)$

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin^2\alpha \times \sec\alpha \times \cot^2\alpha = \cos\alpha$

समाधान : यहाँ

L.H.S = $\sin^2\alpha \times \sec\alpha \times \cot^2\alpha$

$= \sin^2\alpha \times \frac{1}{\cos\alpha} \times \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$= \cos\alpha$ = R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sec^4\beta - \sec^2\beta = \tan^4\beta + \tan^2\beta$

समाधान : यहाँ

L.H.S $= \sec^4\beta - \sec^2\beta$

$= \sec^2\beta(\sec^2\beta - 1)$

$= (1 + \tan^2\beta)(1 + \tan^2\beta - 1)$ {∵ $\sec^2\beta = 1 + \tan^2\beta$}

$= (1 + \tan^2\beta)(\tan^2\beta)$

$= \tan^4\beta + \tan^2\beta$ = R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 7

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sqrt{1 - 2\sin\theta\cdot\cos\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

समाधान, यहाँ

L.H.S $= \sqrt{1 - 2\sin\theta\cdot\cos\theta}$

$= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cdot\cos\theta}$

$= \sqrt{(\sin\theta - \cos\theta)^2}$

$= \sin\theta - \cos\theta =$ RHS, प्रमाणित भयो ।

विचारणीय प्रश्न : के $\sqrt{1 - 2\sin\theta\cdot\cos\theta} = \cos\theta - \sin\theta$ पनि प्रमाणित हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

अभ्यास 2.2 (A)

1. खाली ठाउँ भर्नुहोस् :

   (क) $\text{cosec}\theta$ लाई $\sin\theta$ का रूपमा = ...
   (ख) $\tan\theta$ लाई $\cot\theta$ का रूपमा = ...
   (ग) $\cos\theta$ लाई $\sec\theta$ का रूपमा = ...
   (घ) $\cot\theta$ लाई $\tan\theta$ का रूपमा = ...
   (ङ) $\sin\theta$ लाई $\text{cosec}\theta$ का रूपमा = ...
   (च) $\sec\theta$ लाई $\cos\theta$ का रूपमा = ...
   (छ) $\cot\theta$ लाई $\sin\theta$ र $\cos\theta$ का रूपमा = ...
   (ज) $\tan\theta$ लाई $\sin\theta$ र $\cos\theta$ का रूपमा = ...

2. भागफल सम्बन्ध (Quotient relation) सँग सम्बन्धित सूत्रहरू लेख्नुहोस् ।
3. त्रिकोणमितिका कुनै तीनओटा सर्वसमिकाहरू लेख्नुहोस् ।
4. पाइथागोरस साध्यबाट प्राप्त हुने सम्भावित सबै त्रिकोणमितीय सम्बन्धहरूको सूची तयार पार्नुहोस् ।
5. चिह्न हेरी हिसाब गर्नुहोस् :

   (क) $\tan\theta + 3\tan\theta$
   (ख) $4\cot A + 6\cot A + 2\cot A$
   (ग) $\sec^2A + 10\sec^2A$
   (घ) $\sin^3x + 3\sin^3x + 2\sin^3x$
   (ङ) $\sin\theta - 4\sin\theta$
   (च) $7\tan A - 2\tan A$
   (छ) $\sec^2A - 10\sec^2A$
   (ज) $3\sin^3x - 2\sin^3x$
   (झ) $\sin\theta - 4\sin\theta + 20\sin\theta$
   (ञ) $8\tan A - 2\tan A + 12\tan A$
   (ट) $9\cos^2A - 5\cos^2A + 16\cos^2A$
   (ठ) $7\text{cosec}^3x - 5\text{cosec}^3x + 12\text{cosec}^3x$

6. गुणन गर्नुहोस् :

   (क) $(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)$
   (ख) $(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)$
   (ग) $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$
   (घ) $(1 + \cot^2A)\ (1 + \cot^2A)$
   (ङ) $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)(1 + \sin^2\theta)$
   (च) $(1 + \tan\theta)(1 - \tan\theta)(1 + \tan^2\theta)$

7. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $\cos^2A - \sin^2A$ (ख) $\sec^2A - \text{cosec}^2A$ (ग) $\cos^2A + \sin^2A.\cos^2A$

(घ) $\tan^3\theta - \cot^3\theta$ (ङ) $\sec^4\theta - \text{cosec}^4\theta$ (च) $\sin^2x + 3\sin x + 2$

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\cot A \sin A = \cos A$ (ख) $\cos A\ \text{cosec}A = \cot A$

(ग) $\sec\theta \sin\theta \cot\theta = 1$ (घ) $\tan\theta \cos\theta = \sin\theta$

(ङ) $\dfrac{\sin\theta.\text{cosec}\,\theta}{\sec\theta} = \cos\theta$ (च) $\dfrac{\tan\theta.\cot\theta}{\sec\theta\ \text{cosec}\,\theta} = \sin\theta\cos\theta$

9. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $(1 - \cos^2\theta)(1 + \tan^2\theta) = \tan^2\theta$ (ख) $(1 + \cot^2A)(1 - \sin^2A) = \cot^2A$

(ग) $\cos^2\theta - \cos^2\theta.\sin^2\theta = \cos^4\theta$ (घ) $(1 - \sin^2A)\,\text{cosec}^2A = \cot^2A$

(ङ) $\sin^2\theta + \sin^2\theta.\cot^2\theta = 1$ (च) $\sin\theta(1 + \cot^2\theta) = \text{cosec}\,\theta$

(छ) $\cos A(1 + \tan^2A) = \sec A$ (ज) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

10. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin^2A - \cos^2B = \sin^2B - \cos^2A$ (ख) $\cot^2B - \cos^2B = \cot^2B\cos^2B$

(ग) $\tan^2C - \sin^2C = \sin^2C\tan^2C$ (घ) $\sqrt{1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)} = \cos\alpha + \sin\alpha$

(ङ) $\cos^2\theta\sqrt{1 + \cot^2\theta} \times \sqrt{\text{cosec}^2\theta} = \cot^2\theta$ (च) $\cos\theta.\text{cosec}\,\theta\sqrt{(\sec^2\theta - 1)} = 1$

(छ) $\dfrac{\cot\theta}{\sqrt{1 + \cot^2\theta}} = \cos\theta$ (ज) $\dfrac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta} = \sin\theta$

उत्तर

1 देखि 4 सम्म शिक्षकलाई देखाउने 5. (क) $4\tan\theta$ (ख) $12\cot A$ (ग) $11\sec^2A$
(घ) $6\sin^3x$ (ङ) $-3\sin\theta$ (च) $5\tan A$ (छ) $-9\sec^2A$ (ज) $\sin^3x$
(झ) $17\sin\theta$ (ञ) $18\tan A$ (ट) $20\cos^2A$ (ठ) 14cose^3x 6. (क) $\sin^2A - \sin^2B$
(ख) $1 - \cos^2\theta$ (ग) $1 - \sin^2\theta$ (घ) $1 + 2\cot^2A + \cot^4A$ (ङ) $1 - \sin^4\theta$ (च) $1 - \tan^4\theta$
7. (क) $(\cos A + \sin A)(\cos A - \sin A)$ (ख) $(\sec A + \text{cosec}A)(\sec A - \text{cosec}A)$ (ग) $\cos^2A(1 + \sin^2A)$
(घ) $(\tan\theta - \cot\theta)(\tan^2\theta + \tan\theta\cot\theta + \cot^2\theta)$ (ङ) $(\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta)(\sec\theta + \text{cosec}\theta)(\sec\theta - \text{cosec}\theta)$
(च) $(\sin x + 2)(\sin x + 1)$ 8 देखि 10 सम्म शिक्षकलाई देखाउने

2.2.4 त्रिकोणमितिमा विशिष्ट ढाँचाका सर्वसमिकाहरू (Typical Patterns of Identities in Trigonometry)

त्रिकोणमितिमा केही सर्वसमिकाहरू सामान्य ढाँचाका नभई विशिष्ट ढाँचाका पनि हुन्छन् । ती विशिष्ट ढाँचाका सर्वसमिकाहरू कसरी प्रमाणित गर्न सकिन्छ ? के तिनीहरूलाई प्रमाणित गर्न फरक ज्ञानको आवश्यक हुन्छ ? तल दिइएका उदाहरणहरूको अध्ययन गर्नुहोस् र छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\text{cosec}^2 A} = 1$

समाधान : यहाँ,

L.H.S = $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\text{cosec}^2 A}$

$= \cos^2 A + \sin^2 A$ {$\because$ व्युत्क्रम सूत्रअनुसार, $\frac{1}{\sec^2 A} = \cos^2 A$ र $\frac{1}{\text{cosec}^2 A} = \sin^2 A$}

$= 1$ = R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1}{\sec A - \tan A} = \sec A + \tan A = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

समाधान : यहाँ,

L.H.S = $\frac{1}{\sec A - \tan A}$

हर र अंशमा $(\sec A + \tan A)$ ले गुणन गर्दा

$= \frac{1}{\sec A - \tan A} \times \frac{\sec A + \tan A}{\sec A + \tan A}$

$= \frac{\sec A + \tan A}{\sec^2 A - \tan^2 A}$ ($\because$ बीजगणितको सूत्र $(a+b)(a-b) = (a^2 - b^2)$ प्रयोग गर्दा)

$= \frac{\sec A + \tan A}{1}$ ($\because$ त्रिकोणमितीय पाइथागोरस सम्बन्ध $\text{Sec}^2 A - \tan^2 A = 1$ प्रयोग गर्दा)

$= \sec A + \tan A$

फेरि, $\sec A + \tan A$

$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \frac{1+\sin A}{\cos A}$

= R.H.S

अत: L.H.S = R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$

पहिलो पदको वर्ग रुटभित्र हर र अंश दुबैमा $1 + \sin\theta$ र दोस्रो पदको वर्ग रुटभित्र हर र अंश दुबैमा $1 - \sin\theta$ ले गुणन गर्ने ।

समाधान : यहाँ,

$$\text{L.H.S} = \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)} \times \frac{(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)} \times \frac{(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} \quad (\because 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta)$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$$

$= 2\sec\theta$ = R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\cot\theta - \mathrm{cosec}\,\theta)^2$

समाधान : यहाँ,

हर र अंशमा $(1-\cos\theta)$ ले गुणन गर्दा

$$\text{L.H.S} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= (\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2$$

$$= [-(\cot\theta - \mathrm{cosec}\,\theta)]^2$$

$$= (\cot\theta - \mathrm{cosec}\,\theta)^2$$

= R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

समाधान : यहाँ,

$$\text{L.H.S} = \frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A}$$

$$= \frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$= \frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$= \frac{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}{\cos A-\sin A}$$

$= \sin A + \cos A$

= R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1-\sin^4 A}{\cos^4 A} = 1+2\tan^2 A$

समाधान : यहाँ,

$$\text{L.H.S} = \frac{1-\sin^4 A}{\cos^4 A}$$

$$= \frac{1^2-(\sin^2 A)^2}{\cos^2 A.\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1-\sin^2 A)(1+\sin^2 A)}{\cos^2 A.\cos^2 A}$$

$$= \frac{(\cos^2 A)(1+\sin^2 A)}{\cos^2 A.\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1+\sin^2 A)}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\text{Sin}^2 A}$$

$= \sec^2 A + \tan^2 A$

$= 1 + \tan^2 A + \tan^2 A$

$= 1 + 2\tan^2 A$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 7

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin^6 A - \cos^6 A = (2\sin^2 A - 1)(\cos^2 A + \sin^4 A)$

समाधान : यहाँ,

$$L.H.S = \sin^6 A - \cos^6 A$$
$$= (\sin^2 A)^3 - (\cos^2 A)^3$$
$$= (\sin^2 A - \cos^2 A)\{(\sin^2 A)^2 + \sin^2 A \cos^2 A + (\cos^2 A)^2\}$$
$$= \{\sin^2 A - (1 - \sin^2 A)\}(\sin^4 A + \sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A)$$
$$= \{\sin^2 A - 1 + \sin^2 A)\}\{\sin^4 A + \cos^2 A(\sin^2 A + \cos^2 A)\}$$
$$= (2\sin^2 A - 1)\{\sin^4 A + \cos^2 A(1)\}$$
$$= (2\sin^2 A - 1)(\cos^2 A + \sin^4 A)$$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

$\because$ बीजगणितको सूत्र $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ प्रयोग गर्दा

उदाहरण 8

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\dfrac{\tan x + \sec x - 1}{\tan x - \sec x + 1} = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x}$

समाधान : यहाँ,

$$L.H.S = \frac{\tan x + \sec x - 1}{\tan x - \sec x + 1}$$
$$= \frac{\tan x + \sec x - (\sec^2 x - \tan^2 x)}{\tan x - \sec x + 1}$$
$$= \frac{\tan x + \sec x - (\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x)}{\tan x - \sec x + 1}$$
$$= \frac{(\tan x + \sec x)(1 - \sec x + \tan x)}{\tan x - \sec x + 1}$$
$$= \tan x + \sec x$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}$$
$$= \frac{\sin x + 1}{\cos x}$$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

विचारणीय प्रश्न : किन होला $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ प्रयोग नभएको ?

उदाहरण 9

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\sin A}{\sec A+\tan A-1}+\frac{\cos A}{\text{cosec}A+\cot A-1}=1$

समाधान : यहाँ

$$\text{L.H.S}=\frac{\sin A}{\sec A+\tan A-1}+\frac{\cos A}{\text{cosec}A+\cot A-1}$$

$$=\frac{\sin A(\text{cosec}A+\cot A-1)+\cos A(\sec A+\tan A-1)}{(\sec A+\tan A-1)(\text{cose}A+\cot A-1)}$$

$$=\frac{\sin A\text{cosec}A+\sin A\cot A-\sin A+\cos A\sec A+\cos A\tan A-\cos A)}{(\sec A+\tan A-1)(\text{cose}A+\cot A-1)}$$

$$=\frac{1+\cos A-\sin A+1+\sin A-\cos A}{\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}-1\right)\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}-1\right)}$$

$$=\frac{2}{\left(\frac{1+\sin A-\cos A}{\cos A}\right)\left(\frac{1+\cos A-\sin A}{\sin A}\right)}$$

$$=\frac{2}{1+(\sin A-\cos A)\{(1-(\sin A-\cos A)\}}\times\frac{\sin A.\cos A}{1}$$

$$=\frac{2\sin A.\cos A}{(1)^2-(\sin A-\cos A)^2}$$

$$=\frac{2\sin A.\cos A}{1-(\sin^2 A-2\sin A\cos A+\cos^2 A)}$$

$$=\frac{2\sin A.\cos A}{1-(1-2\sin A.\cos A)}$$

$$=\frac{2\sin A.\cos A}{1-1+2\sin A.\cos A}$$

$$=\frac{2\sin A.\cos A}{2\sin A.\cos A}$$

$$=1$$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

cosA tanA = sinA
sinA cosecA = 1
sinA cotA = cosA
CosA secA = sinA

उदाहरण 10

प्रमाणित गर्नुहोस् : $(5\cot^2\theta + 1)(2 - \sin^2\theta) = (5 - 4\sin^2\theta)(1 + 2\cot^2\theta)$

समाधान : यहाँ,

$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$ हुँदा $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta$ हुन्छ ।

$$\text{L.H.S} = (5\cot^2\theta + 1)(2 - \sin^2\theta)$$
$$= \left(5\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 1\right)(2 - \sin^2\theta)$$
$$= \left(\frac{5\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)(2 - \sin^2\theta)$$
$$= \{5(1 - \sin^2\theta) + \sin^2\theta\}\left(\frac{2 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$
$$= (5 - 5\sin^2\theta + \sin^2\theta)\left(\frac{2}{\sin^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$
$$= (5 - 4\sin^2\theta)(2\mathrm{cosec}^2\theta - 1)$$
$$= (5 - 4\sin^2\theta)\{2(1 + \cot^2\theta) - 1\}$$
$$= (5 - 4\sin^2\theta)(2 + 2\cot^2\theta - 1)$$
$$= (5 - 4\sin^2\theta)(1 + 2\cot^2\theta)$$

= R.H.S, प्रमाणित भयो ।

पहिलो पदको हरमा भएको $\sin^2\theta$ दोस्रो पदको हरमा लेख्ने ।

उदाहरण 11

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\dfrac{1}{\sec B + \tan B} + \dfrac{1}{\sec B - \tan B} = \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos B}$

अथवा $\dfrac{1}{\sec B + \tan B} - \dfrac{1}{\cos B} = \dfrac{1}{\cos B} - \dfrac{1}{\sec B - \tan B}$

समाधान : यहाँ,

$$\text{L.H.S} = \frac{1}{\sec B + \tan B} + \frac{1}{\sec B - \tan B}$$
$$= \frac{\sec B - \tan B + \sec B + \tan B}{(\sec B + \tan B)(\sec B - \tan B)}$$
$$= \frac{2\sec B}{1}$$
$$= 2\sec B$$
$$= \frac{2}{\cos B} = \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos B}$$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

वैकल्पिक विधि

$$\text{LHS} = \frac{1}{\sec B + \tan B} - \frac{1}{\cos B}$$
$$= \frac{\sec^2 B - \tan^2 B}{\sec B + \tan B} - \frac{1}{\cos B}$$
$$= \frac{(\sec B + \tan B)(\sec B - \tan B)}{\sec B + \tan B} - \frac{1}{\cos B}$$
$$= \sec B - (\tan B + \sec B)$$
$$= \frac{1}{\cos B} \square \frac{(\tan B + \sec B)}{1} = \frac{1}{\cos B} - \frac{(\tan B + \sec B)}{\sec^2 B - \tan^2 B}$$
$$= \frac{1}{\cos B} - \frac{(\tan B + \sec B)}{(\tan B + \sec B)(\tan B - \sec B)}$$
$$= \frac{1}{\cos B} - \frac{1}{\sec B - \tan B}$$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 2.2. (B)

1. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

(ख) $\frac{1}{\text{cosec}^2 A} + \frac{1}{\sec^2 A} = 1$

(ग) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

(घ) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$

(ङ) $\frac{1 - \tan A}{1 + \tan A} = \frac{\cot A - 1}{\cot A + 1}$

(च) $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{\cot^2 A - 1}{\cot^2 A + 1}$

(छ) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 1 - \sin\alpha\cos\alpha$

(झ) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$

(ञ) $\frac{\cot^2\beta}{1 + \cot^2\beta} = \cos^2\beta$

(ट) $\frac{\tan^2 A - \cot^2 A}{1 + \cot^2 A} = \tan^2 A - 1$

(ठ) $\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A\cos^2 A - \cos A\sin^2 A} = \text{cosec} A + \sec A$

(ड) $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} = 0$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{\text{cosec}\theta + \cot\theta} = \text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$

(ख) $\frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = \sec\theta - \tan\theta = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

(ग) $\frac{1}{\text{cosec}\alpha - \cot\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{cosec}\alpha + \cot\alpha$

(घ) $\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sqrt{\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$

(ख) $\sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(ग) $\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \text{cosec}\theta - \cot\theta$

(घ) $\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$

(ङ) $\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \text{cosec}\theta + \cot\theta$

(च) $\sqrt{\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}} = \tan A$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = (\sec x - \tan x)^2$ (ख) $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = (\sec\theta + \tan\theta)^2$

(ग) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = (\operatorname{cosec} x - \cot x)^2$ (घ) $(\operatorname{cosec} x + \cot x)^2 = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{1 + \cos\alpha} + \frac{1}{1 - \cos\alpha} = 2\operatorname{cosec}^2\alpha$

(ख) $\frac{1}{1 - \sin A} - \frac{1}{1 + \sin A} = 2\sin A.\sec^2 A$

(ग) $\frac{1}{1 - \cos A} - \frac{1}{1 + \cos A} = 2\cot A.\operatorname{cosec} A$

(घ) $\frac{\cos A}{1 - \sin A} + \frac{\cos A}{1 + \sin A} = 2\sec A$

(ङ) $\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$

(च) $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} = 1 + \sec A.\operatorname{cosec} A$

(छ) $\frac{\tan^2 A}{\tan A - 1} - \frac{\cot A}{1 - \tan A} = 1 + \sec A \operatorname{cosec} A$

(ज) $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} + \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A} = \frac{2}{\sin^2 A - \cos^2 A}$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1 - \cos^4 A}{\sin^4 A} = 2\operatorname{cosec}^2 A - 1$ (ख) $\frac{1 - \cos^4 A}{\sin^4 A} = 1 + 2\cot^2 A$

(ग) $2\tan^2 x + 1 = \frac{1 - \sin^4 x}{\cos^4 x}$ (घ) $\sec^4 A + \tan^4 A = 1 + \frac{2\tan^2 A}{\cos^2 A}$

7. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $(\sin\theta + \cos\theta)^3 = 3(\sin\theta + \cos\theta) - 2(\sin^3\theta + \cos^3\theta)$

(ख) $(1 + \sin\theta + \cos\theta)^2 = 2(1 + \sin\theta)(1 + \cos\theta)$

(ग) $\sec^6 A - \tan^6 A = 1 + 3\tan^2 A.\sec^2 A$

(घ) $\sin^8 A - \cos^8 A = (2\sin^2 A - 1)(1 - 2\sin^2 A.\cos^2 A)$

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A + 1} = \frac{1 - \sin A}{\cos A}$ (ख) $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \frac{1 + \cos A}{\sin A}$

(ग) $\frac{\text{cosecA} + \text{cotA} - 1}{1 - \text{cosecA} + \text{cotA}} = \frac{1 + \text{cosA}}{\text{sinA}} = \text{cosecA} + \text{cotA}$

(घ) $\frac{1 + \text{cosecA} + \text{cotA}}{1 + \text{cosecA} - \text{cotA}} = \frac{\text{cosecA} + \text{cotA} - 1}{\text{cotA} - \text{cosecA} + 1}$

(ङ) $\frac{1 - \text{secA} + \text{tanA}}{1 + \text{secA} - \text{tanA}} = \frac{\text{secA} + \tan A - 1}{\text{secA} + \tan A + 1}$

(च) $\frac{\sin\theta + \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} - \frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 - \sin\theta + \cos\theta} = 2(1 + \text{cosec}\theta)$

9. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $(\sec\theta + \tan\theta - 1)(\sec\theta - \tan\theta + 1) = 2\tan\theta$

(ख) $(\sec\theta - \tan\theta)\left(\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}\right) = 1$

(ग) $(1 + \text{cotA} - \text{cosecA})(1 + \text{tanA} + \text{secA}) = 2$

(घ) $\sec^2A.\text{cosec}^2A - \tan^2A - \cot^2A = 2$

10. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $(2 - \cos^2A)(1 + 2\cot^2A) = (2 + \cot^2A)(2 - \sin^2A)$

(ख) $(3 - 4\sin^2A)(1 - 3\tan^2A) = (3 - \tan^2A)(4\cos^2A - 3)$

(ग) $(3 - 4\cos^2A)(\text{cosec}^2A - 4\cot^2A) = (3 - \cot^2A)(1 - 4\cos^2A)$

11. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{\text{cosecA} - \text{cotA}} - \frac{1}{\text{sinA}} = \frac{1}{\text{sinA}} - \frac{1}{\text{cosecA} + \text{cotA}}$

(ख) $\frac{\text{cosA}}{\text{sinA} + \text{cosB}} + \frac{\text{cosB}}{\text{sinB} - \text{cosA}} = \frac{\text{cosA}}{\text{sinA} - \text{cosB}} + \frac{\text{cosB}}{\text{sinB} + \text{cosA}}$

2.3 त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको रूपान्तरण (Conversion of Trigonometric Ratios)

रूपान्तरण भन्नाले के बुझिन्छ ? के एउटा त्रिकोणमितीय अनुपातलाई अर्को त्रिकोणमितीय अनुपातमा रूपान्तरण गर्न सकिन्छ त ? सकिन्छ भने कसरी गर्ने ? के त्रिकोणमितीय अनुपातलाई रूपान्तरण गर्दा कोणमा परिवर्तन हुन्छ वा हुँदैन ? रूपान्तरण भनेको परिवर्तन हो । आधारभूत त्रिकोणमितीय अनुपातहरू र विभिन्न सर्वसमिकाहरूको प्रयोग गरी एउटा त्रिकोणमितीय अनुपातलाई अर्को अनुपातमा रूपान्तरण गर्न सकिन्छ । तर कोण परिवर्तन नगरीकन त्रिकोणमितीय अनुपातलाई रूपान्तरण गर्नुपर्छ ।

जस्तैः सर्वसमिकाहरूः $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$------ (i)

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$------ (ii)

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$------ (ii) आदि ।

त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको रूपान्तरण तल दिइएको तरिकाबाट गर्न सकिन्छ ।

(क) आधारभूत त्रिकोणमितीय सम्बन्धको प्रयोगबाट (By using basic trigonometric relation)

(ख) पाइथागोरस साध्यको प्रयोगबाट (By using Pythagoras theorem)

उदाहरण 1

सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई सन्दर्भ कोण θ लिई

(क) आधारभूत त्रिकोणमितीय सम्बन्धको प्रयोगबाट sinθ मा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(ख) पाइथागोरस साध्यको प्रयोगबाट sinθ मा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

(क) आधारभूत त्रिकोणमितीय सम्बन्धको प्रयोगबाट

$\sin\theta = \sin\theta$ ……… (i)

$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ……… (ii) {व्युत्क्रम(reciprocals) सम्बन्ध}

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ ……… (iii) (पाइथागोरियन सम्बन्ध)

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ ……… (iv) (व्युत्क्रम र पाइथागोरियन सम्बन्ध)

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ ……… (v) (भागफल र पाइथागोरियन सम्बन्ध)

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$ ……… (vi) (भागफल र पाइथागोरियन सम्बन्ध)

(ख) पाइथागोरस साध्यको प्रयोगबाट

दिइएको त्रिभुज ABC एउटा समकोण त्रिभुज हो जहाँ $\angle ABC = 90°$ छ । सन्दर्भ कोण $\angle CAB = \theta$ । मानौँ, $\sin\theta = K$

हामीलाई थाहा छ, $\sin\theta = \frac{p}{h} = \frac{BC}{AC}$ त्यसैले,

$\sin\theta = K$

$\frac{BC}{AC} = \frac{K}{1} = \frac{\sin A}{1}$

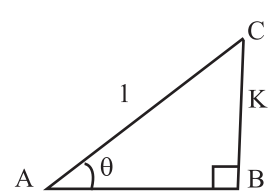
यदि (p) = BC = K = sinA, भए h = AC = 1 हुन्छ र b = ?

पाइथागोरस साध्यअनुसार, $AC^2 = BC^2 + AB^2$ ($\therefore h^2 = p^2 + b^2$)

$AB^2 = AC^2 - AB^2$

$AB^2 = 1 - K^2$

$\therefore AB = \sqrt{1-K^2}$



त्यसैले, $\cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{1-K^2}}{1} = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{BC}{AB} = \frac{K}{\sqrt{1-K^2}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$\cot\theta = \frac{b}{p} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{1-K^2}}{K} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{h}{b} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{1-K^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{h}{p} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{K} = \frac{1}{\sin\theta}$

उदाहरण 2

यदि $\cos\theta = \frac{4}{5}$ छ ।

(क) बाँकी अरू त्रिकोणमितीय अनुपातहरू कुन कुन हुन्, लेख्नुहोस् ।

(ख) बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$\cos\theta = \frac{4}{5}$

(क) बाँकी अरू त्रिकोणमितीय अनुपातहरू sine, tangent, cosecant, secant and cotangent हुन् ।

(ख) बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान

आधारभूत त्रिकोणमितीय सम्बन्धको प्रयोगबाट	पाइथागोरस साध्यको प्रयोगबाट (अर्को तरिका)
यहाँ, $\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$ $= \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$, $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$	$\cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{4}{5} = \frac{4k}{5k}$ यदि $b = 4k$ र $h = 5k$ भए p को मान पत्ता लगाउन पाइथागोरस साध्यअनुसार, $p = \sqrt{h^2 - b^2}$ $p = \sqrt{(5k^2) - (4k^2)}$ $p = \sqrt{25k^2 - 16k^2} = \sqrt{9k^2} = 3k$ $\sin\theta = \frac{p}{h} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$, $\text{cosec}\theta = \frac{h}{p} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{h}{b} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$, र $\cot\theta = \frac{b}{p} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$

उदाहरण 3

यदि $\tan\theta = \frac{4}{5}$ भए $\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta} = \frac{5}{14}$ प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\tan\theta = \frac{4}{5}$

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta} = \frac{5}{14}$

आधारभूत त्रिकोणमितीय सम्बन्धको प्रयोगबाट

$$\text{L.H.S} = \frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta + 2\cos\theta}{\cos\theta}}$$ (∴ हर र अंशमा cosθ ले भाग गर्दा)

$$= \frac{5\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 3\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 2\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{5\tan\theta - 3}{\tan\theta + 2}$$

$$= \frac{5 \times \frac{4}{5} - 3}{\frac{4}{5} + 2}$$

$$= \frac{\frac{20-15}{5}}{\frac{4+10}{5}}$$

$$= \frac{5}{14}$$ = R.H.S. प्रमाणित भयो ।

पाइथागोरस साध्यको प्रयोगबाट (अर्को तरिका)

यहाँ, $\tan\theta = \frac{4}{5}$

$$\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta} = \frac{5}{14}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{5} = \frac{p}{b}$$

$$\frac{p}{b} = \frac{4}{5}$$

अथवा, $p = 4k,\ b = 5k$ मानौँ

अत: $h = \sqrt{p^2 + b^2} = \sqrt{(4k)^2 + (5k)^2}$

$$= \sqrt{16k^2 + 25k^2} = \sqrt{41k^2} = k\sqrt{41}$$

L.H.S: $\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta} = \frac{5 \times \frac{p}{h} - 3 \times \frac{b}{h}}{\frac{p}{h} + 2 \times \frac{b}{h}} = \frac{\frac{5p-3b}{h}}{\frac{p+2b}{h}}$

$$= \frac{5p - 3b}{p + 2b}$$

$$= \frac{5 \times 4k - 3 \times 5k}{4k + 2 \times 5k} = \frac{5k}{14k} = \frac{5}{14}$$ = R.H.S. प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ र $\sin B = \frac{12}{13}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{-63}{16}$

समाधान : यहाँ, $\sin A = \frac{3}{5}$ र $\sin B = \frac{12}{13}$

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{63}{16}$

आधारभूत त्रिकोणमितीय सम्बन्धको प्रयोगबाट : हामीलाई थाहा छ,

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

फेरी, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ र $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$

बाँया पक्ष: $\frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{12}{5}}$

$$= \frac{\frac{3\times5+12\times4}{20}}{\frac{20-3\times12}{20}}$$

$$= \frac{15+48}{20-36} = \frac{63}{-16} = -\frac{63}{16}$$ प्रमाणित भयो ।

विचारणीय प्रश्न : के यसलाई पाइथागोरस साध्यको प्रयोगबाट समाधान गर्न सकिन्छ ? समाधान गरी नतिजा तुलना गर्नुहोस् ।

उदाहरण 5

यदि $\cos A = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ भए, tanA र cosecA को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, $\cos A = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$

tanA =? र cosecA = ?

$\cos A = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{b}{h}$

यदि $b = p^2 - q^2$ र $h = p^2 + q^2$ भए $p = ?$

पाइथागोरस साध्यअनुसार, $p = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{(p^2 + q^2)^2 - (p^2 - q^2)^2}$

अथवा, $p = \sqrt{p^4 + 2.p^2.q^2 + q^4 - (p^4 - 2.p^2.q^2 + q^4)}$

अथवा, $p = \sqrt{p^4 + 2.p^2.q^2 + q^4 - p^4 + 2.p^2.q^2 - q^4}$

अथवा, $p = \sqrt{4p^2q^2} = 2pq$

अब, $\tan A = \frac{p}{b} = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$ र $\text{cosec}A = \frac{p}{b} = \frac{p^2 + q^2}{2pq}$

उदाहरण 6

यदि $5\cos\theta + 12\sin\theta = 13$ भए प्रमाणित गर्नुहोस्: $\tan\theta = \frac{12}{5}$

समाधान : यहाँ, $5\cos\theta + 12\sin\theta = 13$

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\tan\theta = \frac{12}{5}$

आधारभूत त्रिकोणमितीय सम्बन्धको प्रयोगबाट	पाइथागोरस साध्यको प्रयोगबाट (अर्को तरिका)
यहाँ, $5\cos\theta + 12\sin\theta = 13$ दुवैतर्फ $\cos\theta$ ले भाग गर्दा अथवा, $5\frac{\cos\theta}{\cos\theta} + 12\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{13}{\cos\theta}$ अथवा, $5 + 12\tan\theta = 13\sec\theta$ दुवैतर्फ वर्ग गर्दा, $(5 + 12\tan\theta)^2 = (13\sec\theta)^2$ अथवा, $25 + 120\tan\theta + 144\tan^2\theta = 169\sec^2\theta$ अथवा, $25 + 120\tan\theta + 144\tan^2\theta = 169(1 + \tan^2\theta)$ अथवा, $25 + 120\tan\theta + 144\tan^2\theta = 169 + 169\tan^2\theta$ अथवा,$0 = 169\tan^2\theta - 144\tan^2\theta - 120\tan\theta + 169 - 25$ अथवा, $25\tan^2\theta - 120\tan\theta + 144 = 0$ अथवा, $(5\tan\theta)^2 - 2.5\tan\theta.12 + (12)^2 = 0$ अथवा, $(5\tan\theta - 12)^2 = 0$ अथवा, $5\tan\theta - 12 = 0$ अथवा, $\tan\theta = \frac{12}{5}$ प्रमाणित भयो ।	यहाँ, $5\cos\theta + 12\sin\theta = 13$ अथवा, $5\frac{b}{h} + 12\frac{p}{h} = 13$ अथवा, $\frac{5b + 12p}{h} = 13$ अथवा, $5b + 12p = 13h$ दुवैतर्फ वर्ग गर्दा, $(5b + 12p)^2 = (13h)^2$ अथवा, $25b^2 + 120pb + 144p^2 = 169(p^2 + b^2)$ अथवा, $0 = 169p^2 - 144p^2 - 120pb + 169b^2 - 25b^2$ अथवा, $25p^2 - 120pb + 144b^2 = 0$ अथवा, $(5p)^2 - 2.5p.12b + (12b)^2 = 0$ अथवा, $(5p - 12b)^2 = 0$ अथवा, $5p - 12b = 0$ अथवा, $\frac{p}{b} = \frac{12}{5}$ अथवा, $\tan\theta = \frac{12}{5}$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 2.3

1. त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको रूपान्तरण भन्नाले के बुझिन्छ ?

2. (क) सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई सन्दर्भ कोण θ लिई $\cos\theta$ मा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

   (ख) सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई सन्दर्भ कोण α लिई $\tan\alpha$ मा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

   (ग) सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई सन्दर्भ कोण θ लिई $\sec\theta$ मा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

   (घ) सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई सन्दर्भ कोण α लिई $\cot\alpha$ मा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

3. cotA लाई sinA मा रूपान्तरण गर्दा तलका मध्ये कुन ठिक हुन्छ ?

   (क) $\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$ (ख) $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$ (ग) $\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$ (घ) $\frac{1}{\sin A}$

4. secA लाई cotA मा रूपान्तरण गर्दा तलका मध्ये कुन ठिक हुन्छ ?

   (क) $\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$ (ख) $\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$ (ग) $\frac{1}{\cot A}$ (घ) $\frac{1-\cot^2 A}{1+\cot^2 A}$

5. यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ भए,

   (क) बाँकी अरू त्रिकोणमितीय अनुपातहरू कुन कुन हुन्, लेख्नुहोस् ।

   (ख) बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) यदि $\tan\theta = \frac{4}{5}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\cos\alpha = \frac{24}{25}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि $\text{cosec}A = \sqrt{2}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (क) यदि $\tan\theta = \frac{2}{3}$ भए $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(ख) यदि $\cot\theta = \frac{4}{3}$ भए $\frac{3\sin\theta - 2\cos\theta}{2\sin\theta + 3\cos\theta}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ भए $5\cos\theta + 4\tan\theta$ को मान निकाल्नुहोस् ।

(घ) यदि $\cos\theta = \frac{4}{5}$ भए $5\sin\theta + 3\cot\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) यदि $\cot\theta = \frac{12}{5}$ भए $13\cos\theta + 24\tan\theta$ को मान निकाल्नुहोस् ।

8. यदि $\cos A = \frac{4}{5}$ र $\sin B = \frac{12}{13}$ भए निम्न त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जकहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ख) $\cos A \cos B + \sin A \sin B$

(ग) $\sin A \cos B - \cos A \sin B$

(घ) $\cos A \cos B - \sin A \sin B$

(ङ) $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(च) $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \text{tab} B}$

9. यदि $(m^2 + n^2) \cos A = m^2 - n^2$ भए,

(क) $\cos A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $\sin A$ र $\tan A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. (क) यदि $\cot\beta = \frac{p}{q}$ भए, $\frac{p\cos\beta - q\sin\beta}{p\cos\beta + q\sin\beta} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ख) यदि $\sin\theta = \frac{a}{b}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस्: $\tan\theta = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

(ग) यदि $\tan\alpha = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ भए $\sin\alpha = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

11. (क) यदि $4\cos\theta + 3\sin\theta = 5$ भए प्रमाणित गर्नुहोस्: $\tan\theta = \frac{3}{4}$

(ख) यदि $12\sin\theta = 13 - 5\cos\theta$ भए $\tan\theta$ र $\cot\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $8\sin\theta - \cos\theta - 4 = 0$ भए प्रमाणित गर्नुहोस्: $\cot\theta = \frac{4}{3}$

(घ) यदि $3\sin A + 4\cos A = 5$ भए प्रमाणित गर्नुहोस्: $\cos A = \frac{4}{5}$

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्

2. (क) $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$, $\mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

(ख) $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$, $\sec\alpha = \sqrt{1+\tan^2\alpha}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$

(ग) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$ $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta-1}$, $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$, $\mathrm{cosec}\theta = \frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$,

(घ) $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$, $\mathrm{cosec}\alpha = \sqrt{1+\cot^2\alpha}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$, $\sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$

3. (ग) 4. (ख)

5. (क) cosine, tangent, cosec, secant and cotangent

(ख) $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\mathrm{cosec}\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$

6. (क) $\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{41}}$, $\mathrm{cosec}\theta = \frac{\sqrt{41}}{4}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{41}}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{4}$

(ख) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\mathrm{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec\theta = 2$

(ग) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\tan\alpha = \frac{7}{24}$, $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{25}{7}$, $\sec\alpha = \frac{25}{24}$, $\cot\alpha = \frac{24}{7}$

(घ) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan A = 1$, $\sec A = \sqrt{2}$ and $\cot A = 1$

7. (क) $-\frac{1}{5}$ (ख) $\frac{1}{18}$ (ग) 7 (घ) 7 (ङ) 22

8. (क) $\frac{63}{65}$ (ख) $\frac{56}{65}$ (ग) $-\frac{33}{65}$ (घ) $-\frac{16}{65}$ (ङ) $-\frac{63}{16}$ (च) $-\frac{33}{56}$

9. (क) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ (ख) $\frac{2mn}{m^2+n^2}$, $\frac{2mn}{m^2-n^2}$ 11. (ख) $\frac{12}{5}$, $\frac{5}{12}$

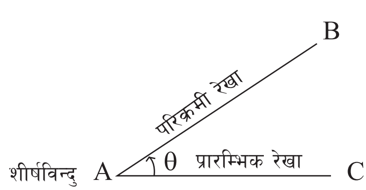
2.4 कोणको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Angle)

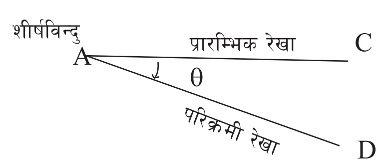
धनात्मक र ऋणात्मक कोणको अवधारणा विकासका लागि तलको क्रियाकलाप गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 1 घडीको सुई चल्ने दिशाका आधारमा कोणको वर्गीकरण

घडीको सुइ चल्ने दिशाका आधारमा कोणको वर्गीकरण धनात्मक र ऋणात्मक कोण कसरी परिभाषित गर्न सकिन्छ ? चित्रबाट प्रस्ट पार्नुहोस् ।

रुलर र सिसाकलमका सहायताबाट एउटा सिधा रेखा AC खिच्नुहोस् । उक्त रेखालाई प्रारम्भिक रेखा भन्नुहोस् । प्रारम्भिक रेखाको बायाँतिरको अन्तिम विन्दुबाट घडी घुम्ने दिशाको विपरीत दिशामा एउटा निश्चित कोण ($\theta = 60°, 50°, 45°$... आदि) बनाई परिक्रमी रेखा खिच्नुहोस् । अर्को चित्रमा, प्रारम्भिक रेखाबाट घडी घुम्ने दिशामा ($\theta = 60°, 50°, 45°$...आदि) बनाई परिक्रमी रेखा खिच्नुहोस् ।





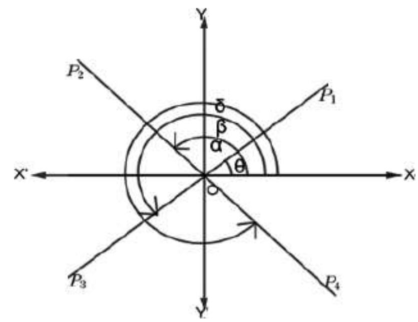
चित्रमा, $\angle CAB = \theta$ र $\angle CAD = (-\theta)$ छ । $\angle CAD = (-\theta)$ लेख्नुको अर्थ के हुनसक्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, परिक्रमी रेखा AB ले प्रारम्भिक रेखा AC सँग बनाएको धनात्मक कोण θ छ । त्यसैगरी, परिक्रमी रेखा AD ले प्रारम्भिक रेखा AC सँग बनाएको ऋणात्मक कोण $(-\theta)$ छ ।

चित्रमा $\angle CAB = \theta$ घडीको सुई घुम्नेभन्दा विपरीत दिशामा बनाइएको कोण हो, त्यसकारण θ धनात्मक छ । $\angle CAD = (-\theta)$, घडीको सुई घुम्ने दिशामा मापन गरिएको छ त्यसैले यो ऋणात्मक छ । अतः परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखासँग घडी घुम्ने दिशाको विपरीत दिशामा घुम्दा बनाएको कोणलाई धनात्मक कोण भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् । सँगैको चित्रमा देखाए जस्तै सरल रेखाहरू XX' र YY' खिच्नुहोस् । तिनीहरू बिचको कोण 90° हुने गरी विन्दु O मा काट्नुहोस् र तल सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।



(क) यसरी काटिँदा समतल सतह कति भागमा विभाजन भएको छ ?

(ख) प्रत्येक भागलाई के भनिन्छ ?

(ग) प्रत्येक भागमा कति डिग्रीको कोण बन्छ ?

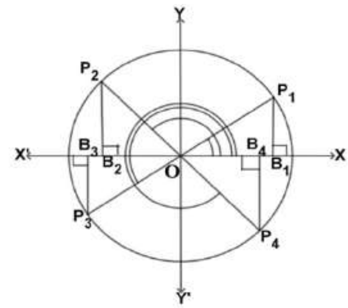
(घ) OX लाई प्रारम्भिक रेखा मानेर परिक्रमी रेखा OP लाई घडीको सुई घुम्ने दिशाको विपरीत दिशामा घुमाउँदा बनेका कोणहरू θ, α, β र δ क्रमशः कुन कुन चतुर्थांशमा बनेका छन् र तिनीहरू प्रत्येकको मान कति कति हुन सक्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

XOX' र YOY' दुइओटा सरल रेखाहरूले समतल सतहलाई चार बराबर भागमा विभाजन गरेको देख्न पाइन्छ र प्रत्येक भागलाई चतुर्थांश भनिन्छ । प्रत्येक भागमा 90° को कोण बन्छ ।

X – अक्षबाट दाहिनेपट्टिको माथिल्लो भाग XOY लाई पहिलो चतुर्थांश (first quadrant) भनिन्छ । यसमा 0° देखि 90° सम्मका कोणहरू पर्छन् । चित्रमा, $\angle XOY = 90°$ छ । Y – अक्षबाट देब्रेपट्टिको माथिल्लो भाग X'OY लाई दोस्रो चतुर्थांश (second quadrant) भनिन्छ । यसमा 90° देखि 180° सम्मका कोणहरू पर्छन् । चित्रमा, $\angle X'OY = 90°$ छ । X – अक्षको देब्रेपट्टिको तल्लो भागलाई तेस्रो चतुर्थांश (third quadrant) भनिन्छ । यसमा 180° देखि 270° सम्मका कोणहरू पर्छन् । चित्रमा, $\angle X'OY' = 90°$ छ । X – अक्षको दाहिनेपट्टिको तल्लो भागलाई चौथो चतुर्थांश (fourth quartile) भनिन्छ । यसमा 270° देखि 360° सम्मका कोणहरू पर्छन् । चित्रमा, $\angle XOY' = 90°$ छ । यसरी कोणहरू θ, α, β र δ क्रमशः पहिलो चतुर्थांश, दोस्रो चतुर्थांश, तेस्रो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांशमा बनेका छन् ।

2.4.1 सबै चतुर्थांशहरूमा कोणहरूको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Angles in All Quadrants)

क्रियाकलाप 3



उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् । चित्रमा देखाइए जस्तै रेखाहरू XOX' र YOY' विन्दु O मा परस्पर लम्ब बनाई काट्नुहोस् । प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखा OP लिई सुई घुम्ने दिशाको विपरीत दिशामा परिक्रमण गराउनुहोस् । यसरी परिक्रमण गराउँदा बन्ने कोणहरू चित्रमा देखाए जस्तै क्रमशः XOP_1, XOP_2, XOP_3 र XOP_4 बनाउनुहोस् । उक्त कोणहरू, XOP_1, XOP_2, XOP_3 र XOP_4 क्रमशः पहिलो दोस्रो, तेस्रो र चौथो चतुर्थांशमा परेका छन् । यी कोणहरू धनात्मक हुन्छन् किन ? कुन अवस्थामा बनेको भए यिनै कोणहरू ऋणात्मक हुन सक्ने थिए ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

यी सबै कोणहरू घडीको सुई घुम्ने दिशाको विपरीत दिशाबाट बनेका हुनाले धनात्मक कोणहरू भनिन्छ । यदि परिक्रमी रेखाले घडीको सुई घुम्ने दिशाबाट परिक्रमण गर्दा बनेका कोणहरू भएको भए यी सबै कोणहरू ऋणात्मक हुने थिए ।

माथिको चित्रमा, परिक्रमण रेखाका विन्दुहरू P_1, P_2, P_3 र P_4 बाट XOX' मा क्रमशः लम्ब रेखाहरू P_1B_1, P_2B_2, P_3B_3 and P_4B_4 खिचिएका छन् ।

(क) OP_1 पहिलो चतुर्थांशमा परेको हुनाले OB_1 र B_1P_1 दुबै धनात्मक छन् ।

(ख) OP_2 दोस्रो चतुर्थांशमा परेको हुनाले OB_2 उद्गम विन्दुबाट बायाँ पर्ने भएकाले ऋणात्मक र B_2P_2 X अक्षबाट माथिपट्टि लम्ब भएकोले धनात्मक हुन्छ ।

(ग) OP_3 तेस्रो चतुर्थांशमा परेको हुनाले OB_3 उद्गम विन्दुबाट बायाँ पर्ने भएकाले ऋणात्मक र B_3P_3 X अक्षबाट तलपट्टि लम्ब भएकोले ऋणात्मक हुन्छ ।

(घ) OP_4 चौथो चतुर्थांशमा परेको हुनाले OB_4 उद्गम विन्दुबाट दायाँ पर्ने भएकाले धनात्मक र B_4P_4 X अक्षबाट तलपट्टि लम्ब भएकोले ऋणात्मक हुन्छ ।

OP_1, OP_2, OP_3 र OP_4 लाई सधैँ धनात्मक लिने गरिन्छ, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

अब विभिन्न चतुर्थांशमा पर्ने कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातलाई कसरी परिभाषित गर्न सकिन्छ होला ?

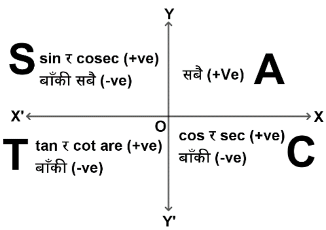
चित्रमा, एउटा परिक्रमण रेखा OP ले घडीको सुईको विपरीत दिशामा बनाएको कोण $POM = \theta$ लिउँ । विन्दु P बाट OX मा PM लम्ब खिचौँ । यस्तो अवस्थामा त्रिकोणमितीय अनुपातलाई निम्नअनुसार परिभाषित गर्न सकिन्छ तर चिह्न भने चतुर्थांशअनुसार फरक हुन्छ है याद गर्नुहोस् ।

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} \qquad \cos\theta = \frac{OM}{OP} \qquad \tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} \qquad \sec\theta = \frac{OP}{OM} \qquad \cot\theta = \frac{OM}{PM}$$

हामीलाई थाहा छ, OP सधैँ धनात्मक हुन्छ र किनहोला ? तर PM र OM चतुर्थाँशअनुसार धनात्मक वा ऋणात्मक हुने भएकाले विभिन्न चतुर्थांशमा त्रिकोणमितीय अनुपातको मान निम्नानुसार हुन्छ ।

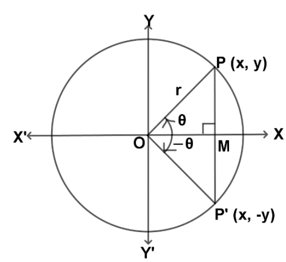
पहिलो चतुर्थांश	दोस्रो चतुर्थांश	तेस्रो चतुर्थांश	चौथो चतुर्थांश
सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान धनात्मक हुन्छ ।	दुईओटा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू sinθ र cosecθ को मान धनात्मक हुन्छ बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान ऋणात्मक हुन्छ ।	दुईओटा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू tanθ र cotθ को मान धनात्मक हुन्छ । बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान ऋणात्मक हुन्छ ।	दुईओटा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू cosθ र secθ को मान धनात्मक हुन्छ बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान ऋणात्मक हुन्छ ।



चित्र : CAST नियम

2.4.2 ऋणात्मक कोण (–θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात [Trigonometric ratios of Negative angle (–θ)]

उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् । सँगैको चित्रमा जस्तै प्रारम्भिक रेखा OX खिच्नुहोस् । परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको ∠POX = θ मानौँ र P को निर्देशाङ्क P(x, y) लिनुहोस् । विन्दु P को X निर्देशाङ्क र Y निर्देशाङ्क दुबै किन धनात्मक छन् ? छलफल गर्नुहोस् । OP = r अर्धव्यास लिएर वृत्त खिच्नुहोस् । विन्दु P बाट PM लम्ब OX खिच्नुहोस् र PM लाई लम्ब्याउँदा वृत्तको विन्दु P' मा काट्छ र P' को निर्देशाङ्क P'(x, –y) हुन्छ । किन P' को X निर्देशाङ्क धनात्मक र Y निर्देशाङ्क ऋणात्मक हुन्छ ? OP' ले OX सँग बनाएको ∠P'OX = (–θ) हुन्छ । त्यसैगरी, P'OX को मान किन (–θ) भए होला, किन (θ) भएन ? छलफल गर्नुहोस् ।



परिभाषाअनुसार, समकोणी त्रिभुज PMO मा

$$\sin\theta = \frac{\text{P को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{\text{P को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{x}{r}$$ हुन्छ ।

त्यसैगरी, $$\sin(-\theta) = \frac{\text{P' को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{\text{P' को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = \frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

यसैगरी अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मानहरू (–θ) स्थापित कसरी गर्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

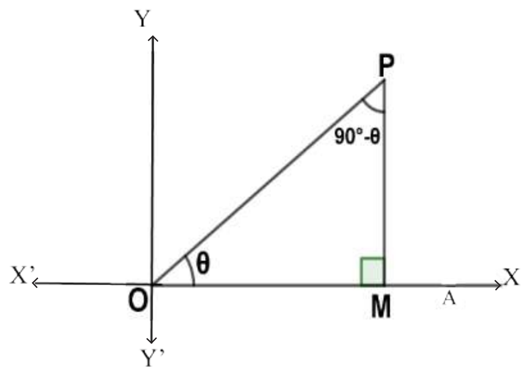
छोटकरीमा

विन्दु P को X निर्देशाङ्क र Y निर्देशाङ्क दुबै धनात्मक छन् किनकि दुबै निर्देशाङ्क पहिलो चतुर्थांशमा पर्छन् । i.e. P(x, y)

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

2.4.3 (90° – θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात [(Trigonometric Ratio of (90° - θ)]

उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् । सँगै दिइएको चित्रमा जस्तै उद्गमविन्दु O लाई केन्द्र मानी प्रारम्भिक रेखा OA खिच्नुहोस् । प्रारम्भिक रेखाबाट घडीको विपरीत दिशामा परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको कोण ∠POA = θ लिनुहोस् । विन्दु P बाट प्रारम्भिक रेखा OA मा लम्ब हुने गरी PM खिच्नुहोस् र त्रिभुज OPM बनाउनुहोस् ।



हामीलाई थाहा छ त्रिभुजका तीन भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ । चित्रमा, ∠PMO = 90° भएकाले बाँकी दुई कोणहरू MOP र OPM को योगफल पनि 90° नै हुन्छ । अब ∠MPO = (90° – θ)

∠POA = θ लाई सन्दर्भ कोण लिँदा OP = कर्ण, PM = लम्ब र OM = आधार हुन्छ ।

$\sin\theta = \frac{PM}{OP}$ $\quad\cos\theta = \frac{OM}{OP}$ $\quad\tan\theta = \frac{PM}{OM}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{OP}{PM}$ $\quad\sec\theta = \frac{OP}{OM}$ $\quad\cot\theta = \frac{OM}{PM}$

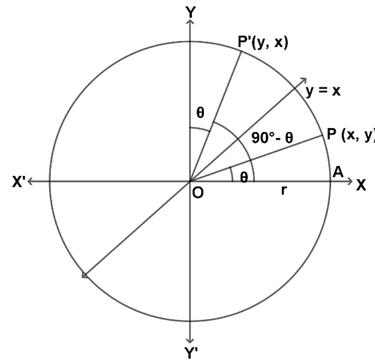
त्यसैगरी, ∠MPO = (90°- θ) लाई सन्दर्भ कोण लिँदा OP = कर्ण (h), OM = लम्ब (p), र PM = आधार (b) हुन्छ ।

$\sin(90° - \theta) = \frac{p}{h} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$ $\quad\cos(90° - \theta) = \frac{b}{h} = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \frac{p}{b} = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$ $\quad\text{cosec}(90° - \theta) = \frac{h}{p} = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$

$\sec(90° - \theta) = \frac{h}{b} = \frac{OP}{PM} = \text{cosec}\,\theta$ $\quad\cot(90° - \theta) = \frac{b}{p} = \frac{PM}{OM} = \tan\theta$

वैकल्पिक तरिका



सँगैको चित्रमा जस्तै, उद्गमविन्दु O लाई केन्द्र मानी प्रारम्भिक रेखा OX खिच्नुहोस्। उक्त परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको कोण ∠POX = θ लिनुहोस् । OP = r को अर्धव्यास लिएर एउटा वृत्त बनाउनुहोस्। विन्दु P (x, y) लाई $y = x$ को रेखामा परार्वतन गर्नुहोस् । यसरी परिवर्तन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्ब P' को निर्देशाङ्क (y, x) हुँदा ∠P'OY = ∠POX = θ हुन्छ । त्यसैले चित्रमा, ∠P'OX = 90° – θ हुन्छ । अब त्रिकोणमितीय अनुपातको परिभाषाबाट,

$$\sin\theta = \frac{\text{P को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{\text{P को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{x}{r}$$ हुन्छ ।

अब, $$\sin(90° - \theta) = \sin\angle P'OX = \frac{\text{P' को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = \frac{x}{OP} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

पुनः, $$\cos(90° - \theta) = \cos\angle P'OX = \frac{\text{P' को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = \frac{y}{OP} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

त्यस्तै, $$\tan(90° - \theta) = \frac{\sin(90° - \theta}{\cos(90° - \theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\cot(90° - \theta) = \frac{\cos(90° - \theta}{\sin(90° - \theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

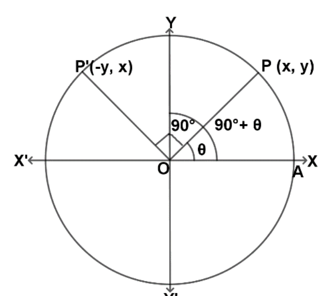
यसैगरी, $$\sec(90° - \theta) = \frac{1}{\cos(90° - \theta)} = \frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\theta$$

$$\text{cosec}(90° - \theta) = \frac{1}{\sin(90° - \theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

छोटकरीमा

sin (90° – θ) = cos θ	cos (90° – θ) = sin θ	tan (90° – θ) = cot θ
cosec (90° – θ) = sec θ	sec (90° – θ) = cosec θ	cot (90°– θ) = tan θ

2.4.4 (90° + θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात [(Trigonometric Ratio of (90° + θ)]



सँगैको चित्रमा जस्तै, उद्गमविन्दु O लाई केन्द्र मानी प्रारम्भिक रेखा OX खिच्नुहोस् । उक्त प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको कोण ∠POX = θ लिनुहोस्। P को निर्देशाङ्क (x, y) लिनुहोस् । अर्धव्यास (r) = OP बराबरको लम्बाइ लिई एउटा वृत्त खिच्नुहोस् । विन्दु P(x, y) लाई केन्द्र O बाट धनात्मक दिशामा 90° कोणले परिक्रमा गर्दा प्राप्त प्रतिविम्ब P' को निर्देशाङ्क P'$(-y, x)$ र ∠P'OX = 90°+ θ हुन्छ । अब त्रिकोणमितीय अनुपातको परिभाषाबाट,

$$\sin\theta = \frac{\text{P को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{\text{P को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{x}{r}$$ हुन्छ ।

अब, $\sin(90° + \theta) = \sin\angle P'OX = \frac{\text{P' को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = \frac{x}{OP} = \frac{x}{r} = \cos\theta$

पुनः, $\cos(90° + \theta) = \cos\angle P'OX = \frac{\text{P' को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = -\frac{y}{OP} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$

त्यस्तै, $\tan(90° + \theta) = \frac{\sin(90° + \theta)}{\cos(90° + \theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta$

$$\cot(90° + \theta) = \frac{1}{\tan(90° + \theta)} = \frac{1}{-\cot\theta} = -\tan\theta$$

यसैगरी, $\sec(90° + \theta) = \frac{1}{\cos(90° + \theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\text{cosec}\theta$

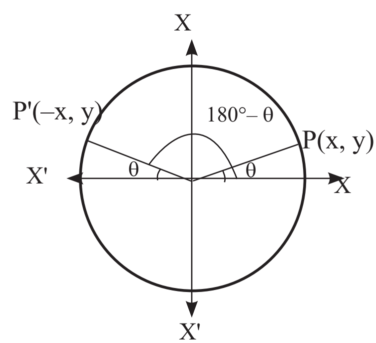
$$\text{cosec}(90° + \theta) = \frac{1}{\sin(90° + \theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

छोटकरी रूपमा

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$	$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$	$\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$
$\text{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$	$\sec(90° + \theta) = -\text{cosec}\theta$	$\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$

2.4.5 (180° – θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात [(Trigonometric Ratio of (180° – θ)]

सँगैको चित्रमा जस्तै, उद्गमविन्दु O लाई केन्द्र मानी प्रारम्भिक रेखा OX खिच्नुहोस् । उक्त प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको कोण $\angle POX = \theta$ लिनुहोस् । P को निर्देशाङ्क (x, y) लिनुहोस् । OP = r अर्धव्यास लिएर एउटा वृत्त खिच्नुहोस् । विन्दु P (x, y) लाई y – अक्षमा परावर्तन गर्दा प्राप्त प्रतिविम्ब P' को निर्देशाङ्क $P'(-x, y)$ र $\angle P'OX' = \theta$ हुन्छ । त्यसैले, $\angle P'OX = 180° - \theta$ भयो । अब त्रिकोणमितीय अनुपातको परिभाषाबाट,



$$\sin\theta = \frac{\text{P को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{\text{P को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{x}{r}$$ हुन्छ ।

अब, $\sin(180° - \theta) = \frac{\text{P' को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = \frac{y}{OP} = \frac{y}{r} = \sin\theta$

$$\cos(180° - \theta) = \frac{\text{P' को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = -\frac{x}{OP} = -\frac{x}{r} = -\cos\theta$$

त्यस्तै, $\tan(180° - \theta) = \frac{\sin(180° - \theta)}{\cos(180° - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

$\cot(180° - \theta) = \frac{1}{\tan(180° - \theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$

यसैगरी, $\sec(180° - \theta) = \frac{1}{\cos(180° - \theta)} = \frac{1}{-\cos\theta} = -\sec\theta$

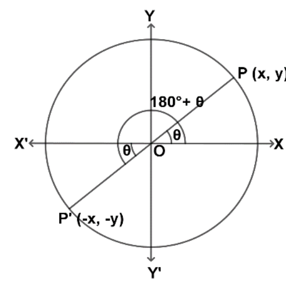
$\text{cosec}(180° - \theta) = \frac{1}{\sin(180° - \theta)} = \frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\theta$

छोटकरी रूपमा

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$	$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
$\text{cosec}(180° - \theta) = \text{cosec}\theta$	$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$	$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$

2.4.6 (180° + θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात [(Trigonometric Ratio of (180° + θ)]

सँगैको चित्रमा, उद्गमविन्दु O लाई केन्द्र मानी प्रारम्भिक रेखा OX खिच्नुहोस् । उक्त प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको कोण $\angle POX = \theta$ लिनुहोस् । P को निर्देशाङ्क (x, y) लिनुहोस् । $r = OP$ अर्धव्यास लिएर एउटा वृत्त खिच्नुहोस् । विन्दु P (x, y) लाई केन्द्र O बाट धनात्मक वा ऋणात्मक दिशामा 180° कोणले परिक्रमण गर्दा प्राप्त प्रतिविम्ब P' को निर्देशाङ्क $P'(-x, -y)$ र $\angle P'OX' = \theta$ पाउनुहुन्छ । त्यसैले, $\angle XOP' = 180° + \theta$ हुन्छ । अब त्रिकोणमितीय अनुपातको परिभाषाबाट,



$\sin\theta = \frac{\text{P को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \frac{\text{P को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP)}} = \frac{x}{r}$ हुन्छ ।

अब, $\sin(180° + \theta) = \frac{\text{P' को Y निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = \frac{-y}{OP} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$

$\cos(180° + \theta) = \frac{\text{P' को X निर्देशाङ्क}}{\text{अर्धव्यास (OP')}} = \frac{-x}{OP} = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$

त्यस्तै, $\tan(180° + \theta) = \frac{\sin(180° + \theta)}{\cos(180° + \theta)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

$\cot(180° + \theta) = \frac{1}{\tan(180° + \theta)} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

यसैगरी, $\sec(180° + \theta) = \frac{1}{\cos(180° + \theta)} = \frac{1}{-\cos\theta} = -\sec\theta$

$\text{cosec}(180° + \theta) = \frac{1}{\sin(180° + \theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\text{cosec}\theta$

छोटकरी रूपमा

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$
$\text{cosec}(180° + \theta) = -\text{cosec}\theta$	$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$	$\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

यसरी ऋणात्मक कोण $(-\theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात, $(90°-\theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात, $(90° + \theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात, $(180° - \theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात र $(180° + \theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपातहरू के हुन् र कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ भनी छलफल गरी ज्यामितीय रूपबाट निष्कर्ष पनि निकाल्यौँ । अब बाँकी रहेका त्रिकोणमितीय अनुपातहरू जस्तैः $(270° - \theta)$, $(270° + \theta)$, $(360° - \theta)$ र $(360° + \theta)$ पनि छलफल गरी ज्यामितीय रूपबाट निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् । यहाँ सूत्रात्मक रूपमा तल प्रस्तुत गरिएको छ ।

2.4.7. $(270° - \theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात [Trigonometric Ratios of $(270° - \theta)$]

हामीलाई थाहा छ, $270° = 180° + 90°$ त्यसैले, $(270° - \theta)$ लाई यसरी पनि लेख्न सकिन्छ,
$(180° + 90° - \theta)$

अब, $\sin(270° - \theta) = \sin\{180° + (90° - \theta)\} = -\sin(90° - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270° - \theta) = \cos\{180° + (90° - \theta)\} = -\cos(90° - \theta) = -\sin\theta$

पुनः $\tan(270° - \theta) = \dfrac{\sin((270° - \theta)}{\cos(270° - \theta)} = \dfrac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta$

$\cot(270° - \theta) = \dfrac{1}{\tan(270° - \theta)} = \dfrac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$

यसैगरी, $\sec(270° - \theta) = \dfrac{1}{\cos(270° - \theta)} = \dfrac{1}{-\sin\theta} = -\text{cosec}\,\theta$

$\text{cosec}(270° - \theta) = \dfrac{1}{\sin(270° - \theta)} = \dfrac{1}{-\cos\theta} = -\sec\theta$

2.4.7 $(270° + \theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात [Trigonometric Ratios of $(270° + \theta)$]

यहाँ, $\sin(270° + \theta) = \sin\{180° + (90° + \theta)\} = -\sin(90° + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270° + \theta) = \cos(180° + (90° + \theta) = -\cos(90° + \theta) = --\sin\theta) = \sin\theta$

$\tan(270° + \theta) = \dfrac{\sin((270° + \theta)}{\cos(270° + \theta)} = \dfrac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta$

$\cot(270° + \theta) = \dfrac{1}{\tan(270° + \theta)} = \dfrac{1}{-\cot\theta} = -\tan\theta$

यसैगरी, $\sec(270° + \theta) = \dfrac{1}{\cos(270° + \theta)} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta$

$\text{cosec}(270° + \theta) = \dfrac{1}{\sin(270° + \theta)} = \dfrac{1}{-\cos\theta} = -\sec\theta$

2.4.8 (360°– θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात [Trigonometric Ratios of (360° – θ)]

यहाँ, $\sin(360° - \theta) = \sin\{270° + (90° - \theta)\} = -\cos(90° - \theta) = -\sin\theta$

$\cos(360° - \theta) = \cos\{270° + (90° - \theta)\} = \sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cot(360° - \theta) = \dfrac{1}{\tan(360° - \theta)} = \dfrac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$

यसैगरी, $\sec(360° - \theta) = \dfrac{1}{\cos(360° - \theta)} = \dfrac{1}{-\cos\theta} = \sec\theta$

$\text{cosec}(360° - \theta) = \dfrac{1}{\sin(360° - \theta)} = \dfrac{1}{-\sin\theta} = -\text{cosec}\,\theta$

2.4.9 (360° + θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात कसरी निकाल्न सकिन्छ छलफल गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

(360° + θ) लाई θ लिन सकिन्छ, किनकि त्रिकोणमितीय फलनहरूलाई आवधिक (Periodic) फलन भनिन्छ । त्यसैले $\sin(360° + \theta) = \sin\{270° + (90° + \theta)\} = -\cos(90° + \theta) = \sin\theta$ हुन्छ ।

$\cos(360° + \theta) = \cos(270° + (90° + \theta)) = \sin(90° + \theta) = \cos\theta$

$\tan(360° + \theta) = \dfrac{\sin(360° + \theta)}{\cos(360° + \theta)} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

$\cot(360° + \theta) = \dfrac{1}{\tan(360° + \theta)} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

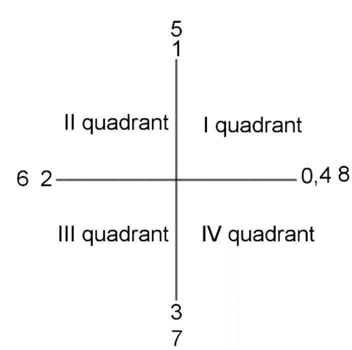
$\sec(360° + \theta) = \dfrac{1}{\cos(360° + \theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

$\text{cosec}(360° + \theta) = \dfrac{1}{\sin(360° + \theta)} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\theta$

त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (n × 90° ± θ) को सामान्यकृत नियम

त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका धेरै सम्बन्धहरूलाई स्थापित गरिसक्यौं जसलाई तल दिइएअनुसार सामान्यकृत गर्न सकिन्छ । जस्तै :

(क)	(i) $\sin(-\theta)$	$= \sin(0 \times 90° - \theta)$	$= -\sin\theta$
	(ii) $\cos(-\theta)$	$= \cos(0 \times 90° - \theta)$	$= \cos\theta$
	(iii) $\tan(-\theta)$	$= \tan(0 \times 90° - \theta)$	$= -\tan\theta$
(ख)	(i) $\sin(180° - \theta)$	$= \sin(2 \times 90° - \theta)$	$= \sin\theta$
	(ii) $\cos(180° - \theta)$	$= \cos(2 \times 90° - \theta)$	$= -\cos\theta$
	(iii) $\tan(180° - \theta)$	$= \tan(2 \times 90° - \theta)$	$= -\tan\theta$
(ग)	(i) $\sin(180° + \theta)$	$= \sin(2 \times 90° + \theta)$	$= -\sin\theta$
	(ii) $\cos(180° + \theta)$	$= \cos(2 \times 90° + \theta)$	$= -\cos\theta$
	(iii) $\tan(180° + \theta)$	$= \tan(2 \times 90° + \theta)$	$= \tan\theta$
(घ)	(i) $\sin(360° - \theta)$	$= \sin(4 \times 90° - \theta)$	$= -\sin\theta$



(ii) $\cos(360° - \theta) = \cos(4 \times 90° - \theta) = \cos\theta$

(iii) $\tan(360° - \theta) = \tan(4 \times 90° - \theta) = -\tan\theta$

(ङ) (i) $\sin(360° + \theta) = \sin(4 \times 90° + \theta) = \sin\theta$

(ii) $\cos(360° + \theta) = \cos(4 \times 90° + \theta) = \cos\theta$

(iii) $\tan(360° + \theta) = \tan(4 \times 90° + \theta) = \tan\theta$

माथिको नतिजाबाट निम्न नियमहरू लेख्न सकिन्छ ।

1. $90°$ को गुणाङ्कहरू सबै जोर सङ्ख्या i.e. $n = 2, 4, 6, \ldots$ भएमा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू परिवर्तन हुँदैनन् अर्थात् उही त्रिकोणमितीय अनुपातहरू रहन्छन् ।

   जस्तै : sin → sin, cos → cos, tan → tan

   cosece → cosece, sec → sec, cot → cot

2. चिह्न (+, –) CASTअनुसार नै हुन्छ ।
3. त्रिकोणमितीय अनुपातहरू $(n \times 90° \pm \theta)$ सँग n को जुनसुकै जोर सङ्ख्याको लागि पनि सत्य हुन्छ । त्यसैगरी,

(क) (i) $\sin(90° - \theta) = \sin(1 \times 90° - \theta) = \cos\theta$

(ii) $\cos(90° - \theta) = \cos(1 \times 90° - \theta) = \sin\theta$

(iii) $\tan(90° - \theta) = \tan(1 \times 90° - \theta) = \cot\theta$

(ख) (i) $\sin(90° + \theta) = \sin(1 \times 90° + \theta) = \cos\theta$

(ii) $\cos(90° + \theta) = \cos(1 \times 90° + \theta) = -\sin\theta$

(iii) $\tan(90° + \theta) = \tan(1 \times 90° + \theta) = -\cot\theta$

(घ) (i) $\sin(270° - \theta) = \sin(3 \times 90° - \theta) = -\cos\theta$

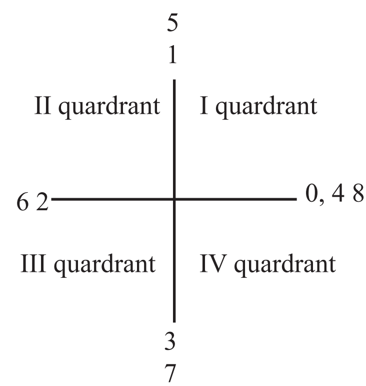
(ii) $\cos(270° - \theta) = \cos(3 \times 90° - \theta) = -\sin\theta$

(iii) $\tan(270° - \theta) = \tan(3 \times 90° - \theta) = \cot\theta$

(ङ) (i) $\sin(270° + \theta) = \sin(3 \times 90° + \theta) = -\cos\theta$

(ii) $\cos(270° + \theta) = \cos(3 \times 90° + \theta) = \sin\theta$

(iii) $\tan(270° + \theta) = \tan(3 \times 90° + \theta) = -\cot\theta$



माथिको नतिजाबाट निम्नलिखित नियमहरू लेख्न सकिन्छ ।

1. $90°$ को गुणाङ्कहरू सबै बिजोर सङ्ख्या i.e. $n = 1, 3, 5, \ldots$ भएमा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू परिवर्तन हुन्छन् अर्थात् उही त्रिकोणमितीय अनुपातहरू रहदैनन् ।

   जस्तैः sin → cos, cos → sin, tan → cot

   cosece → sec, sec → cosec, cot → tan

   जस्तैः $\sin(270° - \theta) = \sin(3 \times 90° - \theta) = -\cos\theta$ (किनकि $(3 \times 90° - \theta)$ तेस्रो चतुर्थांशमा पर्छ जहाँ $\tan\theta$ र $\cot\theta$ धनात्मक हुन्छन् बाँकी सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरू ऋणात्मक हुन्छन् त्यसैले $\cos\theta$ ऋणात्मक भयो ।

2. चिह्न (+, –) CAST अनुसार नै हुन्छ ।
3. त्रिकोणमितीय अनुपातहरू $(n \times 90° \pm \theta)$ सँग n को जुनसुकै बिजोर सङ्ख्याको लागि पनि सत्य हुन्छ ।

उदाहरण 1

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\tan\theta + \tan(180° - \theta) + \cot(90° + \theta) + \cot(90° - \theta) = 0$

समाधान : यहाँ,

बायाँ पक्ष (L.H.S) = $\tan\theta + \tan(180° - \theta) + \cot(90° + \theta) + \cot(90° - \theta)$

$= \tan\theta + (-\tan\theta) + (-\tan\theta) + \tan\theta$

$= \tan\theta - \tan\theta - \tan\theta + \tan\theta$

$= 0$

= R.H.S, प्रमाणित भयो ।

> ∵ CAST अनुसार, $(180° - \theta)$ र $(90° + \theta)$ दुबै दोस्रो चतुर्थांशमा पर्छन् जहाँ sin र cosec मात्र धनात्मक हुन्छन बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरू ऋणात्मक हुन्छन्, त्यसैले $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$, $\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$

उदाहरण 2

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin^2\theta + \cos^2\alpha + \sin^2(90° - \theta) + \cos^2(90° - \alpha) = 2$

समाधान : यहाँ,

बायाँ पक्ष (L.H.S) = $\sin^2\theta + \cos^2\alpha + \sin^2(90° - \theta) + \cos^2(90° - \alpha)$

$= \sin^2\theta + \cos^2\alpha + \{\sin(90° - \theta)\}^2 + \{\cos(90° - \alpha)\}^2$

$= \sin^2\theta + \cos^2\alpha + (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1 + 1 = 2$

= R.H.S, प्रमाणित भयो ।

> ∵ CAST अनुसार, $(90° - \theta)$ पहिलो चतुर्थांशमा पर्छ जहाँ सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरू धनात्मक हुन्छन्, त्यसैले $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ र $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

उदाहरण 3

मान पत्ता लगाउनुहोस् : $\tan 120°.\tan 135° + \sin 120°.\cos 180°$

समाधान : यहाँ,

$\tan 120°.\tan 135° + \sin 120°.\cos 180°$

$= \tan(180° - 60°)\tan(180° - 45°) + \sin(180° - 60°)\cos(180° - 0°)$

$= (-\tan 60°).(-\tan 45°) + \sin 60°(-\cos 0°)$

$= (-\sqrt{3}).(-1) + \frac{\sqrt{3}}{2}.(-1)$

$= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

> ∵ $(180° - \theta)$ दोस्रो चतुर्थांशमा पर्छ जहाँ sin र cosec मात्र धनात्मक हुन्छन बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरू ऋणात्मक हुन्छन्, त्यसैले $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ र $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

उदाहरण 4

सरल गर्नुहोस्: $\frac{\cos(270° - A).\sec(180° - A).\sin(270° + A)}{\cos(90° + A).\cos(180° - A).\sin(180° + A)}$

समाधान : यहाँ,

$$= \frac{\cos(270° - A).\ \sec(180° - A).\ \sin(270° + A)}{\cos(90° + A).\ \cos(180° - A).\ \sin(180° + A)}$$

$$= \frac{(-\sin A).\ (-\sec A).\ (-\cos A)}{(-\sin A).\ (-\cos A).(-\sin A)}$$ {∵ CAST अनुसार }

$$= \frac{\sec A}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{\sin A.\cos A}$$ (कारण के हुन्छ ?)

$= \text{cosec}A.\sec A$ (कसरी ?)

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin 112° + \cos 74° - \sin 68° + \cos 106° = 0$

समाधान : यहाँ,

बायाँ पक्ष (L.H.S)

$= \sin 112° + \cos 74° - \sin 68° + \cos 106°$

$= \sin(180° - 68°) + \cos 74° - \sin 68° + \cos(180° - 74°)$

$= \sin 68° + \cos 74° - \sin 68° + (-\cos 74°)$

$= \sin 68° + \cos 74° - \sin 68° - \cos 74°$

$= 0$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

RHS मा कसरी 0 ल्याउने होला ?
RHS मा 0 ल्याउनको लागि LHS मा सरल गरी भएका सबै पदहरू धनात्मक र ऋणात्मक भई एकआपसमा काटिनु पर्छ ।

∵ (180°– θ) दोस्रो चतुर्थांशमा पर्छ जहाँ sin र cosec मात्र धनात्मक हुन्छन् बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरू ऋणात्मक हुन्छन्, त्यसैले $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ हुन्छ ।

उदाहरण 6

मान पत्ता लगाउनुहोस् : $2\cos^2 135° + \sin 150° + \frac{1}{2}\sin 180° + \tan^2 135$

समाधान : यहाँ,

$= 2\cos^2 135° + \sin 150° + \frac{1}{2}\sin 180° + \tan^2 135$

$= 2\{\cos(180° - 45°)\}^2 + \sin(180° - 30°) + \frac{1}{2}\sin(180° - x0°) + \{\tan(180° - 45°)\}^2$

$= 2(-\cos 45°)^2 + \sin 30° + \frac{1}{2}\sin 0° + (-\tan 45°)^2$ {∵ CAST अनुसार}

$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 + (-1)^2$

$= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 1$

$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

उदाहरण 7

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos 240° \sin 300° - \sin 330° \cos 300° = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

समाधान : यहाँ,

L.H.S = $\cos 240° \sin 300° - \sin 330° \cos 300°$

$= \cos (180° + 60°) \sin (360° – 60°) – \sin (360° – 30°) \cos (360° – 60°)$

$= (– \cos 60°) (– \sin 60°) – (– \sin 30°) \cos 60°$ {∵ CAST अनुसार}

$= \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ = R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 8

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos\frac{\pi^c}{8} + \cos\frac{3\pi^c}{8} + \cos\frac{5\pi^c}{8} + \cos\frac{7\pi^c}{8} = 0$

समाधान : यहाँ,

$= \cos\frac{\pi^c}{8} + \cos\frac{3\pi^c}{8} + \cos\frac{5\pi^c}{8} + \cos\frac{7\pi^c}{8}$

$= \cos\frac{\pi^c}{8} + \cos\frac{3\pi^c}{8} + \cos\frac{8\pi^c - 3\pi^c}{8} + \cos\frac{8\pi^c - \pi^c}{8}$

$= \cos\frac{\pi^c}{8} + \cos\frac{3\pi^c}{8} + \cos\left(\frac{8\pi^c}{8} - \frac{3\pi^c}{8}\right) + \cos\left(\frac{8\pi^c}{8} - \frac{\pi^c}{8}\right)$ {∴ किनकि, कोणका पदहरू छुट्टाइएको}

$= \cos\frac{\pi^c}{8} + \cos\frac{3\pi^c}{8} + \cos\left(\pi^c - \frac{3\pi^c}{8}\right) + \cos\left(\pi^c - \frac{\pi^c}{8}\right)$

$= \cos\frac{\pi^c}{8} + \cos\frac{3\pi^c}{8} + \left\{-\cos\left(\frac{3\pi^c}{8}\right)\right\} + \left\{-\cos\left(\frac{\pi^c}{8}\right)\right\}$ {∵ CAST अनुसार, $\cos (180° – \theta) = – \cos \theta$}

$= \cos\frac{\pi^c}{8} + \cos\frac{3\pi^c}{8} - \cos\frac{3\pi^c}{8} - \cos\frac{\pi^c}{8}$

$= 0$

= R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 9

दिइएको अबस्थामा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

$x \cot A. \tan (90° + A) = \tan (90° + A). \cot (180° – A) + x \sec (90° + A) \operatorname{cosec} A$

समाधान : यहाँ,

अथवा, $x \cot A. (– \cot A) = (– \cot A) (– \cot A) + x (– \operatorname{cosec} A) \operatorname{cosec} A$

अथवा, $– x \cot^2 A = \cot^2 A – x \operatorname{cosec}^2 A$

अथवा, $x \operatorname{cosec}^2 A – x \cot^2 A = \cot^2 A$

अथवा, $x (\operatorname{cosec}^2 A – \cot^2 A) = \cot^2 A$

अथवा, $x \times 1 = \cot^2 A$

अथवा, $x = \cot^2 A$

अतः $x = \cot^2 A$

अभ्यास 2.4

1. खाली ठाउँ भर्नुहोस् :

(क) $\sin(-\theta) = \cdots\cdot$ (ख) $\tan(-\theta) = \cdots\cdot$ (ग) $\sin(90° - A) = \cdots\cdot$

(घ) $\sin(90° + A) = \cdots\cdot$ (ङ) $\sec(180° - \theta) = \cdots\cdot$ (च) $\tan(180° + \theta) = \cdots\cdot$

(छ) $\cos(270° - \theta) = \cdots\cdot$ (ज) $\cot(270° + \theta) = \cdots\cdot$ (झ) $\text{cosec}(360° - \theta) = \cdots\cdot$

2. जोडा मिलाउनुहोस् :

Sin (90° + A)	– cosA
cos (180° – A)	– cot A
tan (180° + A)	cosA
cosec (270° – A)	tan A
Sec (270° + A)	cosecA
Cot (360° – A)	– secA
Cot (360° + A)	cotA

3. CAST अवधारणाको सम्बन्धमा चित्रात्मक व्याख्या गर्नुहोस् ।

4. हिसाब गरी मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) sec 150° (ख) tan 120° (ग) sin 225° (घ) sec 210° (ङ) tan 240°

(च) cot 210° (छ) cos 870° (ज) sin 1230° (झ) cosec (–1200°)

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sec A \,.\, \text{cosec}(90° - A) - \tan A \cot(90° - A) = 1$

(ख) $\sin\theta.\sec\left(\frac{\pi^c}{2} - \theta\right) - \text{cosec}\theta.\cos\left(\frac{\pi^c}{2} - \theta\right) = 0$ $\left\{\frac{\pi}{2} = 90°\right\}$

(ग) $\tan\theta + \tan(180° - \theta) + \cot\left(\frac{\pi^c}{2} + \theta\right) - \cot\theta\left(\frac{\pi^c}{2} + \theta\right) = 0$

(घ) $\sin\theta \,.\, \sin(180° - \theta) - \cos\theta \,.\, \cos(\pi^c - \theta) = 1$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).\ \text{cosec}\ \theta - \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).\ \sin\theta = 0$

(ख) $\tan^2\alpha \,.\, \sec^2(90° - \alpha) - cosec^2(90° - \alpha).\ \sin^2\alpha = 1$

(ग) $\frac{\tan^2\theta}{\cos^2(90° - \theta)} - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2(90° - \theta)} = 1$

7. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\sin(90° + \theta) \times \operatorname{cosec}(90° + \theta)}{\cos\theta \times \cot(90° + \theta)}$

(ख) $\dfrac{\tan(90° + \theta) \times \sec(270° - \theta) \times \sin(-\theta)}{\cos(180°+\theta) \times \cos(-\theta)}$

(ग) $\dfrac{\sin(180° - \theta).\ \tan(90° + \theta).\ \sec(90° + \theta)}{\sin(90° + \theta).\ \cos(180° - \theta).\ \cot(180° - \theta)}$

(घ) $\dfrac{\sin(90° + \theta).\ \cos(-\theta).\cot(180° - \theta)}{\cos(360° - \theta).\ \cos(180° + \theta).\ \tan(90° - \theta)}$

(ङ) $\dfrac{\tan(180° - \alpha) \times \cot(90° - \alpha) \times \cos(360° - \alpha)}{\sin(-\alpha) \times \tan(180° - \alpha) \times \tan(90° + \alpha)}$

(च) $\dfrac{\cos(270° - \theta) \times \sec(180° - \theta) \times \sin(270° + \theta)}{\cos(90° + \theta) \times \cos(180° - \theta) \times \sin(180° + \theta)}$

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\cos 70°.\sin 20° + \cos 20°.\sin 70° = 1$

(ख) $\cos 72° + \cos 144° - \sin 18° + \sin 54° = 0$

(ग) $\sin 112° + \cos 74° + \cos 106° - \sin 68° = 0$

(घ) $\cos 20° + \cos 40° + \cos 140° + \cos 160° = 0$

(ङ) $\cos 306° + \cos 234° + \cos 162° + \cos 18° = 0$

(च) $\cos 12° + \cos 64° + \cos 116° + \cos 168° = 0$

9. मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $2\cos^2 45° + \sin 30° + \frac{1}{2}\cos 180° - \tan 45°$

(ख) $\cos^2 120° + \sin^2 150° + \sin 120° + \cos 150°$

(ग) $\sin^2 120° - \sin^2 135° - \tan^2 150° - \cos^2 120°$

(घ) $\sin^2 180° + \sin^2 150° + \sin^2 135° + \sin^2 120° + \sin^2 90°$

(ङ) $\sec^2 180° + 2\cos^2 45° + \operatorname{cosec}^2 135° + \tan^2 45° - 4\sin^2 60°$

10. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\cos 120° \times \text{Sin } 150° + \cos 330° \times \sin 300° = -1$

(ख) $\sin 420° \times \cos 390° + \cos(-300°) \times \sin(-330°) = 1$

(ग) $\cos 240° \times \sin 300° - \sin 330° \times \cos 300° = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

(घ) $\cos 570° .\ \sin 510° + \sin 330° .\ \cos 390° = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

(ङ) $\sin 660° \times \sin 330° + \cos 120° \times \sin 150° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

11. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin^2\frac{\pi^c}{4} + \sin^2\frac{3\pi^c}{4} + \sin^2\frac{5\pi^c}{4} + \sin^2\frac{7\pi^c}{4} = 2$

(ख) $\cos^2\frac{\pi^c}{8} + \cos^2\frac{3\pi^c}{8} + \cos^2\frac{5\pi^c}{8} + \cos^2\frac{7\pi^c}{8} = 2$

(ग) $\sin^2\frac{\pi^c}{8} + \sin^2\frac{3\pi^c}{8} + \sin^2\frac{5\pi^c}{8} + \sin^2\frac{7\pi^c}{8} = 2$

12. दिइएको अवस्थामा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $x \tan 150° + x \sin 120°.\cos 180° = 2 \cot 120°$

(ख) $x \cos A.\ \text{Cot}\,(90° + A) - \sin(90° + A) + \text{cosec}\,(90° + A) = 0$

(ग) $x \tan\theta\ .\ \text{Cot}\,(90° + \theta) - \cot(90° + \theta).\ \tan(180° - \theta) = \sec\theta\ \text{cosec}\,(270° - \theta)$

(घ) $\sec(90° + A)\ \text{cosec}\,A + \tan(90° + A)\cot(180° - A) = x \cot A \tan(90° + A)$

(ङ) $x \tan(180° + \theta).\ \text{Cot}\,(90° - \theta) = \tan(180° - \theta).\ \tan(360° - \theta) + x\ \text{cosec}\,(90° - \theta).\ \text{cosec}\,(90° + \theta)$

परियोजना कार्य

समस्या : पहिलो, दोस्रो, तेस्रो र चौथो चतुर्थांशका आधारमा त्रिकोणमितीय अनुपातको सम्बन्ध तथा नतिजामा धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (–) चिह्न पहिचानमा सहजता हुने गरी $(90° \pm \theta)$, $(180° \pm \theta)$, $(270° \pm \theta)$, $(360° \pm \theta)$ र $(-\theta)$ का त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाहरूको सम्बन्ध अध्ययन गरी लेख्नुहोस् ।

आवश्यक सामग्री : A4 साइज पेपर, चार्टपेपर, ग्राफ र विभिन्न रङका साइनपेन वा मार्कर, आदि ।

प्रक्रिया : शिक्षकले कक्षाकोठामा सहजीकरण गर्दाका विषयवस्तुलाई समावेश गरी विभिन्न पाठ्यपुस्तकहरूको अध्ययन र इन्टरनेटका सहायताबाट CAST नियम लेख्न लगाउनुहोस् । $(90° \pm \theta)$, $(180° \pm \theta)$, $(270° \pm \theta)$, $(360° \pm \theta)$ र $(-\theta)$ सँग त्रिकोणमितीय अनुपातको सम्बन्ध लेख्नुहोस् । अध्ययन एवम् छलफल पश्चात् तयार पारिएको सामग्रीलाई चार्टपेपर, पावरपोइन्ट वा अन्य उपयुक्त विधिका माध्यमबाट प्रस्तुत गर्नुहोस् । यदि शिक्षक एवम् साथीहरूबाट उपयुक्त सुझावहरू प्राप्त भएमा ती सुझावहरू समेट्नुहोस् ।

समयसीमा : शिक्षकको निर्देशनअनुसार

उत्तर

1. (क) $-\sin\theta$ (ख) $-\tan\theta$ (ग) $\cos A$ (घ) $\cos A$ (ङ) $-\sec\theta$ (च) $\tan\theta$
(छ) $-\sin\theta$ (ज) $-\tan\theta$ (झ) $-\text{cosec}\,\theta$ 2 - 3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ख) $-\sqrt{3}$ (ग) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (घ) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ङ) $\sqrt{3}$
(च) $\sqrt{3}$ (छ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ज) $\frac{1}{2}$ (झ) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

7. (क) $-\text{cosec}\,\theta$ (ख) $\text{cosec}\,\theta\sec\theta$ (ग) $\sec^2\theta$ (घ) 1 (ङ) $\tan\alpha$
(च) $\sec\theta\ \text{cosec}\,\theta$ 9. (क) 0 (ख) $-\frac{1}{2}$ (ग) $-\frac{1}{3}$ (घ) $\frac{5}{2}$
(ङ) 2 12. (क) $\frac{4}{5}$ (ख) $\tan A$ (ग) $\cot^2\theta$ (घ) $\tan^2 A$ (ङ) $-\tan^2\theta$

पाठ 3

ज्यामिति (Geometry)

3.1 परिचय (Introduction)

फ्रान्सेली गणितीज्ञ रेने डेकार्टेले बीजगणित र ज्यामितिलाई जोडेर गणितको नयाँ शाखाको आविष्कार गरे जसलाई निर्देशाङ्क ज्यामिति भनिन्छ। उनकै नामबाट कार्टेसियन निर्देशाङ्क प्रणालीको (Cartesian co-ordinates system) नाम राखिएको हो ।

कार्टेसियन निर्देशाङ्क प्रणालीमा समतल सतहका प्रत्येक विन्दुलाई सङ्ख्यात्मक निर्देशाङ्क (x, y) ले जनाइन्छ। निर्देशाङ्क ज्यामितिको विकासले सर आइज्याक न्यूटन र विल्हेम लेबनिजलाई क्याल्कुलसको आविष्कार गर्न सहयोग गऱ्यो । बीजगणित र ज्यामितिका लागि साझा भाषा प्रदान गरेर कार्टेसियन निर्देशाङ्क प्रणालीको प्रयोग भौतिक विज्ञान, कम्प्युटर विज्ञान, इन्जिनियरिङ र खगोल विज्ञानमा गरेको पाइन्छ ।

3.1.1 विन्दुपथको अवधारणा (Concept of locus)

क्रियाकलाप 1

समस्या :

x	0	1	...	...	...
$\text{y} = x + 1$	1	2	...	...	...

दिइएको तालिका पूरा गरी विन्दुहरू (0,1), (1, 2), ... लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्। अब, ती विन्दुहरूलाई जोड्नुहोस् । कस्तो चित्र बन्यो ? निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

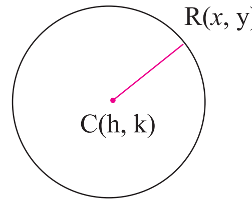
आवश्यक सामग्री : ग्राफ पेपर

प्रक्रिया : प्रत्येक विद्यार्थीले विन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा जोड्दा कस्तो रेखा बन्यो ? एउटै प्रकारको रेखा बन्यो वा बनेन छलफल गरी यकिन गर्नुहोस् ।

निष्कर्ष : ....

माथिका विन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी जोड्दा सिधारेखा बन्छ जुन विन्दुपथ हो । विन्दुपथ भनेको विन्दु हिँड्ने नियम जनाउने समीकरण हो । माथिको उदाहरणमा $\text{y} = x + 1$ एउटा विन्दुपथ हो । त्यसैले विन्दुपथ जनाउन रेखा, सर्त वा समीकरण प्रयोग गरिन्छ ।

एउटा उदाहरण हेरौँ : चित्रमा, कुनै निश्चित विन्दु C बाट बराबर दुरीमा पर्ने विन्दु P को विन्दुपथ वृत्त हो ।
निश्चित विन्दु वृत्तको केन्द्र विन्दु र बराबर दुरी वृत्तको अर्धव्यास हो ।



यहाँ, चलायमान विन्दु $P(x, y)$ हो भने निश्चित सर्त बराबर दुरी हो ।
त्यसैले विन्दु $P(x, y)$ को विन्दुपथ वृत्त हो ।

दिइएको वृत्तको केन्द्र $C(h, k)$ र परिधिको कुनै विन्दु $P(x, y)$ छ भने,

दुरी सूत्रबाट,

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

दुबैतर्फ वर्ग गर्दा,

$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$ ले वृत्तको समीकरण दिन्छ । यसलाई विन्दुपथको समीकरण भनिन्छ ।

उदाहरण 1

विन्दु (1, 2) समीकरण $x^2 + y^2 + kx + 3y + 6 = 0$ भएको विन्दुपथमा पर्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $(x, y) = (1, 2)$ समीकरण $x^2 + y^2 + kx + 3y + 6 = 0$ मा पर्ने भएकाले

$1^2 + 2^2 + k \times 1 + 3 \times 2 + 6 = 0$

or, $1 + 4 + k + 6 + 6 = 0$ [$\because x$ र y को मान प्रतिस्थापन गर्दा]

or, $17 + k = 0$

or, $k = -17$

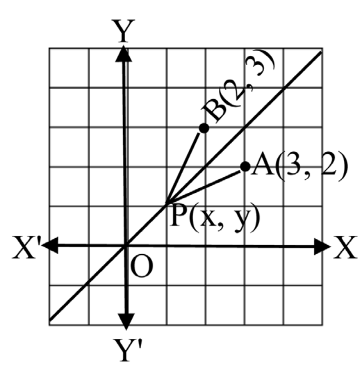
$\therefore$ $k = -17$

उदाहरण 2

विन्दुहरू (3, 2) र (2, 3) बाट बराबर दुरीमा भएर चल्ने विन्दुको विन्दुपथ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौँ, विन्दुहरू $A(3, 2)$ र $B(2, 3)$ बाट बराबर दुरी भएर चल्ने विन्दु P को निर्देशाङ्क (x, y) हो ।



अब, $AP = BP$

or, $AP^2 = BP^2$

or, $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$

or, $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9$

or, $-6x + 4x - 4y + 6y = 0$

or, $-2x + 2y = 0$

or, $-2(x - y) = 0$

$\therefore x - y = 0$ आवश्यक विन्दुपथको समीकरण हो ।

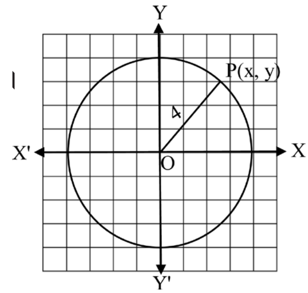
बिचारणीय प्रश्न : -2 कता हरायो ?

उदाहरण 3

उद्गम विन्दुबाट 4 एकाइ दुरीमा चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौँ, $P(x, y)$ उद्गम विन्दु $O(0, 0)$ बाट 4 एकाइ दुरीमा चल्ने विन्दु हो ।



अब, $OP = 4$

or, $OP^2 = 4^2$

or, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 16$

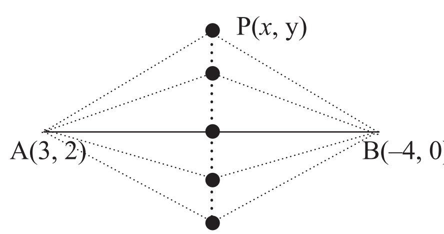
$\therefore x^2 + y^2 = 16$ आवश्यक विन्दुपथको समीकरण हो ।

उदाहरण 4

विन्दुहरू $A(3, 2)$ र $B(-4, 0)$ लाई जोड्दा बन्ने रेखा AB को लम्बार्धकको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौँ, विन्दुहरू $A(3, 2)$ र $B(-4, 0)$ लाई जोड्दा बन्ने रेखा AB को लम्बार्धक भएर चल्ने विन्दु P को निर्देशाङ्क (x, y) हो ।



अब, $AP = BP$

अथवा, $AP^2 = BP^2$

अथवा, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = (x + 4)^2 + (y - 0)^2$

अथवा, $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 8x + 16 + y^2$

अथवा, $-6x - 8x - 4y + 13 - 16 = 0$

अथवा, $-14x - 4y - 3 = 0$

$\therefore 14x + 4y - 3 = 0$ आवश्यक विन्दुपथको समीकरण हो ।

उदाहरण 5

X– अक्षदेखिको दुरी, विन्दु (2, 4) देखिको दुरीभन्दा दोब्बर हुने गरी चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौँ, X– अक्षमा पर्ने विन्दु $A(x, 0)$, विन्दु $B(2, 4)$ र चल विन्दु $P(x, y)$ छ ।

प्रश्नअनुसार,

$AP = 2BP$

अथवा, $AP^2 = 4BP^2$

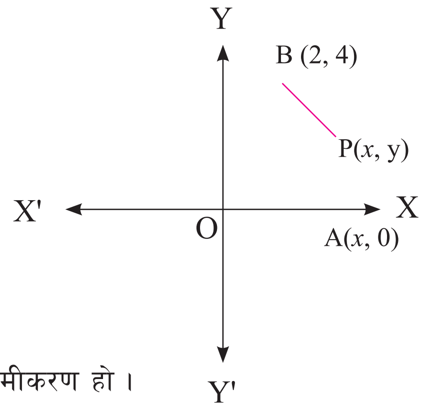
अथवा, $(x - x)^2 + (y - 0)^2 = 4\{(x - 2)^2 + (y - 4)^2\}$

अथवा, $y^2 = 4(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16)$

अथवा, $y^2 = 4x^2 - 16x + 4y^2 - 32y + 80$

अथवा, $4x^2 + 4y^2 - y^2 - 16x - 32y + 80 = 0$

$\therefore 4x^2 + 3y^2 - 16x - 32y + 80 = 0$ आवश्यक विन्दुपथको समीकरण हो ।



उदाहरण 6

यदि A(2, 3) र B(–4, 7) दिइएका विन्दुहरू र P(x, y) चल विन्दु भए $PA^2 = AB^2$ को अवस्थामा विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

यहाँ, A(2, 3) र B(–4, 7) छन् । चल विन्दु P को निर्देशाङ्क (x, y) छ ।

अब, $PA^2 = AB^2$

अथवा, $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (-4 - 2)^2 + (7 - 3)^2$

अथवा, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 36 + 16$

अथवा, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 - 36 - 16 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 6y - 39 = 0$ आवश्यक विन्दुपथको समीकरण हो ।

अभ्यास 3.1 (A)

1. विन्दुपथ भनेको के हो, लेख्नुहोस् ।
2. विन्दुहरू (3, 2), (4, 3), (5, 0) र (0, –5) मध्ये कुन कुन विन्दुहरू $x^2 + y^2 = 25$ भएको विन्दुपथमा पर्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. यदि विन्दुपथ $kx^2 - 2y^2 - 2x + 3y - 3 = 0$ मा विन्दु (2, –1) पर्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. यदि विन्दुपथ $3x - y + 7 = 0$ मा विन्दु (k – 1, k + 3) पर्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. विन्दु (–2, 1) र (4, 1) बाट बराबर दुरीमा चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. विन्दु (1, 2) र Y– अक्षबाट बराबर दुरीमा चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. उद्गम विन्दुबाट 4 एकाइ दुरीमा चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. विन्दु (–2, 5) र Y – अक्षदेखि बराबर दुरी भएर चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. दुई अचल विन्दु A(7, 0) र B(–7, 0) र एउटा चल विन्दु P छ भने तल दिइएको अवस्थामा विन्दु P को विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् : $PA^2 + PB^2 = AB^2$

10. A(3, 2) र B(7, –4) विन्दुहरू र P(*x*, y) चल विन्दु भए तलका अवस्थामा विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

    (क) PA = PB   (ख) AP = 2PB   (ग) $PA^2 = AB^2$

11. विन्दु (2, –3) देखिको भन्दा विन्दु (0, 2) देखिको दुरी आधा हुने गरी चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. विन्दु (0, –2) देखिको भन्दा विन्दु (1, 0) देखिको दुरी दोब्बर हुने गरी चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. विन्दु (0, 2) देखिको भन्दा विन्दु (3, 0) को दुरी तेब्बर हुनेगरी चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. X - अक्षदेखिको भन्दा विन्दु (3, 4) देखिएको दुरी दोब्बर हुने गरी चल्ने विन्दुको विन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. Y - अक्षदेखिको भन्दा विन्दु (–2, 5) देखिको दुरी आधा हुने गरी चल्ने विन्दुको विन्दुपथ पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1 – 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।   3. 3   4. $-\frac{1}{2}$ 5. $x = 1$

6. $y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ 7. $x^2 + y^2 - 16 = 0$ 8. $y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$

9. $x^2 + y^2 = 49$ 10. (क) $2x - 3y - 13 = 0$ (ख) $3x^2 + 3y^2 - 50x + 30y + 117 = 0$

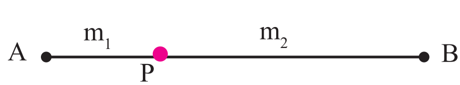
(ग) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 39 = 0$ 11. $3x^2 + 3y^2 + 4x - 22y + 3 = 0$

12. $3x^2 + 3y^2 + 2x + 16y + 15 = 0$ 13. $8x^2 + 8y^2 + 6x - 36y + 27 = 0$

14. $x^2 - 3y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$ 15. $3x^2 + 4y^2 + 16x - 40y + 116 = 0$

3.1.2 रेखाखण्डलाई निश्चित अनुपातमा विभाजन गर्ने विन्दु (Point which Divides a Line Segment in a Ratio)

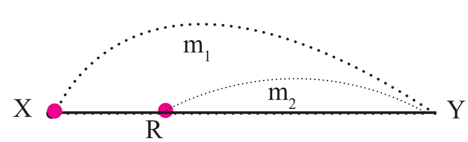
a) PA = 2 cm, PB = 3 cm, AB = 5 cm



$AP = km_1$; $PB = km_2$

भित्रपट्टिबाट AB लाई P ले विभाजन गर्दा ।

b) RX = 10 cm, RY = 15 cm, XY = 25 cm



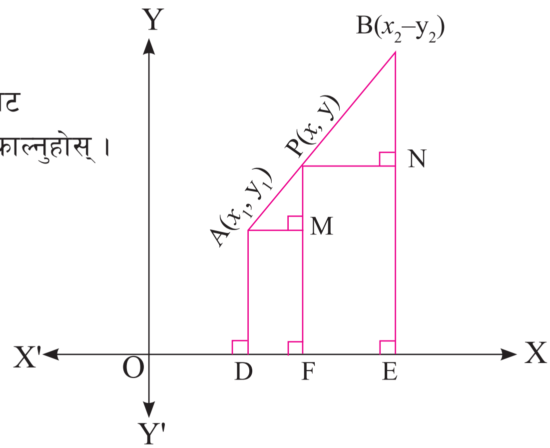
$XY = km_1$, $YR = km_2$

बाहिरपट्टिबाट XR लाई Y ले विभाजन गर्दा ।

मानौं, $AP = km_1$ र $PB = km_2$ भए, AP र PB बिचको अनुपात $AP:PB = m_1:m_2$ हुन्छ । त्यस्तै, $XY = km_1$ र $RY = km_2$ भए, XY र RY बिचको अनुपात $XY : RY = m_1:m_2$ हुन्छ । P ले AB लाई भित्रबाट विभाजन गर्छ किनकि P, AB को भित्रपट्टि पर्छ । त्यस्तै, Y ले XR लाई बाहिरबाट विभाजन गर्छ किनकि Y, XR को बाहिरपट्टि पर्छ ।

खण्डसूत्र (Section Formula)

मानौं, चित्रमा $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ जोड्ने रेखालाई $P(x,y)$ ले $m_1:m_2$ को अनुपातमा भित्रबाट विभाजन गरेको छ । $P(x, y)$ को निर्देशाङ्क निकाल्नुहोस् ।



अब, $AD\perp OX$, $BE\perp OX$, $PF\perp OX$, $AM\perp PF$ र $PN\perp BE$ खिचौं ।

चित्रमा, $AM = DF = OF - OD = x - x_1$,

$PN = FE = OE - OF = x_2 - x$

$PM = PF - MF = PF - AD = y - y_1$

$BN = BE - NE = BE - PF = y_2 - y$

$AP = m_1$ र $BP = m_2$ छ ।

समकोणी त्रिभुजहरू ΔPMA र ΔBNP समरूप हुन्छन् ।

$\frac{AM}{PN} = \frac{AP}{BP}$ [∵ समरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरूको अनुपात भएकाले ।]

अथवा, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m_1}{m_2}$

अथवा, $m_2x - m_2x_1 = m_1x_2 - m_1x$

अथवा, $m_2x + m_1x = m_1x_2 + m_2x_1$

अथवा, $x(m_1 + m_2) = m_1x_2 + m_2x_1$

अथवा, $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

फेरि, $\frac{PM}{BN} = \frac{AP}{BP}$ [∵ समरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरूको अनुपात भएकाले ।]

अथवा, $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m_1}{m_2}$

अथवा, $m_2y - m_2y_1 = m_1y_2 - m_1y$

अथवा, $m_2y + m_1y = m_1y_2 + m_2y_1$

अथवा, $y(m_1 + m_2) = m_1y_2 + m_2y_1$

अथवा, $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

$\therefore (x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

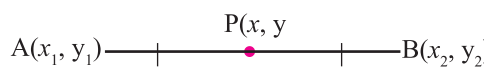
अतः रेखाखण्ड AB लाई विभाजन गर्ने विन्दुको निर्देशाङ्क $P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$ हुन्छ ।

केही विशेष अवस्थाहरू (Some Special Cases)

विचारणीय प्रश्न : माथिको अवस्थामा यदि $m_1 = m_2$ छ भने P कस्तो विन्दु हो ?

A. यदि P($\underline{x}$, y) विन्दुहरू $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ जोड्ने रेखाखण्डको मध्यविन्दु हो भने AP = BP र $AP:BP = m_1:m_2 = 1:1$ हुन्छ ।

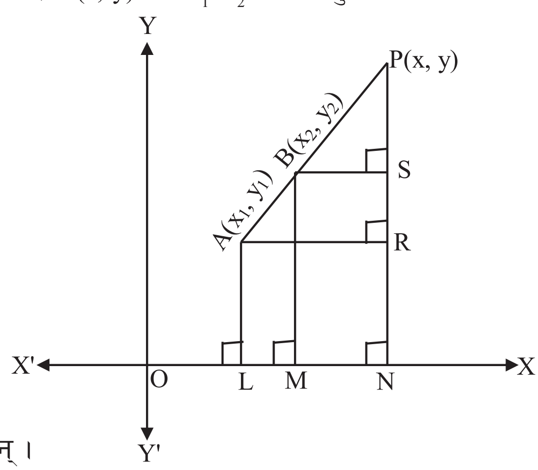
$$\therefore P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$
$$= \left(\frac{1.x_2 + 1.x_1}{1 + 1}, \frac{1.y_2 + 1.y_1}{1 + 1}\right)$$
$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



$\therefore$ P(x, y) लाई मध्य विन्दुको निर्देशाङ्क भनिन्छ ।

B. यदि P(x, y) ले विन्दुहरू $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरबाट $m_1:m_2$ को अनुपातमा विभाजन गर्दा $AP:BP = m_1:m_2$ हुन्छ ।

मानौँ, चित्रमा $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ जोड्ने रेखालाई P(x, y) ले $m_1:m_2$ को अनुपातमा बाहिरबाट विभाजन गरेको छ ।



अर्थात् $\frac{AP}{BP} = \frac{m_1}{m_2}$

अब, AL⊥OX, BM⊥OX, PN⊥OX,

AR⊥PN र BS⊥PN खिचौँ ।

चित्रमा, $AR = LN = ON - OL = x - x_1$,

$BS = MN = ON - OM = x - x_2$

$PR = PN - RN = PN - AL = y - y_1$

$PS = PN - SN = PN - BM = y - y_2$

$AP = m_1$ र $PB = m_2$ छ ।

समकोणी त्रिभुजहरू ΔPAR र ΔBSP समरूप हुन्छन् ।

$\frac{AR}{BS} = \frac{AP}{BP}$ [∵ समरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरूको अनुपात भएकाले ।]

अथवा, $\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m_1}{m_2}$

अथवा, $m_2(x - x_1) = m_1(x - x_2)$

अथवा, $m_2x - m_2x_1 = m_1x - m_1x_2$

अथवा, $m_1x_2 - m_2x_1 = m_1x - m_2x$

अथवा, $m_1x_2 - m_2x_1 = x(m_1 - m_2)$

अथवा, $x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$

फेरि, $\frac{PR}{PS} = \frac{AP}{BP}$ [∵ समरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरूको अनुपात भएकाले ।]

अथवा, $\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{m_1}{m_2}$

अथवा, $m_2 (y - y_1) = m_1(y - y_2)$

अथवा, $m_2y - m_2y_1 = m_1y - m_1y_2$

अथवा, $m_1y_2 - m_2y_1 = m_1y - m_2y$

अथवा, $m_1y_2 - m_2y_1 = y(m_1 - m_2)$

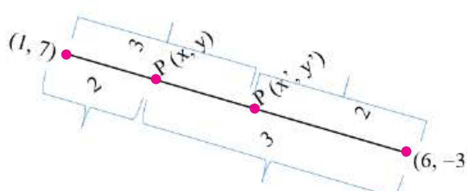
अथवा, $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

$\therefore (x, y) = (\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2})$

अत: रेखाखण्ड AB लाई बाहिरबाट विभाजन गर्ने विन्दुको निर्देशाङ्क $P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

विन्दुहरू (1, 7) र (6, –3) जोड्ने रेखाखण्डलाई 2:3 को अनुपातमा विभाजन गर्ने बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान : यहाँ,

दिइएका विन्दुहरू, $(x_1, y_1) = (1, 7)$

$(x_2, y_2) = (6, -3)$

$m_1 : m_2 = 2:3$

$(x, y) = ?$

अब, सूत्रअनुसार,

$(x, y) = (\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2})$

$= (\frac{2\times6+3\times1}{2+3}, \frac{2\times(-3)+3\times7}{2+3})$

$= (\frac{12+3}{5}, \frac{-6+21}{5})$

$= (\frac{15}{5}, \frac{15}{5})$

$= (3, 3)$

Alternatively

यदि $(x_1, y_1) = (6, -3)$ र

$(x_2, y_2) = (1, 7)$

$m_1 : m_2 = 2:3$

$(x, y) = ?$

अब, सूत्रअनुसार,

$(x, y) = (\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2})$

$= (\frac{2 \times 1 + 3 \times 6}{2+3}, \frac{2 \times 7 + 3 \times (-3)}{2+3})$

$= (\frac{2+18}{5}, \frac{14-9}{5}) = (\frac{20}{5}, \frac{5}{5}) = (4, 1)$

अत: दिइएको रेखाखण्डलाइ 2:3 को अनुपातमा विभाजन गर्ने बिन्दुको निर्देशाङ्क (4, 1) हुन्छ ।

अत: दिइएको रेखाखण्डलाइ 2:3 को अनुपातमा विभाजन गर्ने विन्दुको निर्देशाङ्क (3, 3) र (4, 1) हुन्छन् ।

उदाहरण 2

विन्दुहरू (5, –2) र (9, 6) जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरबाट 3:1 को अनुपातमा विभाजन गर्ने विन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$(x_1, y_1) = (5, -2)$
$(x_2, y_2) = (9, 6)$
$m_1 : m_2 = 3:1$ (बाहिरबाट)
$(x, y) = ?$

अब, सूत्रअनुसार,

$$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right) = \left(\frac{3 \times 9 - 1 \times 5}{3 - 1}, \frac{3 \times 6 - 1 \times (-2)}{3 - 1}\right)$$

$$= \left(\frac{27 - 5}{2}, \frac{18 + 2}{2}\right) = \left(\frac{22}{2}, \frac{20}{2}\right) = (11, 10)$$

अतः दिइएको रेखाखण्डलाई बाहिरबाट 3:1 को अनुपातमा विभाजन गर्ने विन्दुको निर्देशाङ्क (11, 10) छ ।

उदाहरण 3

विन्दु (3, –2) ले विन्दुहरू (1, 4) र (–2, 16) जोड्ने रेखाखण्डलाई कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ ?

समाधान : यहाँ,

$(x_1, y_1) = (1, 4)$
$(x_2, y_2) = (-3, 16)$
$(x, y) = (3, -2)$

अनुपात $m_1 : m_2 = ?$

अब, $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

अथवा, $3 = \frac{m_1(-3) + m_2(1)}{m_1 + m_2}$

अथवा, $3m_1 + 3m_2 = -3m_1 + m_2$

अथवा, $6m_1 = -2m_2$

अथवा, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

$\therefore m_1 : m_2 = 1:-3$

∴ विन्दु (3, –2) ले विन्दुहरू (1, 4) र (–3, 16) जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरबाट 1:3 को अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

विचारणीय प्रश्न : कसरी बाहिरबाट विभाजन गर्छ भन्ने थाहा पाउनुभयो ?

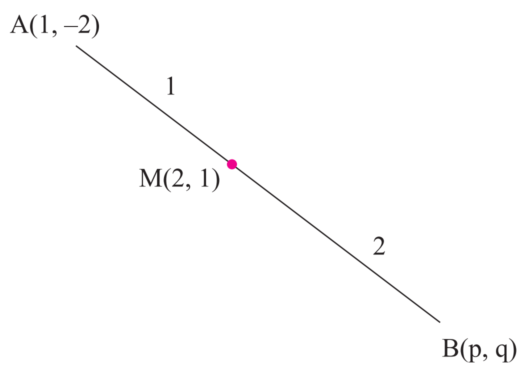
के यो प्रश्नलाई $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ लिएर समाधान गर्न सकिन्छ ? साथीहरूबिच छलफल गर्दै समाधान गर्नुहोस् र उत्तर उही आउँछ कि फरक फरक आउँछ जाँच्नुहोस् ।

उदाहरण 4

विन्दु (2, 1) ले विन्दुहरू (1, –2) र (p, q) जोड्ने रेखाखण्डलाई 1:2 को अनुपातमा विभाजन गर्छ भने (p, q) को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, विन्दुहरू A(1, –2) र B(p, q) जोड्ने रेखालाई विन्दु M(2, 1) ले 1:2 को अनुपातमा विभाजन गर्छ ।



$(x, y) = (2, 1)$

$(x_1, y_1) = (1, -2)$

$(x_2, y_2) = (p, q)$

$m_1:m_2 = 1:2$

अब, खण्ड सूत्रअनुसार,

$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1+m_2}$

अथवा, $2 = \frac{1 \times p + 2 \times 1}{1 + 2}$

अथवा, $2 = \frac{p + 2}{3}$

अथवा, $p + 2 = 6$

$\therefore p = 4$

त्यस्तै, $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

अथवा, $1 = \frac{1 \times q + 2 \times (-2)}{1 + 2}$

अथवा, $1 = \frac{q - 4}{3}$

अथवा, $q - 4 = 3$

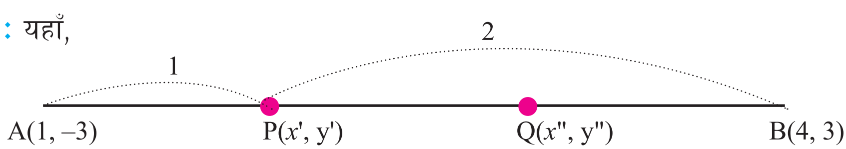
$\therefore q = 7$

तसर्थ, $(p, q) = (4, 7)$

उदाहरण 5

विन्दुहरू (1, –3) र (4, 3) जोड्ने रेखाखण्डलाई तीन बराबर खण्डमा विभाजन गर्ने विन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,



मानौँ, A(1, –3) र B(4, 3) जोड्ने रेखाखण्डलाई विन्दुहरू P(x', y') र Q(x'', y'') ले तीन बराबर खण्डमा विभाजन गर्छ ।

विन्दु P का लागि, $(x_1, y_1) = (1, -3)$

$(x_2, y_2) = (4, 3)$

$m_1:m_2 = AP : BP = AP : (PQ + BQ) = AP : (AP + AP) = AP : 2AP = 1 : 2$

$(x, y) = (x', y') = ?$

अब,

$$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right) = \left(\frac{1\times 4 + 2\times 1}{1+2}, \frac{1\times 3 + 2\times(-3)}{1+2}\right)$$

$$= \left(\frac{4+2}{3}, \frac{3-6}{3}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{-3}{3}\right) = (2, -1)$$

त्यस्तै, PB को मध्यविन्दु Q हुने भएकाले,

$(x_1, y_1) = (2, -1)$

$(x_2, y_2) = (4, 3)$

मध्यविन्दु $(x'', y'') = ?$

अब,

$$(x'', y'') = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) = (3,1)$$

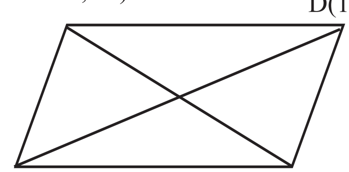
अतः विन्दुहरू (1, –3) र (4, 3) जोड्ने रेखाखण्डलाई तीन बराबर खण्डमा विभाजन गर्ने दुई विन्दुहरू क्रमशः (2, –1) र (3, 1) हुन् ।

P ले AB लाई 1:2 को अनुपातमा विभाजन गरे जस्तै, के Q ले AB लाई 2:1 को अनुपातमा विभाजन गर्छ ? यदि गर्छ भने खण्डसूत्र प्रयोग गरेर P जस्तै Q को निर्देशाङ्क निकाल्नुहोस् । साथीहरूबिच छलफल गरी समाधान गरेर हेर्नुहोस् र उत्तर उही आउँछ कि फरक जाँच्नुहोस् ।

उदाहरण 6

विन्दुहरू (–2, –1), (1, 0), (4, 3) र (1, 2) समानान्तर चतुर्भुजका शीर्षविन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,



A(–2, –1), B(1, 0), C(4, 3) र D(1, 2) चतुर्भुज ABCD का शीर्षविन्दुहरू छन् ।

अब, विकर्ण AC को मध्यविन्दुको निर्देशाङ्क,

$$(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1,1)$$

त्यस्तै, विकर्ण BD को मध्यविन्दुको निर्देशाङ्क,

$$(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1,1)$$

अतः दुवै विर्कणहरूको मध्यविन्दुको निर्देशाङ्कहरू एउटै भएकाले चतुर्भुज ABCD समानान्तर चतुर्भुज हो । अर्थात्, दिएका विन्दुहरू समानान्तर चतुर्भुजका शीर्षविन्दुहरू हुन् ।

अभ्यास 3.1 (B)

1. सरल रेखाको खण्डरूपका सूत्रहरू लेख्नुहोस् ।
2. खण्डरूपका विशेष अवस्थाहरू के के हुन्, उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
3. दिइएका विन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्डलाई दिइएको अनुपातमा भित्रपट्टिबाट विभाजन गर्ने विन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) विन्दुहरू (6, –10) र (–4, 14) अनुपात 3:4 (ख) विन्दुहरू (3, 5) र (–2, –7) अनुपात 3:2

   (ग) विन्दुहरू (4, 3) र (6, 3) अनुपात 2:5
4. दिइएका विन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरपट्टिबाट दिइएको अनुपातमा विभाजन गर्ने विन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) विन्दुहरू (–3, 2) र (6, 5) अनुपात 2:1 (ख) विन्दुहरू (–3, 2) र (4, –4) अनुपात 4:3

   (ग) विन्दुहरू (3, –2) र (–3, –4) अनुपात 1: 2
5. विन्दु (–2, 2) ले विन्दुहरू (–4, 6) र $(\frac{1}{2}, -3)$ जोड्ने रेखाखण्डलाई कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. विन्दु (1, 3) ले विन्दुहरू (4, 6) र (3, 5) जोड्ने रेखाखण्डलाई कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. विन्दु $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ले विन्दहरू (3, –5) र (–7, 9) जोड्ने रेखाखण्डलाई कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ । पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. विन्दुहरू (–3, –6) र (1, –2) जोड्ने रेखाखण्डको मध्यविन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. विन्दुहरू M(1, 4) र $N(x', y')$ जोड्ने रेखाखण्डको मध्यविन्दु (–2, 2) भए (x', y') को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. कुनै रेखाखण्डको मध्यविन्दु (4, 3) र एकछेउ विन्दु (0, 2) भए अर्को छेउको विन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. A(2, –1), B(–1, 4) र C(–2, 2) छ भने ΔABC का प्रत्येक भुजाका मध्यविन्दुहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
12. दिइएका विन्दुहरूलाई जोडेर बनेका रेखाखण्ड बराबर तीन भागमा विभाजन गर्ने विन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

    (क) A(1, –3) र B(4, 3) (ख) P(1, –2) र Q(–3, 4) (ग) M(–5, –5) र N(25, 10)
13. विन्दुहरू (2, 3) र (5, 6) जोड्ने रेखाखण्डलाई X – अक्षले कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
14. विन्दुहरू (–4, 5) र (3, –7) जोड्ने रेखाखण्डलाई Y – अक्षले कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. विन्दुहरू (7, –3) र (–2, –5) जोड्ने रेखाखण्डमा (3, y) विन्दु पदर्छ भने y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ?

16. (2, 3) र (–6, 5) जोड्ने रेखाखण्डमा (x, –5) विन्दु पदर्छ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

17. दिइएका विन्दुहरू समानान्तर चतुर्भुजका शीर्षविन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(क) (1, 2), (3, 0), (7, 4) र (5, 6)
(ख) (–1, 0) (3, 1) (2, 2) र (–2, 1)
(ग) (3–, 2) (4, 0) (6, –3) र (5, –5)

18. तल दिइएका तीनओटा विन्दुहरू समानान्तर चतुर्भुजका क्रमशः तीन शीर्षविन्दुहरू हुन् भने चौथो शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) (2, 3), B(4, –1) र C(0,5)
(ख) A(2, 6), B(6, 2) र C(12, 4)
(ग) (1, 2), (3, 1) र (5, 3)

19. विन्दुहरू (1, 2), (3, 0), (x, 4) र (5, y) समानान्तर चर्तुभुका शीर्षविन्दुहरू हुन् भने x र y को मान निकाल्नुहोस् ।

20. दुईओटा शीर्षविन्दुहरू क्रमशः (3, 2) र (5, 10) भएका समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू विन्दु (3, 4) मा काटिएका छन् भने बाँकी शीर्षविन्दुहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

21. यदि A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) र D(x_4, y_4) समानान्तर चतुर्भज ABCD का शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ र $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$

उत्तर

1–2 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) $\left(\frac{12}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (ख) $\left(0, \frac{-11}{5}\right)$ (ग) $\left(\frac{32}{7}, 3\right)$

4. (क) (15, 8) (ख) (25, –22) (ग) (9, 0) 5. 4:5 6. –3:2 7. 1:3

8. (–1, –4) 9. (–5, 0) 10. (8, 4)

11. AB को मध्यविन्दु = $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, BC को मध्यविन्दु = $\left(\frac{-3}{2}, 3\right)$ र CA को मध्यविन्दु = $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

12. (क) (2, –1) र (3, 1) (ख) $\left(\frac{-1}{3}, 0\right)$ र $\left(\frac{-5}{3}, 0\right)$ (ग) (5, 0) र (15, 5) 13. 1:–2

14. 4:3 15. $\frac{-35}{9}$ 16. 59 17. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

18. (क) (–2, 9) (ख) (8, 8) (ग) (3, 4) 19. x = 7, y = 6 20. (3, 6) र (1, –2)

3.1.3 सिधारेखाको झुकाव, X – खण्ड र Y – खण्डको अवधारणा (Slope of a straight line, Concept of X – intercept and Y - intercept)

सिधारेखा (Straight Line)

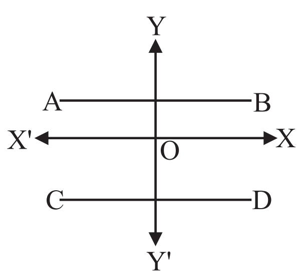
सिधारेखाको अवधारणा विकासका लागि तलको क्रियाकलाप गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 1

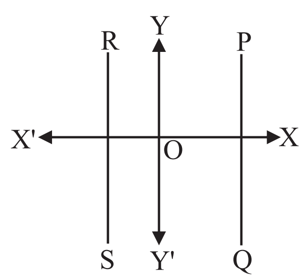
समीकरण $3x - 2y - 4 = 0$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । यसका लागि x र y का मानहरू आफैं लिनुहोस् । कस्तो चित्र बन्यो, निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

समीकरण $3x - 2y - 4 = 0$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी लेखाचित्रलाई अवलोकन गर्दा, घात (power) 1 भएको समीकरणले सिधारेखालाई जनाउँछ । सिधारेखाको समीकरणलाई रेखीय समीकरण (Linear Equation) पनि भनिन्छ ।

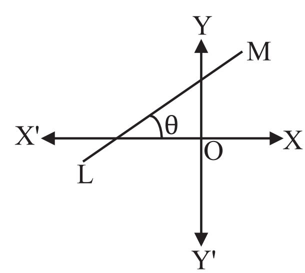
समान्यत: सिधारेखा X – अक्षसँग समानान्तर हुने, Y – अक्षसँग समानान्तर हुने र X – अक्षसँग कोण बनाउने गरी तीन किसिमका हुन्छन् । जसलाई तलका चित्रमा हेर्न सकिन्छ ।



X – अक्षसँग समानान्तर हुने (तेर्सो सिधारेखा)

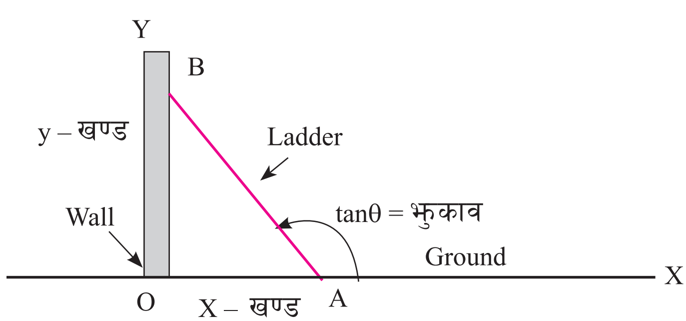


Y – अक्षसँग समानान्तर हुने (ठाडो सिधारेखा)



X – अक्षसँग कोण बनाउने

A. सिधारेखाको झुकाव (Slope or gradient of a straight line)



तपाईंहरूले आफ्नो घरमा भऱ्याङ राखेको देख्नुभएको छ ? भऱ्याङलाई कसरी राखिएको हुन्छ ? अवलोकन र विश्लेषण गर्नुहोस् ।

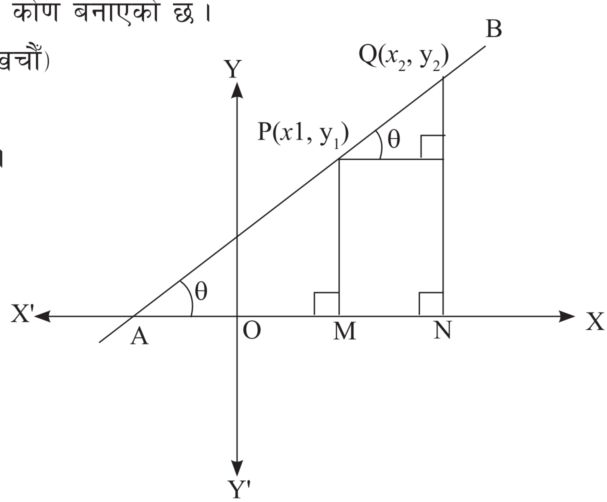
भऱ्याङलाई भित्तामा आड लगाएर ढल्काएर अथवा झुकाएर राखेको हुनुपर्छ । त्यसरी झुकाएर राख्दा भऱ्याङलाई कति झुकाउने वा कति ढल्काएर राख्ने भन्ने तथ्यलाई नै भऱ्याङको जमिनसँगको झुकाव भनिन्छ ।

OA = रेखा AB ले X – अक्षसँग बनाएको भाग जसलाई X – खण्ड भनिन्छ ।

OB = रेखा AB ले Y– अक्षसँग बनाएको भाग Y – खण्ड भनिन्छ ।

B. दुई विन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) जोड्ने रेखाको झुकाव

मानौं विन्दुहरू $P(x_1, y_1)$ र $Q(x_2, y_2)$ भएर जाने रेखा PQ ले X - अक्षलाई विन्दु A मा काटेको छ र X - अक्षसँग धनात्मक दिशामा $\angle PAX = \theta$ कोण बनाएको छ ।



चित्रमा, $PM \perp OX$, $QN \perp OX$ र $PR \perp QN$ (खिचौं)

तब, $PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$ र

$QR = QN - RN = QN - PM = y_2 -{}_1$ हुन्छ ।

$\angle QPR = \angle PAX = \theta$ हुन्छ ।

समकोण ΔPRQ मा,

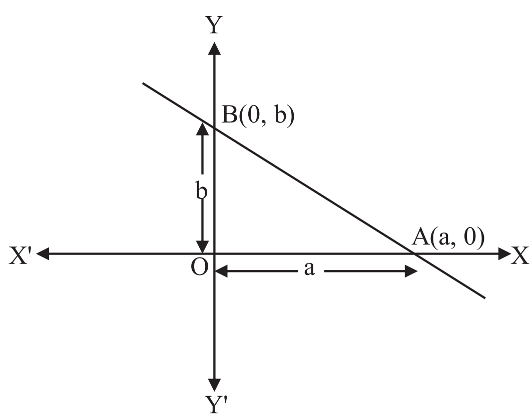
$\therefore$ रेखा PQ को झुकाव $(m) = \tan\theta$

$$= \frac{QR}{PR}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

C. X – खण्ड र Y – खण्डको गणना

कुनै सरल रेखाको X – खण्ड र Y – खण्ड कसरी पत्ता लगाउनुहुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।



सँगैको चित्रमा, सरल रेखा AB ले X – अक्षको विन्दु A(a, 0) र Y – अक्षको विन्दु B(0, b) मा काटेको छ । अर्थात् OA = a र OB = b छ । यी भागहरूलाई क्रमशः X – खण्ड र Y – खण्ड भनिन्छ । कुनै रेखाले X – अक्षमा काटेको विन्दुदेखि उद्गम विन्दुसम्मको दुरीलाई X – खण्ड (a) भनिन्छ । त्यस्तै कुनै रेखाले Y – अक्षमा काटेको विन्दुदेखि उद्गम विन्दुसम्मको दुरीलाई Y– खण्ड (b) भनिन्छ ।

$\therefore$ X – खण्ड = a, Y – खण्ड = b

उदाहरण 1

X – अक्षसँग 45° कोण बनाउने सिधारेखाको झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$\theta = 45°$

सिधारेखाको झुकाव $(m) = \tan\theta = \tan 45° = 1$

उदाहरण 2

विन्दुहरू (4, 5) र (6, 7) जोड्ने रेखाको झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

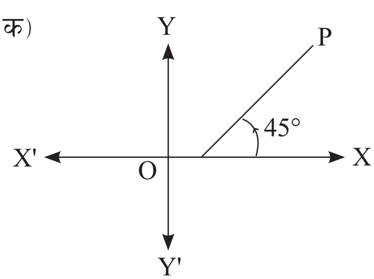
यहाँ, $(x_1, y_1) = (4, 5)$ र $(x_2, y_2) = (6, 7)$

अत: झुकाव $(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-5}{6-4} = \frac{2}{2} = 1$

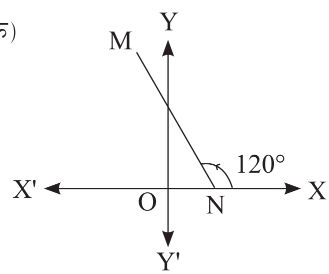
अभ्यास 3.1 (C)

1. सिधारेखाको झुकावको परिभाषा लेख्नुहोस् ।
2. सिधारेखाले X - अक्षसँग धनात्मक दिशामा बनाएको कोण θ भए, झुकाव पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
3. विन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) जोड्ने रेखाको झुकाव के हुन्छ ?
4. सिधारेखाको X – खण्ड र Y – खण्डलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।
5. X – अक्षसँग 60° कोण बनाउने सिधारेखाको झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. X – अक्षसँग 135° कोण बनाउने सिधारेखाको झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. दिइएका रेखाखण्डहरूका झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।

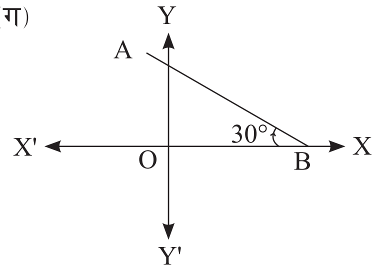
(क)



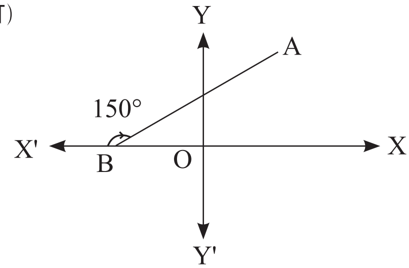
(क)



(ग)



(घ)



8. विन्दुहरू (–4, 3) र (2,–5) जोड्ने रेखाको झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. विन्दुहरू (0, –5) र (3, 0) जोड्ने रेखाको झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. (क) विन्दुहरू क्रमशः (2, 5) र (6, p) जोड्ने रेखाको झुकाव $\frac{-1}{2}$ भए p को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विन्दुहरू क्रमशः (p, 8) र (3, 4) जोड्ने रेखाको झुकाव 2 भए p को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. विन्दुहरू P (8, 6) र Q (4, 2) जोड्ने रेखाको झुकाव र A (7, 9) र B (p, 3) जोड्ने रेखाको झुकाव बराबर हुन्छ भने p को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. विन्दुहरू P (–2, –2), (1, 1) र (m, 2) एउटै सिधारेखामा पर्छन् भने m को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

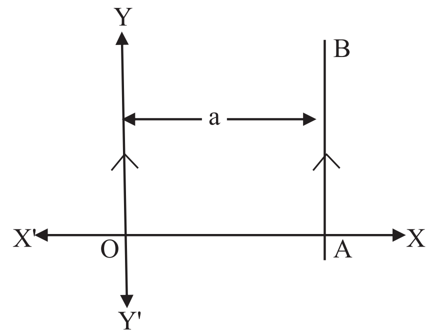
1 – 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 5. $\sqrt{3}$ 6. –1 7. (क) 1 (ख) $-\sqrt{3}$ (ग) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ (घ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 8. $-\frac{4}{3}$ 9. $\frac{5}{3}$ 10. (क) 5 (ख) 5 11. 1 12. 2

3.1.4 सिधारेखाको समीकरणहरू (Equations of straight line)

1. Y – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण (Equation of line parallel to Y – axis)

सँगैको चित्रमा रेखा AB, Y – अक्षसँग समानान्तर हुने र Y – अक्षदेखि AB सम्मको दुरी a एकाइ छ ।

अत : AB मा पर्ने प्रत्येक विन्दुको X - निर्देशाङ्क a हुन्छ । त्यसकारण $x = a$ रेखा AB को समीकरण हो ।

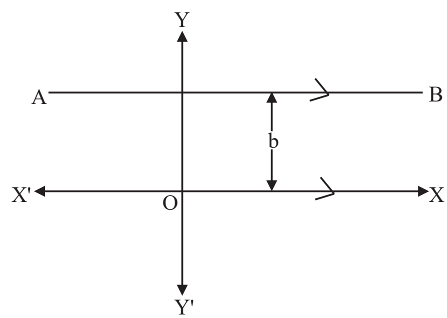


यदि रेखा AB, Y – अक्षको बायाँपट्टि र Y – अक्षदेखिको रेखासम्मको दुरी a हुन्छ भने यसको समीकरण के हुनसक्छ ? साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

2. X – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण (Equation of line parallel to X – axis)

सँगैको चित्रमा रेखा AB, X – अक्षसँग समानान्तर छ र X – अक्षदेखि AB सम्मको दुरी b एकाइ छ ।

अत : AB मा पर्ने प्रत्येक विन्दुको Y – निर्देशाङ्क b हुन्छ । त्यसकारण $y = b$ रेखा AB को समीकरण हो ।

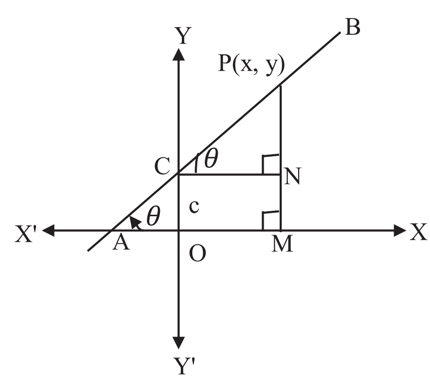


यदि रेखा AB, X– अक्षको तलपट्टि र X – अक्षदेखिको दुरी b हुन्छ भने यसको समीकरण के हुन सक्छ ? साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. झुकाव खण्ड रूपमा हुने सिधारेखाको समीकरण (Equation of straight line in slope intercept form)

सँगैको चित्रमा सरल रेखा AB ले X – अक्षसँग धनात्मक दिशामा बनाएको कोण $\angle BAX = \theta$ छ ।

यसको Y – खण्ड OC = c छ । यसमा पर्ने कुनै विन्दु $P(x, y)$ बाट $PM \perp OX$ खिचौं । $CN \perp PM$ खिचौं । $\angle PCN = \angle BAX = \theta$, $OM = x$ र $PM = y$ हुन्छ ।



समकोणी त्रिभुज PNC मा,

$\tan\theta = \frac{PN}{CN}$

अथवा, $m = \frac{PM - NM}{CN}$

अथवा, $m = \frac{PM - OC}{OM}$

अथवा, $m = \frac{y - c}{x}$

अथवा, $y - c = mx$

$\therefore y = mx + c$

अर्को तरिका

विन्दु C को निर्देशाङ्क $= (0, c)$

AB को झुकाव = CP को झुकाव (किन ? छलफल गर्नुहोस् ।)

अथवा, $m = \frac{y - c}{x - 0}$

अथवा, $mx = y - c$

$\therefore y = mx + c$ आवश्यक समीकरण हो ।

(क) यदि रेखा AB उद्‌गम विन्दुबाट जान्छ भने $c = 0$ हुन्छ र यसको समीकरण $y = mx + 0$

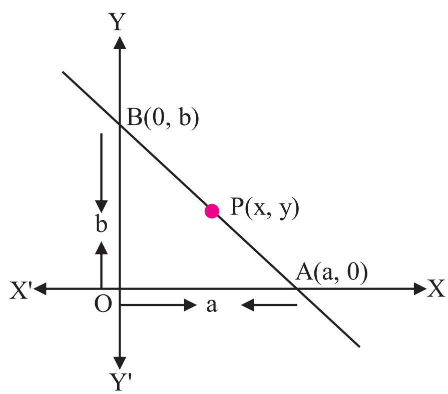
$\therefore y = mx$ हुन्छ ।

(ख) रेखा AB, X– अक्षसँग समानान्तर भएमा, $m = \tan 0° = 0$ हुन्छ र रेखाको समीकरण $y = mx + c$

अथवा, $y = 0.x + c \quad \therefore y = c$ हुन्छ ।

4. दुई खण्ड स्वरूपमा हुने सिधारेखाको समीकरण (Equation of straight line in double intercepts form)

सँगैको चित्रमा सरल रेखा AB ले X – अक्षलाई विन्दु A(a, 0) मा र Y – अक्षलाई विन्दु B(0, b) मा काटेको छ । अतः OA = a र OB = b हुन्छन् ।



AB मा पर्ने कुनै एउटा विन्दु P(x, y) हो ।

AP को झुकाव $= \frac{y - 0}{x - a} = \frac{y}{x - a}$

PB को झुकाव $= \frac{b - y}{o - x} = \frac{b - y}{o - x}$

विन्दुहरू A(a, 0), P(x, y) र B(0, b) समरेखीय छन् ।

त्यसैले, AP को झुकाव = PB को झुकाव

अथवा, $\frac{y}{x - a} = \frac{b - y}{o - x}$

अथवा, $-xy = bx - ab - xy + ay$

अथवा, $bx + ay = ab$

दुवैतर्फ ab ले भाग गर्दा,

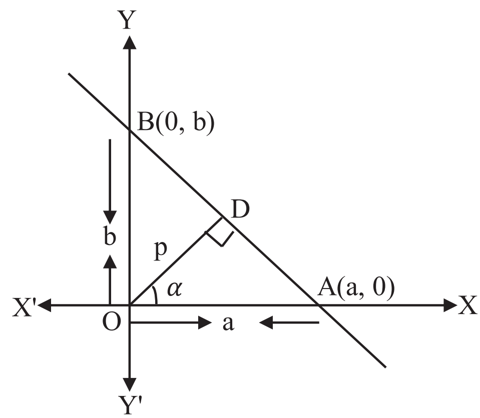
$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}$

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ यही रेखा AB को समीकरण हो ।

5. लम्ब रूपमा हुने सिधारेखाको समीकरण (Equation of straight line in perpendicular form)

दिइएको चित्रमा सरल रेखा AB ले X – अक्षको विन्दु A(a, 0) र Y – अक्षको विन्दु B(0, b) मा काटेको छ । त्यसैले, OA = a र OB = b, OD⊥AB खिचिएको छ जहाँ OD = p र ∠DOA= α छ ।

समकोणी ΔODB मा, ∠BOD = 90°– α हुन्छ र ∠OBD = 180° – (90°– α) – 90° = α हुन्छ ।



$$\sin\alpha = \frac{OD}{OB} = \frac{p}{b}$$

अथवा, $b = \frac{p}{\sin\alpha}$

समकोणी ΔODA मा,

$$\cos\alpha = \frac{OD}{OA} = \frac{p}{a}$$

अथवा, $a = \frac{p}{\cos\alpha}$

अब, खण्डरूपबाट AB को समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

अथवा, $\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1$

अथवा, $\frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\sin\alpha}{p} = 1$

अत: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, रेखा AB को आवश्यक समीकरण हो ।

उदाहरण 1

Y – अक्षदेखि 6 एकाइ दायाँको दुरीमा रहने र Y – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाई ग्राफमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

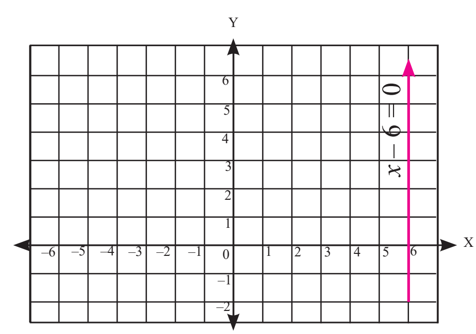
यहाँ, Y – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण $x = a$ हुन्छ ।

Y –अक्षदेखि 6 एकाइ दायाँ पर्ने रेखाका लागि a = 6

तब, आवश्यक रेखाको समीशरण $x = a$

अथवा, $x = 6$

$\therefore x - 6 = 0$



उदाहरण 2

X – अक्षसँग समानान्तर हुने र विन्दु (–2, 5) बाट जाने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, X – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण $y = b$ हुन्छ ।

यो रेखा विन्दु (–2, 5) बाट जाने भएकाले, $b = 5$

$\therefore$ चाहिएको समीकरण $y = 5$

अथवा, $y - 5 = 0$

उदाहरण 3

सरल रेखा $2x - 10y = 8$ को झुकाव र Y – खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $2x - 10y = 8$

अथवा, $2x - 8 = 10y$

अथवा, $y = \frac{2x}{10} - \frac{8}{10}$

अथवा, $y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$ लाई $y = mx + c$ सँग तुलना गर्दा,

झुकाव $(m) = \frac{1}{5}$

Y – खण्ड $(c) = \frac{-4}{5}$

उदाहरण 4

Y – खण्ड 3 हुने गरी Y– अक्षलाई काट्ने र X – अक्षसँग 60° को कोण बनाउने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, Y – खण्ड $(c) = 3$

झुकाव $(m) = \tan\theta = \tan 60° = \sqrt{3}$

अब, सरल रेखाको समीकरण $y = mx + c$

अथवा, $y = \sqrt{3}\,x + 3$

$\therefore \sqrt{3}\,x - y + 3 = 0$ जुन आवश्यक रेखाको समीकरण हो ।

उदाहरण 5

X – खण्ड = 3 र Y – खण्ड = –4 भएको सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, X – खण्ड (a) = 3

Y – खण्ड (b) = –4

रेखाको समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

अथवा, $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$

अथवा, $\frac{4x - 3y}{12} = 1$

$\therefore$ $4x - 3y = 12$ जुन आवश्यक रेखाको समीकरण हो ।

उदाहरण 6

सरल रेखा $3x + 4y = 24$ को X– खण्ड र Y– खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $3x + 4y = 24$

दुबैतर्फ 24 ले भाग गर्दा,

अथवा, $\frac{3x}{24} + \frac{4y}{24} = \frac{24}{24}$

अथवा, $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$ लाई $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ सँग तुलना गर्दा,

X– खण्ड (a) = 8 र Y– खण्ड (b) = 6

उदाहरण 7

अक्षहरूमा बराबर परिमाण तर विपरीत चिह्नका खण्डहरू बनाउने र विन्दु (3, –4) भएर जाने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, X – खण्ड (a) = k भए Y – खण्ड (b) = –k हुन्छ ।

अब, सरल रेखाको समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

अथवा, $\frac{x}{k} + \frac{y}{-k} = 1$

अथवा, $\frac{x - y}{k} = 1$

अथवा, $x - y = k$ ....(i)

समीकरण (i) विन्दु (3, –4) भएर जाने भएकाले,

$$3 - (-4) = k$$

अथवा, $3 + 4 = k$

$\therefore k = 7$

समीकरण (i) मा k को मान राख्दा, $x - y = 7$

$\therefore x - y - 7 = 0$ जुन आवश्यक रेखाको समीकरण हो ।

उदाहरण 8

उद्गम विन्दुदेखि कुनै रेखासम्मको दुरी 4 एकाइ छ र सो लम्बले X– अक्षसँग 60° कोण बनाएको छ भने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, लम्बदुरी $(p) = 4$

कोण $(\alpha) = 60°$

अब, लम्बरूपबाट, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

अथवा, $x\cos60° + y\sin60° = 4$

अथवा, $x.\frac{1}{2} + y.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4$

अथवा, $\frac{x+\sqrt{3}y}{2} = 4$

अथवा, $x + \sqrt{3}\,y = 8$

$\therefore x + \sqrt{3}\,y - 8 = 0$

जुन आवश्यक रेखाको समीकरण हो ।

अभ्यास 3.1 (D)

1. X – अक्षसँग समानान्तर हुने सरल रेखाको समीकरण लेख्नुहोस् ।
2. Y – अक्षसँग समानान्तर हुने सरल रेखाको समीकरण लेख्नुहोस् ।
3. सिधारेखाको समीकरण झुकाव खण्ड रूपमा लेख्नुहोस् ।
4. दुई खण्ड स्वरूपअनुसार सिधारेखाको समीकरण लेख्नुहोस् ।
5. लम्ब रूपमा सिधारेखाको समीकरण लेख्नुहोस् ।
6. लम्ब स्वरूपअनुसार सिधारेखाको समीकरण $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ मा p र α लाई परिभाषित गर्नुहोस् ।
7. सिधारेखाको समीकरणका तीन प्रमाणिक रूपहरू के के हुन् ? ती रूपमा समीकरणहरू के के हुन्छन्, लेख्नुहोस् ।
8. Y– अक्षदेखि 3 एकाइ बायाँको दुरीमा रहने र Y – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

9. X– अक्षदेखि –3 एकाइको दुरीमा रहने र X – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

10. X– अक्षसँग समानान्तर हुने र विन्दु (–3, 2) बाट जाने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. Y– अक्षसँग समानान्तर हुने र विन्दु (5, –2) बाट जाने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. निम्नलिखित सरल रेखाहरूको झुकाव र Y – खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $y = 5x - 2$ (ख) $y = -2x + 4$ (ग) $y = 12x$ (घ) $y = 6$

(ङ) $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$ (च) $x + y + 1 = 0$ (छ) $2y - 10x = 8$ (ज) $y = \sqrt{3}x$

13. निम्नलिखित अवस्थामा सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) झुकाव = 5 र Y – खण्ड = 3 (ख) झुकाव = –2 र Y – खण्ड = –1

(ग) झुकाव = tan120° र Y – खण्ड = –5 (घ) झुकाव = tan(–60°) र Y – खण्ड = 3

(ङ) झुकाव = 3 र उद्गम विन्दु भएर जाने (च) झुकाव = $\frac{1}{3}$ र विन्दु (0, 1) भएर जाने

(छ) उद्गम विन्दु भएर जाने र X – अक्षसँग 45° को कोण बनाउने

(ज) उद्गम विन्दु भएर जाने र X – अक्षसँग 150° को कोण बनाउने

14. निम्नलिखित अवस्थामा सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) X – खण्ड = 3 र Y – खण्ड = –4 (ख) X – खण्ड = –2 र Y – खण्ड = 3

(ग) X– खण्ड = $\frac{3}{5}$ र Y – खण्ड = $\frac{9}{2}$

15. तलका समीकरणहरूले दिने रेखाको X - खण्ड र Y – खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $4x - 3y - 12 = 0$ (ख) $5x + 3y + 15 = 0$

16. निम्नलिखित अवस्थामा सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) विन्दु (2, –1) भएर जाने र अक्षहरूमा बराबर खण्डहरू बनाउने

(ख) विन्दु (3, 4) भएर जाने र अक्षहरूमा बराबर खण्डहरू बनाउने

(ग) अक्षहरूमा बराबर परिमाण तर विपरीत चिह्नका खण्डहरू बनाउने र विन्दु (2, 3) भएर जाने

(घ) अक्षहरूमा बराबर परिमाण तर विपरीत चिह्नका खण्डहरू बनाउने र विन्दु (6, –5) भएर जाने

(ङ) Y – खण्डभन्दा X – खण्ड दोब्बर हुनेगरी अक्षहरूलाई काट्ने र विन्दु (3. 2) भएर जाने

(च) विन्दु (3, 4) भएर जाने र X – खण्ड र Y – खण्डको योग 15 हुने

17. विन्दु (2, 3) भएर जाने कुनै रेखाका अक्षहरूबिचको अंशलाई उक्त विन्दुले समद्विभाजन गर्छ भने सो रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

18. रेखा AB ले X – अक्षलाई A(6, 0) र Y– अक्षलाई B(0, 8) मा प्रतिच्छेदित गर्छ ।

(क) रेखा AB को X – खण्ड र Y - खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) रेखा AB को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) AB को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

19. विन्दु (–5, 8) भएर जाने र X – खण्डभन्दा Y - खण्ड दोब्बर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । साथै सो रेखा (–1, 0) भएर जान्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

20. विन्दु (2, 3) भएर जाने रेखाका अक्षहरूबिचको अंशलाई उक्त विन्दुले 3:4 को अनुपातमा विभाजन गर्छ भने सो रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

21. निम्नलिखित अवस्थामा सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $p = 4$ एकाइ र $\alpha = 30°$ (ख) $p = 2$ एकाइ र $\alpha = 90°$

(ग) $p = 1$ एकाइ र $\alpha = -60°$ (घ) $p = \frac{5}{7}$ एकाइ र $\alpha = 135°$

(ङ) $p = 13$ एकाइ र $\alpha = 45°$ (च) $p = \sqrt{8}$ एकाइ र $\alpha = 150°$

यहाँ, उद्गम विन्दुबाट रेखासम्मको लम्बदुरी p र लम्बले X - अक्षसँग बनाएको कोण α छ ।

उत्तर

1–7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 8. $x - 3 = 0$ 9. $y + 3 = 0$

10. $y - 2 = 0$ 11. $x - 5 = 0$ 12. (क) 5, –2 (ख) –2, 4 (ग) 12, 0

(घ) 0, 6 (ङ) $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}$ (च) –1, –1 (छ) 5, 4 (ज) $\sqrt{3}$, 0

13. (क) $5x - y + 3 = 0$ (ख) $2x + y + 1 = 0$ (ग) $\sqrt{3}x + y + 5 = 0$

(घ) $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$ (ङ) $3x - y = 0$ (च) $x - 3y + 3 = 0$

(छ) $x - y = 0$ (ज) $x + \sqrt{3}y = 0$ 14. (क) $4x - 3y - 12 = 0$

(ख) $3x - 2y + 6 = 0$ (ग) $15x + 2y - 9 = 0$

15. (क) 3, –4 (ख) –3, –5 16. (क) $x + y - 1 = 0$

(ख) $x + y - 7 = 0$ (ग) $x - y + 1 = 0$ (घ) $x - y - 11 = 0$

(ङ) $x + 2y - 7 = 0$ (च) $2x + y - 10 = 0, 2x + 3y - 18 = 0$

17. $3x + 2y - 12 = 0$ 18. (क) 6, 8 (ख) $4x + 3y - 24 = 0$

(ग) 10 19. $2x + y + 2 = 0$ 20. $7x + 10y - 70 = 0$

21. (क) $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ (ख) $y - 2 = 0$ (ग) $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$

(घ) $7x - 7y + 5\sqrt{2} = 0$ (ङ) $x + y - 13\sqrt{2} = 0$ (च) $\sqrt{3}x - y + 4\sqrt{2} = 0$

3.1.5 Ax + By + C = 0 लाई स्तरीय स्वरूपमा रूपान्तरण

(Reduction of Ax + By + C = 0 in the standard forms)

प्रथम डिग्रीमा व्यक्त गरिएको रेखाको साधारण समीकरण (General equation of first degree), $Ax + By + C = 0$ हुन्छ । जहाँ, x, y चलराशि र A, B, C अचलराशि छन् । यो सरल रेखाको समीकरणको साधारण स्वरूप हो । यो समीकरणलाई झुकाव खण्ड, खण्डरूप र लम्बरूपमा कसरी रूपान्तर गर्न सकिन्छ ? साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

A. झुकाव खण्डरूपमा रूपान्तरण (Reduction in slope intercept form)

यहाँ, $Ax + By + C = 0$

अथवा, $By = -Ax - C$

अथवा, $y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$ लाई $y = mx + c$ सँग तुलना गर्दा,

झुकाव $(m) = \frac{-A}{B} = \frac{-x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}}$

y – खण्ड $(c) = \frac{-A}{B} = \frac{-\text{ अचलराशि}}{y \text{ को गुणाङ्क}}$

B. खण्डरूपमा रूपान्तरण (Reduction in intercepts form)

यहाँ, $Ax + By + C = 0$

अथवा, $Ax + Cy = -C$

दुबैतर्फ –C ले भाग गर्दा,

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = \frac{-c}{-C}$$

or, $\frac{x}{\frac{-C}{a}} + \frac{y}{\frac{-C}{b}} = 1$ लाई $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$ सँग तुलना गर्दा,

X – खण्ड $(a) = \frac{-A}{B} = \frac{-\text{ चलराशि}}{y \text{ को गुणाङ्क}}$

Y – खण्ड $(b) = \frac{-A}{B} = \frac{-\text{ अचलराशि}}{y \text{ को गुणाङ्क}}$

C. लम्बरूपमा रूपान्तरण (Reduction in perpendicular form)

यहाँ, समीकरण $Ax + By + C = 0$ लाई k ले दुबैतिर गुणन गर्दा $k(Ax + By + C) = 0$, k को कुनै निश्चित मान भएको अवस्थामा यो समीकरण लम्बरूपको समीकरण $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ सर्वाङ्ग रूपले बराबर (identically equal) हुन्छन् भनी मानौँ ।

अर्थात्, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = k(Ax + By + C)$ .....(i)

अथवा, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = xkA + ykB + kC$

अथवा, $k(Ax + By + C) = 0$ र $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ लाई एकआपसमा बराबर (identical) मान्दा,

$\cos\alpha = kA$ .....(ii) र $\sin\alpha = kB$ .....(ii)

अब, समीकरण (ii) र (iii) लाई वर्ग गरी जोड्दा,

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = k^2(A^2 + B^2)$

अथवा, $1 = k^2(A^2 + B^2)$

अथवा, $k^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}$

$\therefore k = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

k को मान (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(Ax + By + C)$$

अथवा, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

दुबैतर्फ तुलना गर्दा,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \text{ र } \quad p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

यहाँ p लम्बको दुरी भएकोले यसको मान धनात्मक हुनेगरी (+) अथवा (–) चिह्न लिनुपर्छ ।

नोट : प्रथम डिग्रीमा भएको रेखाको समीकरण $Ax + By + C = 0$ लाई $ax + by + c = 0$ स्वरूपमा पनि लेख्ने गरिन्छ ।

उदाहरण

समीकरण $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ लाई झुकाव खण्डरूप, खण्डरूप र लम्बरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान

झुकाव खण्डरूपमा रूपान्तरणका लागि,

यहाँ, $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$

अथवा, $\sqrt{3}x + 2 = y$

अथवा, $y = \sqrt{3}x + 2$ लाई $y = mx + c$ सँग तुलना गर्दा,

झुकाव $(m) = \sqrt{3}$, y – खण्ड $(c) = 2$

अर्को तरिका

यहाँ, $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ लाई $Ax + By + C = 0$ सँग तुलना गर्दा,

$A = \sqrt{3}$, $B = -1$ र $C = 2$

झुकाव $(m) = \frac{-A}{B} = \frac{-x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$

y – खण्ड $(c) = \frac{-C}{B} = \frac{-\text{ अचलराशि}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \frac{-2}{-1} = 2$

खण्डरूपमा रूपान्तरणका लागि,

यहाँ, $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ or, $\sqrt{3}x - y = -2$

दुबैतर्फ -2 ले भाग गर्दा,

$$\frac{\sqrt{3}x}{-2} - \frac{y}{-2} = \frac{-2}{-2}$$

अथवा, $\frac{x}{\frac{-2}{\sqrt{3}}} + \frac{y}{2} = 1$ लाई $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ सँग तुलना गर्दा,

x–खण्ड (a) $= \frac{-2}{\sqrt{3}}$

y–खण्ड (b) $= 2$

अर्को तरिका

यहाँ, $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ लाई $Ax + By + C = 0$ सँग तुलना गर्दा,

$A = \sqrt{3}$, $C = -1$ र $C = 2$

X – खण्ड (a) $= \frac{-C}{A} = \frac{-\text{ अचलराशि}}{x \text{ को गुणाङ्क}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$

Y – खण्ड (b) $= \frac{-C}{A} = \frac{-\text{ अचलराशि}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \frac{-2}{-1} = 2$

लम्बरूपमा रूपान्तरणका लागि,

यहाँ, $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ लाई $Ax + By + C = 0$ सँग तुलना गर्दा,

$A = \sqrt{3}$, $B = -1$ र $C = 2$

$p = \frac{C}{-\sqrt{A^2 + B^2}}$ [यहाँ p लम्बको दुरी भएकाले यसको मान धनात्मक हुने गरी – चिह्न लिनुपर्छ ।]

$= \frac{2}{-\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{-\sqrt{3+1}} = \frac{2}{-\sqrt{4}} = \frac{2}{-2} = -1$

$\cos\alpha = \frac{A}{-\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\alpha = \frac{B}{-\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-1}{-\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{-\sqrt{3+1}} = \frac{-1}{-\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

अब, $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$ मा p, $\cos\alpha$ र $\sin\alpha$ का मानहरू प्रतिस्थापन गर्दा,

$x(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + y(\frac{1}{2}) + (-1) = 0$ [यहाँ $\cos\alpha$ ऋणात्मक र $\sin\alpha$ धनात्मक भएकाले, α दोस्रो चतुर्थांस मा पर्छ ।]

त्यसैले, $x\cos150^0 + y\sin150^0 - 1 = 0$

$\therefore x\cos150^0 + y\sin150^0 = 1$ लम्बरूपको आवश्यक समीकरण हो ।

अभ्यास 3.1 (E)

1. निम्नलिखित समीकरणहरूलाई झुकाव खण्डरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(क) $\sqrt{3}x + 2y = 7$ (ख) $x - y = 6$ (ग) $3x - 2y + 8 = 0$

2. निम्नलिखित समीकरणहरूलाई खण्डरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(क) $3x + 4y = 12$ (ख) $2x - 3y - 6 = 0$ (ग) $\sqrt{3}x - 7y = 5$

3. निम्नलिखित समीकरणहरूलाई लम्बरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(क) $x - y + 4 = 0$ (ख) $x = y - 2\sqrt{2}$ (ग) $3x + 4y = 15$

(घ) $x + \sqrt{3}y = -4$ (ङ) $5x = 12y + 13$ (च) $\frac{x}{\sqrt{3}} + y = 4$

4. दिइएको रेखाको समीकरण $x - y + 4 = 0$ छ ।

(क) उक्त समीकरणलाई लम्बरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(ख) उद्गम विन्दुबाट सो रेखासम्मको दुरी कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. दिइएको सिधारेखाको समीकरण $4x + 3y - 24 = 0$ छ ।

(क) यो सिधारेखाको समीकरणलाई खण्डरूपमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) रेखाले X– अक्ष र Y– अक्षलाई कुन कुन विन्दुमा प्रतिच्छेदित गर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. दिइएको रेखाको समीकरण $6x + 8y = 24$ छ ।

(क) उक्त समीकरणलाई खण्डस्वरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(ख) X – खण्ड र Y – खण्ड कति कति हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) X – खण्ड र Y – खण्डको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. दिइएको सिधारेखाको समीकरण $3x + 4y = 12$ छ ।

(क) उक्त समीकरणलाई भुकाव खण्डरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(ख) रेखाका भुकाव र Y – खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) $y = \frac{-\sqrt{3}}{2x} + \frac{7}{2}$ (ख) $y = x - 6$ (ग) $y = \frac{3}{2}x + 4$

2. (क) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ (ख) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ (ग) $\frac{x}{\frac{5}{\sqrt{3}}} + \frac{y}{\frac{-5}{7}} = 1$

3. (क) $x\cos135° + y\sin135° = 2\sqrt{2}$ (ख) $x\cos135° + y\sin135° = 2$

(ग) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 3$ (घ) $x\cos240° + y\sin240° = 2$ (ङ) $\frac{5x}{13} - \frac{12y}{13} = 1$

(च) $x\cos60° + y\sin60° = 2\sqrt{3}$

4. (क) $x\cos135° + y\sin135° = 2\sqrt{2}$ (ख) $2\sqrt{2}$ 5. (क) $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ (ख) (6, 0), (0, 8)

6. (क) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ (ख) 4, 3 (ग) 4:3

7. (क) $y = \frac{-3}{4}x + 3$ (ख) $\frac{-3}{4}$, 3

3.2 स्थानान्तरण (Transformation)

3.2.1 परिचय (Introduction)

तलका चित्र अबलोकन गरी स्थानान्तरणको सम्बन्ध के के देख्नुहुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

माथिका चित्रहरूलाई अवलोकन गर्दा, कुनै वस्तु ऐनामा हेर्दा त्यसको प्रतिविम्ब देखिन्छ। घडीमा मिनेट सुई 0 मिनेटबाट 90° ऋणात्मक घुमेर 15 मिनेटमा पुग्छ । तपाईंले टेबुलको एक कुनाबाट आफ्नो किताब अर्को कुनामा सार्नुभयो भने किताबको स्थिति परिर्वतन हुन्छ ।

स्थानान्तरणले कुनै निश्चित गुणका आधारमा कुनै ज्यामितीय आकृतिको स्थिति वा आकार दुबैमा परिवर्तन ल्याउँछ ।

स्थानान्तरणका प्रकार (Types of Transformation)

बन्द गरिएको ढोका खोल्दा ढोकाको स्थितिमा परिर्वतन आउँछ । के ढोकाको आकारमा पनि परिर्वतन हुन्छ ? बेलुन फुकेपछि त्यसको आकार बढ्छ। यसरी स्थानान्तरणपछि आकृतिको तुलनामा प्रतिविम्बको स्थिति वा आकार वा दुबैमा परिर्वतन आउँछ। यसैका आधारमा स्थानान्तरणलाई सममितीय (isometric) र असममितीय (non-isometric) गरी दुई भागमा विभाजन गरिन्छ :

(a) सममितीय स्थानान्तरण (Isometric transformation) : जुन स्थानान्तरणपछि आकृतिको तुलनामा प्रतिविम्बको स्थितिमा परिर्वतन आउँछ तर आकारमा परिर्वतन आउँदैन, त्यसैलाई सममितीय (isometric) स्थानान्तरण भनिन्छ । यसमा आकृति र प्रतिविम्ब अनुरूप हुन्छन् । यो स्थानान्तरणअन्तर्गत परावर्तन, परिक्रमण र विस्थापन पर्छन् ।

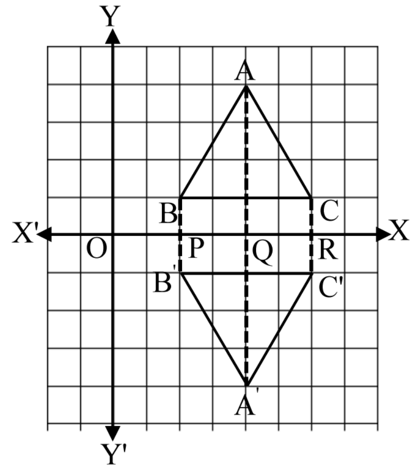
(b) असममितीय स्थानान्तरण (Non-isometric transformation) : जुन स्थानान्तरणपछि आकृतिको तुलनामा प्रतिविम्बको आकारमा परिर्वतन आउँछ त्यसलाई असममितीय (Non-isometric) स्थानान्तरण भनिन्छ। यो स्थानान्तरणअन्तर्गत विस्तार पर्छ ।

3.2.2 ज्यामितीय आकृतिको परावर्तन (Reflection of Geometrical Shapes)

प्रत्येक विद्यार्थीले दिइएको चित्रबाट AQ, A'Q, BP, B'P र CR, C'R र $\angle AQX$, $\angle BPX$ र $\angle CRX$ को नाप पत्ता लगाई एउटै प्रकारको परिणाम आयो वा आएन छलफल गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

AQ = A'Q = 4 एकाइ, BP = B'P = 1 एकाइ र CR = C'R = 1 एकाइ । अर्थात्, वस्तु र प्रतिविम्ब परार्वतन अक्षबाट समान दुरीमा हुन्छन् । $\angle AQX = 90°$, $\angle BPX = 90°$ र $\angle CRX = 90°$ । अर्थात्, $AA' \perp OX$, $BB' \perp OX$ र $CC' \perp OX$। वस्तु र त्यसको प्रतिविम्ब जोड्ने रेखा परावर्तन अक्षसँग लम्ब हुन्छ।

वस्तु र त्यसको परावर्तनको प्रतिविम्बका सङ्गतीका भुजाहरू र सङ्गतीका कोणहरू एकआपसमा बराबर छन् । त्यसैले, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ । अर्थात्, वस्तु र सो वस्तुलाई परावर्तन गरेपछि बनेको प्रतिविम्बहरू अनुरूप हुन्छन् ।



माथि दिइएको ग्राफलाई अवलोकन गर्दा,

$A(4, 4) \xrightarrow{Re:X\text{–}axis} A'(4, -4)$

$B(2, 1) \xrightarrow{Re:X\text{–}axis} B'(2, -1)$

$C(6, 1) \xrightarrow{Re:X\text{–}axis} C'(6, -1)$

त्यसैले, $P(x, y) \xrightarrow{Re:X\text{–}axis} P'(x, -y)$

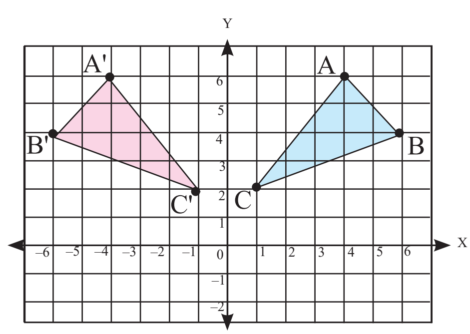
ΔABC लाई X–अक्षमा परावर्तन गर्दा, शीर्षविन्दु A, B र C को परावर्तन पश्चात् को निर्देशाङ्कमा X निर्देशाङ्क उही र Y निर्देशाङ्कमा चिह्न परिवर्तन हुन्छ । X–अक्षमा नै रहेको विन्दुको X–अक्षसँग परावर्तन गर्दा निर्देशाङ्क उही रहन्छन् ।

माथिका छलफलहरूको आधारमा परार्वतनका निम्न गुणहरू लेख्न सकिन्छ :

1. वस्तु र प्रतिविम्ब परार्वतन अक्षबाट समान दुरीमा हुन्छन् ।
2. वस्तु र त्यसको प्रतिविम्ब जोड्ने रेखा परावर्तन अक्षसँग लम्ब हुन्छ ।
3. वस्तु र त्यसको परावर्तनको प्रतिविम्बहरू अनुरूप हुन्छन् ।
4. वस्तु र प्रतिविम्ब उल्टो आकृतिका रूपमा हुन्छन् ।
5. परार्वतन अक्षमा पर्ने विन्दु अपरिवर्तनीय हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 1

दिइएको ग्राफमा भएको ΔABC लाई Y–अक्षमा परावर्तन गर्नुहोस् । प्रतिविम्ब A', B' र C' को निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । अब ΔABC र प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ को निर्देशाङ्क तुलना गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।



प्रक्रिया : प्रत्येक विद्यार्थीलाई ग्राफ लिन लगाई दिइएको त्रिभुज ΔABC लाई लेखाचित्रमा खिची Y– अक्षमा परावर्तन गर्न गर्नुहोस् । यसरी परावर्तन गर्दा प्राप्त प्रतिविम्ब A'B'C' का निर्देशाङ्कहरू लेखी सोही लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । अनि ΔABC र प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ का निर्देशाङ्कहरू तुलना गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

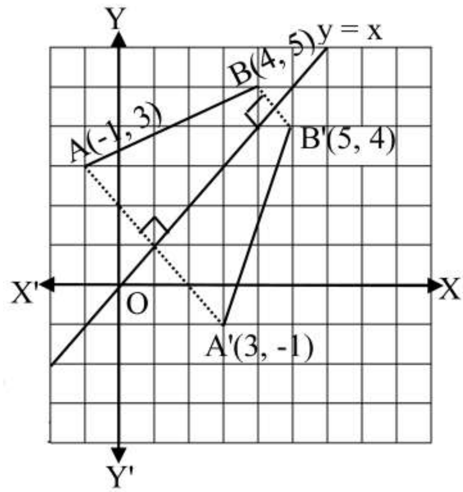
निष्कर्ष : $P(x, y) \xrightarrow{Re:Y\text{– }axis} P'(-x, y)$

(क) रेखा $y = x$ मा परावर्तन (Reflection in the line $y = x$)

$y = x$ कस्तो रेखा हो ? के यो रेखा उद्‌गम विन्दु भएर जान्छ ? साथै कुन कुन चतुर्थांश भएर जान्छ ? साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

$y = x$ त्यस्तो रेखा हो जसका प्रत्येक विन्दुका x र y निर्देशाङ्क (0,0), (1, 1),(–2, –2) आदि हुन्छन् । यो रेखा उद्‌गम विन्दु भएर जान्छ । साथै पहिलो र तेस्रो चतुर्थांश भएर जान्छ ।

क्रियाकलाप 2



दिइएको ग्राफमा रेखा AB का विन्दुहरू A(–1, 3) र B (4, 5) लाई $y = x$ रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिविम्ब A'B' का विन्दुहरू A' र B' लाई ग्राफमा देखाइएको छ । विन्दुहरू A' र B' का निर्देशाङ्क कति छन् ? तुलना गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

प्रक्रिया : दिइएको रेखा AB लाई लेखाचित्रमा खिची रेखा $y = x$ परावर्तन गर्नुहोस् । यसरी परावर्तन गर्दा प्राप्त प्रतिविम्ब A'B' का निर्देशाङ्कहरूमा A'(3, –1) छ भने सोहीअनुसार B' का निर्देशाङ्क कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् । अनि ΔABC र प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्कहरू तुलना गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

चित्रबाट, $A(-1, 3) \xrightarrow{\text{Re: } y = x} A'(3, -1)$

$B(4, 5) \xrightarrow{\text{Re: } y = x} B'(5, 4)$

यहाँ प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरूको स्थान बदलिएको छ । त्यसैले, $P(x, y)$ लाई $y = x$ रेखामा परार्वतन गर्दा प्रतिविम्ब $P'(y, x)$ हुन्छ ।

निश्कर्ष : $x = y$ रेखामा विन्दु $P(x, y)$ परावर्तन गर्दा,

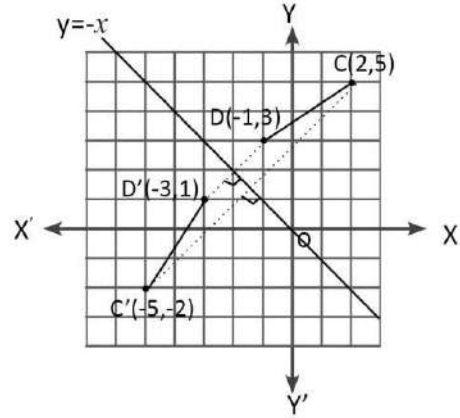
$P(x, y) \xrightarrow{\text{Re: } y = x} P'(y, x)$ हुन्छ ।

(ख) रेखा $y = – x$ मा परावर्तन (Reflection in the line $y = – x$)

$y = –x$ कस्तो रेखा हो ? के यो रेखा उद्‌गम विन्दु भएर जान्छ ? साथै कुन कुन चतुर्थांश भएर जान्छ ? साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

$y = –x$ त्यस्तो रेखा हो जसका प्रत्येक विन्दुका x र y निर्देशाङ्कका परिमाण बराबर छन् तर विपरीत चिह्न छन् [(0, 0), (1, –1), (–2, 2) आदि हुन्छन् । यो रेखा उद्‌गम विन्दु भएर जान्छ । साथै दोस्रो र चौँथो चतुर्थांश भएर जान्छ ।

क्रियाकलाप 3



दिइएको ग्राफमा रेखा CD का विन्दुहरू C(2, 5) र D(–1, 3) लाई y = –x रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिविम्ब C'D' का विन्दुहरू C' र D' लाई ग्राफमा देखाइएको छ । विन्दुहरू C' र D' का निर्देशाङ्क कति छन् ? तुलना गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

प्रक्रिया : प्रत्येक विद्यार्थीले रेखा CD का विन्दुहरू C(2, 5) र D(–1, 3) लाई y = –x रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिविम्ब C'D' का विन्दुहरू C' र D' को निर्देशाङ्क लेख्न लगाई एउटै प्रकारको परिणाम आयो वा आएन छलफल गरी यकिन गर्नुहोस् ।

यहाँ प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरूको स्थान बदलिनुका साथै चिह्न पनि बदलिएका छन् । त्यसैले P(x, y) लाई y = – x रेखामा परार्वतन गर्दा प्रतिविम्ब P'(–y, –x) हुन्छ ।

$$C(2, 5) \xrightarrow{Re:y=-x} C'(-5, -2)$$

$$D(-1, 3) \xrightarrow{Re:y=-x} D'(-3, 1)$$

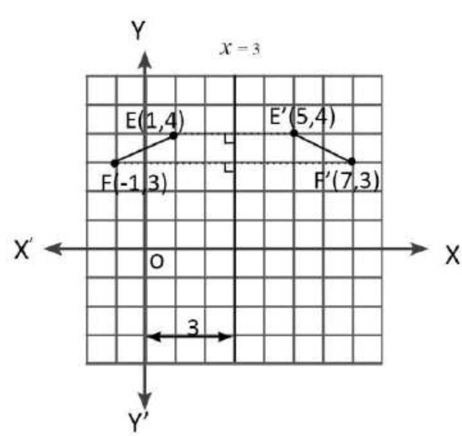
निष्कर्ष : $P(x, y) \xrightarrow{Re:y=-x} P'(-y, -x)$

(ग) रेखा x = a मा परावर्तन (Reflection in the line x = a)

x = a ले के लाई जनाउँछ ? यो रेखा कुन अक्षसँग समानान्तर हुन्छ ? साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

x = a त्यस्तो रेखा हो जुन Y– अक्षसँग समानान्तर र Y – अक्षसँग a एकाइको दुरीमा हुन्छ । अर्थात्, x = a रेखाको प्रत्येक विन्दुमा X – निर्देशाङ्क उही (a) र y – निर्देशाङ्क फरक फरक छन् ।

क्रियाकलाप 4



समस्या : दिइएको ग्राफमा रेखा EF का विन्दुहरू E(1, 4) र F(–1, 3) लाई x = 3 रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिविम्ब E'F' का विन्दुहरू E' र F' लाई ग्राफमा देखाइएको छ। विन्दुहरू E' र F' का निर्देशाङ्क कति छन् ? तुलना गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

प्रक्रिया : प्रत्येक विद्यार्थीले रेखा EF का विन्दुहरू E(1, 4) र F(–1, 3) लाई x = 3 रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिविम्ब E'F' का विन्दुहरू E' र F' को

निर्देशाङ्क लेख्न लगाई एउटै प्रकारको परिणाम आयो वा आएन छलफल गरी यकिन गर्नुहोस् ।

$$E(1, 4) \xrightarrow{x = 3} E'(5, 4) = E'(2 \times 3 - 1, 4)$$

$$F(-1, 3) \xrightarrow{x = 3} F'(7, 3) = E'(2 \times 3 - (-1), 4)$$

त्यसैले, $P(x, y) \xrightarrow{\text{Re: } x = 3} P'(2a - x, y)$

(घ) रेखा y = b मा परावर्तन (Reflection in the line y = b)

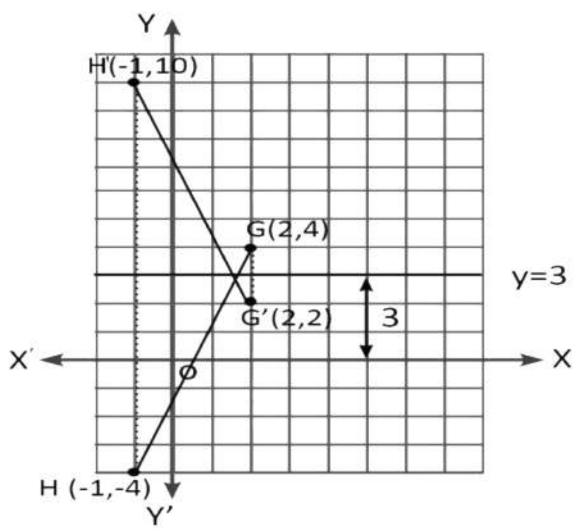
y = b ले के लाई जनाउँछ ? यो रेखा कुन अक्षसँग समानान्तर हुन्छ ? साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

y = b त्यस्तो रेखा हो जुन X – अक्षसँग समानान्तर र X – अक्षसँग b एकाइको दुरीमा हुन्छ । अर्थात्, y = b रेखाको प्रत्येक विन्दुमा X – निर्देशाङ्क फरक फरक र y – निर्देशाङ्क उही b हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 5

दिइएको ग्राफमा रेखा GH का विन्दुहरू G(2, 4) र H(–1, –4) लाई y = 3 रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिविम्ब G'H' का विन्दुहरू G' र H' लाई ग्राफमा देखाइएको छ । विन्दुहरू G' र H' का निर्देशाङ्क कति छन् ? तुलना गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।



प्रक्रिया : प्रत्येक विद्यार्थीले रेखा GH का विन्दुहरू G(2, 4) र H(–1, –4) लाई y = 3 रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिविम्ब G'H' का विन्दुहरू G' र H' को निर्देशाङ्क लेख्न लगाई एउटै प्रकारको परिणाम आयो वा आएन छलफल गरी यकिन गर्नुहोस् ।

$$G(2, 4) \xrightarrow{\text{Re: } y = 3} G'(2, 2) = G'(2, 2 \times 3 - 4)$$

$$H(-1, -4) \xrightarrow{\text{Re: } y = 3} H'(-1, 10) = H'(-1, 2 \times 3 - (-4))$$

त्यसैले, $P(x, y) \xrightarrow{\text{Re: } y = b} P'(x, 2b - y)$

उदाहरण 1

ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(2, –1), B(–3, 0) र C(–4, –2) छन् । ΔABC लाई रेखा $y = x$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA'B'C' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुबै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(2, –1), B(–3, 0) र C(–4, –2) छन् ।

ΔABC लाई रेखा $y = x$ मा परावर्तन गर्दा

हामीलाई थाहा छ,

$P(x, y) \xrightarrow{\text{Re: } y = 3} P'(y, x)$

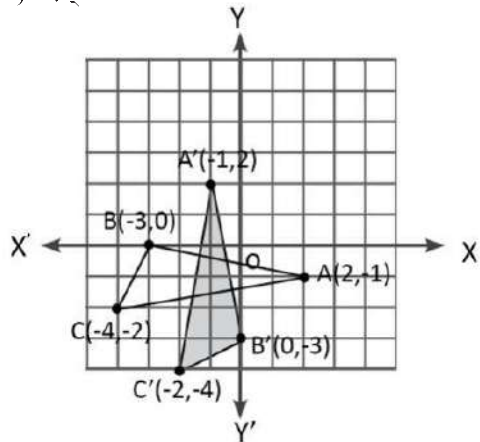
त्यसैले, A(2, –1) → A'(–1, 2)

B(–3, 0) → B'(0, –3)

C(–4, –2) → C'(–2, –4)

अतः प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का शीर्षविन्दुहरू

A'(–1, 2), B'(0, –3) र C'(–2, –4) छन् ।



ΔABC र प्रतिविम्ब ΔA'B'C' लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 2

ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(5, 3), B(–1, –2) र C(–3, 2) छन् ।

(क) ΔABC लाई $y = –x$ रेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA'B'C' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) पुनः ΔA'B'C' लाई $x = –3$ रेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA"B"C" को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । ΔABC, ΔA'B'C' र ΔA"B"C" लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएको ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(5, 3), B(–1, –2) र C(–3, 2) छन् ।

(क) ΔABC लाई $y = –x$ रेखामा परावर्तन गर्दा

हामीलाई थाहा छ,

$P(x, y) \xrightarrow{\text{Re: } y = -x} P'(-y, -x)$

त्यसैले,

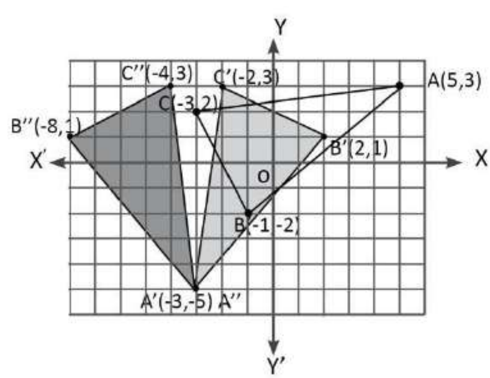
A (5, 3) → A'(–3, –5)

B (–1, –2) → B'(2, 1)

C (–3, 2) → C'(–2, 3)

अतः प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का शीर्षविन्दुहरू

A'(–3, –5), B'(2, 1) र C'(–2, 3) छन् ।



(ख) फेरि, $\Delta A'B'C'$ लाई $x = -3$ रेखामा परावर्तन गर्दा

हामीलाई थाहा छ,

$$P(x, y) \xrightarrow{Re:\ x = a} P'(2a - x, y)$$

त्यसैले,

$$A'(-3, -5) \xrightarrow{Re:\ x = -3} A''[2\times(-3) - (-3), -5] = A''(-3, -5)$$

$$B'(2, 1) \xrightarrow{Re:\ x = -3} B''[2\times(-3) - 2, 1] = B''(-8, 1)$$

$$C'(-2, 3) \xrightarrow{Re:\ x = -3} C''[2\times(-3) - (-2), 3] = C''(-4, 3)$$

अतः अन्तिम प्रतिविम्ब $\Delta A''B''C''$ का शीर्षविन्दुहरू A"(–3, –5), B"(–8, 1) र C"(–4, 3) छन् । फेरि, ΔABC, $\Delta A'B'C'$ र $\Delta A''B''C''$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

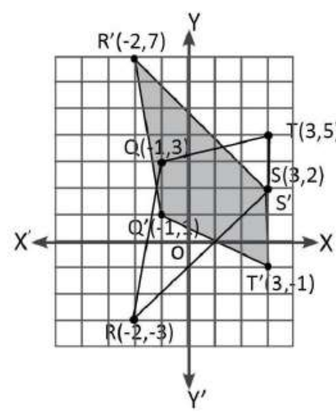
उदाहरण 3

यदि Q (–1, 3), R(–2,–3), S (3, 2) र T(3, 5) चतुर्भुज QRST को शीर्षविन्दुहरू हुन् । चतुर्भुज QRST लाई y = 2 रेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब चतुर्भुजको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेखी दुबै चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

Q(–1, 3), R(–2,–3), S(3, 2) र T(3, 5) चतुर्भुज QRST को शीर्षविन्दुहरू हुन् । चतुर्भुज QRST लाई y = 2 रेखामा परावर्तन गर्दा

हामीलाई थाहा छ,



$$P(x, y) \xrightarrow{Re:\ y = b} P'(x, 2b - y)$$

त्यसैले,

$$Q(-1, 3) \xrightarrow{Re:\ y = 2} Q'(-1, 2 \times 2 - 3) = Q'(-1, 1)$$

$$R(-2,-3) \xrightarrow{Re:\ y = 2} R'[-2, 2\times2 - (-3)] = R'(-2, 7)$$

$$S(3, 2) \xrightarrow{Re:\ y = 2} S'(3, 2 \times 2 - 2) = S'(3, 2)$$

$$T(3, 5) \xrightarrow{Re:\ y = 2} T'(3, 2 \times 2 - 5) = T'(3, -1)$$

अतः प्रतिविम्ब चतुर्भुज Q'R'S'T' का निर्देशाङ्कहरू Q'(–1, 1), R'(–2, 7), S'(3, 2) र T'(3, –1) छन् । चतुर्भुज QRST र प्रतिविम्ब चतुर्भुज Q'R'S'T' लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 4

(क) यदि परावर्तन R_1 ले A(3, 5) लाई A' (–3, 5) मा रूपान्तरण गर्छ भने परावर्तनको अक्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि परावर्तन R_2 ले B(5, –2) लाई B' (–2, 5) मा रूपान्तरण गर्छ भने परावर्तनको अक्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

(क) परावर्तन R_1 ले A(3, 5) लाई A' (–3, 5) मा रूपान्तरण गर्दा,

$A(3, 5) \xrightarrow{R_1} A'(-3, 5)$

त्यसैले, $P(x, y) \xrightarrow{R_1} P'(-x, y)$

अतः दिइएको आकृति र प्रतिविम्बका निर्देशाङ्क y – अक्षमा भएको परावर्तनसँग मिल्ने भएकाले R_1 ले y – अक्षमा भएको परावर्तन जनाउँछ ।

(ख) यहाँ, परावर्तन R_2 ले B(5, –2) लाई B' (–2, 5) मा रूपान्तरण गर्दा

$B(5, -2) \xrightarrow{R_2} B'(-2, 5)$

त्यसैले, $P(x, y) \xrightarrow{R_2} P'(y, x)$

अतः दिइएको आकृति र प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कले रेखा $y = x$ भएको परावर्तनसँग मिल्ने भएकाले R_2 ले रेखा $y = x$ भएको परावर्तन जनाउँछ ।

उदाहरण 5

ΔABC का शीर्षविन्दुहरू क्रमशः A(2, 3), B(3, 2) र C(1, 1) छन् ।

(क) यदि A(2, 3) को प्रतिविम्ब A'(2, –3) भए परावर्तनको अक्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) उक्त परावर्तनको अक्षको आधारमा बाँकी शीर्षविन्दुहरूको प्रतिविम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) ΔABC र ΔA'B'C' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

ΔABC का शीर्षविन्दुहरू क्रमशः A(2, 3), B(3, 2) र C(1, 1) छन् ।

(क) A(2, 3) को प्रतिविम्ब A'(2, –3) छ ।

$A(2, 3) \rightarrow A'(2, -3)$

त्यसैले, $P(x, y) \rightarrow P'(x, -y)$

अतः दिइएको आकृति र प्रतिविम्बका निर्देशाङ्क X -अक्षमा भएको परावर्तनसँग मिल्ने भएकाले यसले X– अक्षमा भएको परावर्तन जनाउँछ ।

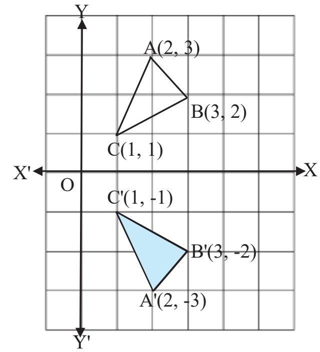
(ख) बाँकी शीर्षविन्दुहरू B(3, 2) र C(1, 1) को प्रतिविम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउँदा,

$B(3, 2) \rightarrow B'(3, -2)$

$C(1, 1) \rightarrow C'(1, -1)$

अत: बाँकी शीर्षविन्दुहरूको प्रतिविम्बको निर्देशाङ्कहरू क्रमश: $B'(3, -2)$ र $C'(1, -1)$ हुन् ।

(ग) ΔABC र $\Delta A'B'C'$ लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



अत: ΔABC र $\Delta A'B'C'$ लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

अभ्यास 3.2 (A)

1. स्थानान्तरण भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
2. परावर्तनको परिभाषा लेखी यसका 3 ओटा गुणहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।
3. विन्दुहरू $A(1, 1)$, $B(-3, 0)$, $C(4, 2)$, $D(-5, -3)$, $E(2, -3)$ लाई तलका अवस्थाहरूमा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्बका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) X – अक्ष (ख) y – अक्ष (ग) रेखा $y = x$ (घ) रेखा $y = -x$

   (ङ) रेखा $x = -3$ (च) रेखा $y = 5$

4. यदि ΔABC का शीर्षविन्दुहरू $A(-2, 0)$, $B(6, 2)$ र $C(5, 3)$ भए

   (क) ΔABC लाई रेखा $y = x$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ का शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) ΔABC लाई रेखा $x = 4$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ग) ΔABC लाई $y = -2$ रेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । आकृति र त्यसको प्रतिविम्ब लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. $P(-1, 3)$, $Q(-3, -1)$, $R(3, -4)$ र $S(2, 1)$ एउटा चतुर्भुज PQRS का शीर्षविन्दुहरू हुन् :

   (क) चतुर्भुज PQRS लाई रेखा $y = -x$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् र दुबै आकृति र प्रतिविम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

   (ख) चतुर्भुज PQRS लाई रेखा $x = 1$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् र दुबै आकृति र प्रतिविम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

6. तलका अवस्थाहरूमा परावर्तनका अक्ष पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) A(3, 5) → A'(–5, –3) (ख) B(2, –1) → B'(4, –1)

(ग) C(5, 7) → C'(–5, 7) (घ) D(–3, 4) →D'(–3,–8)

7. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(2, 3), B(3, 2) र C(1, 1) छन् । ΔABC लाई y – अक्षमा परार्वतन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA'B'C' लाई पुनः x = 3 मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA" B"C" को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । तीनओटै त्रिभुजहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

8. ΔXYZ लाई परावर्तन गर्दा ΔX' Y' Z' बन्छ जहाँ ΔX' Y' Z' को शीर्षविन्दुहरू X' (4, –2), Y' (8, –2) र Z' (8, 4) छन् । यदि ΔXYZ को एउटा शीर्षविन्दु X(2, –4) भए बाँकी शीर्षविन्दुहरू पत्ता लगाउनुहोस् । साथै परावर्तनको अक्ष पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. A(2, 5), B(–3, 3) र C(1, –4) क्रमशः ΔABC का शीर्षविन्दुहरू हुन् । यदि A(2, 5) को प्रतिविम्ब A'(2, –5) भए

(क) परावर्तनको अक्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) उक्त परावर्तनको अक्षका आधारमा बाँकी शीर्षविन्दुहरूको प्रतिविम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) ΔABC र ΔA'B'C' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1-2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) A' (1,–1), B' (–3, 0), C' (4, –2) D' (–5, 3), E(2, 3)

(ख) A' (–1, 1), B' (3, 0), C'(–4, 2), D' (5, –3), E'(–2, –3)

(ग) A' (1, 1), B'(0, –3), C' (2, 4), D' (–3, –5), E' (–3, 2)

(घ) A' (–1, –1), B'(0, 3), C'(–2, –4), D'(3, 5), E'(3, –2)

(ङ) A' (–7, 1), B' (–3, 0), C' (–10,2), D'(–1, –3), E(–8, –3)

(च) A'(1, 9), B'(–3, 10), C' (4, 8), D'(–5, 13), E (2, 13)

4. (क) A'(0,–2), B'(2, 6), C'(3, 5) (ख) A'(10, 0), B' (2, 2), C'(3, 3)

(ग) A' (–2, –4), B' (6, –6), C'(5 – 7) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. (क) P'(–3, 1), Q(1, 3), R'(4, –3), S'(–1, –2)

(ख) P'(3, 3), Q' (5, –1), R'(–1, –4), S' (0, 1) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. (क) $y = -x$ (ख) $x = 3$ (ग) y – अक्ष (घ) $y = -2$

7. A' (–2, 3), B' (–3, 2), C' (–1, 1), A" (8, 3), B"(9, 2). C" (7, 1) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

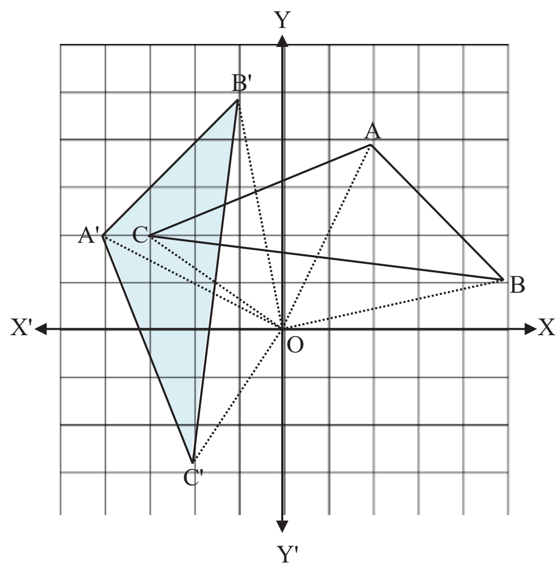
8. Y(2, 8), Z(–4, –8), $y = -x$ 9. (क) X– अक्ष (ख) B'(–3, –3), C'(1, 4)

3.2.3 ज्यामितीय आकृतिको परिक्रमण (Rotation of Geometrical Shapes)

(क) उद्गम विन्दु O(0,0) बाट +90° मा परिक्रमण (धनात्मक एक चौथाइ परिक्रमण)

Rotation through +90° about the origin (Positive quarter turn)

सँगैको चित्रमा, ΔABC लाई उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट +90° मा परिक्रमण (धनात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमण) गरेपछि प्रतिविम्ब ΔA'B'C' बनेको छ । चित्रका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नहरू साथीहरूबिच छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



(क) के ΔABC का प्रत्येक विन्दु एउटै दिशामा उत्तिकै कोणिक विस्थापन भएका छन् ?

(ख) AA', BB' र CC' जोड्नुहोस् र यी तीनओटै रेखाहरूको लम्बार्धक खिच्नुहोस् । के तिनीहरू एउटै विन्दुमा प्रतिच्छेदित छन् ?

(ग) ΔABC र ΔA'B'C' अनुरूप वा समरूप के छन्, किन ?

(घ) ΔABC र यसको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्ध पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

(क) सँगैको चित्रमा, ∠AOA' = 90°, ∠BOB' = 90° र ∠COC' = 90° । त्यसैले, ΔABC का प्रत्येक विन्दु एउटै धनात्मक दिशामा उत्तिकै 90° को कोणिक विस्थापन भएका छन् ।

(ख) AA', BB' र CC' जोडी र यी तीनओटै रेखाहरूको लम्बार्धक खिच्दा, तिनीहरू उद्गम विन्दु O मा प्रतिच्छेदित हुन्छन् ।

(ग) वस्तु ΔABC र यसको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का सङ्गती भुजाहरू र सङ्गती कोणहरू एकआपसमा बराबर छन् । त्यसैले, ΔABC ≅ ΔA'B'C' । अर्थात्, वस्तु र त्यसको परिक्रमणको प्रतिविम्ब अनुरूप हुन्छन् ।

(घ) ΔABC को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A(2, 4), B(5, 1) र C(–3, 2) छन् । त्यस्तै, ΔA'B'C' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A'(–4, 2), B'(–1, 5) र C'(–2, –3) छन् ।

शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्धका लागि,

$A(2, 4) \xrightarrow{R_o\,[O, +90^\circ]} A'(-4, 2)$

$B(5, 1) \xrightarrow{R_o\,[O, +90^\circ]} B'(-1, 5)$

$C(-3, 2) \xrightarrow{(R_o\,[O, 90^\circ]} C'(-2, -3)$

यहाँ, X र Y निर्देशाङ्क साटिएका छन् र X – निर्देशाङ्कको चिह्न बदलिएको छ । त्यसले, $P(x, y)$ लाई O को वरिपरि धनात्मक एक चौथाइ परिक्रमण गराउँदा प्रतिविम्ब $P'(-y, x)$ हुन्छ ।

अर्थात्, $P(x, y) \xrightarrow{R_o: [O, +90^\circ]} P'(-y, x)$

विचारणीय प्रश्न : $+90°$ परिक्रमण भनेकै $-270°$ परिक्रमण हो, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

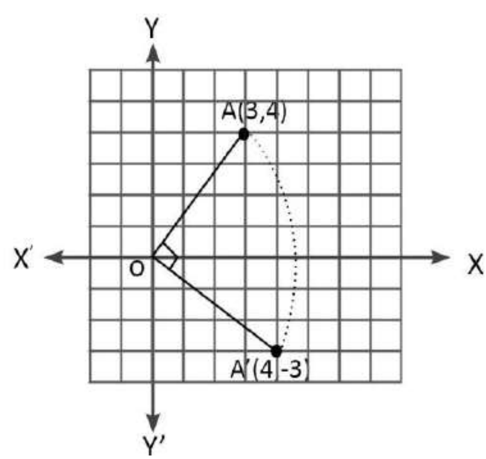
माथिको छलफलका आधारमा परिक्रमणका गुणहरू यस प्रकार छन् :

1. परिक्रमणले समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिका प्रत्येक विन्दुलाई एउटै दिशामा र उत्तिकै कोणिक विस्थापन गर्छ ।
2. परिक्रमणले आकृति र प्रतिविम्बका सङ्गत विन्दुहरू जोड्ने रेखाको लम्बार्धक परिक्रमणको केन्द्रविन्दु भएर जान्छ ।
3. वस्तु र त्यसको परिक्रमणको प्रतिविम्ब अनुरूप हुन्छन् ।
4. परिक्रमणको केन्द्र मात्र एउटा अपरिवर्तनीय विन्दु हुन्छ ।

(ख) उद्गम विन्दु O(0,0) बाट –90° मा परिक्रमण (ऋणात्मक एक चौथाइ परिक्रमण)

Rotation through –90° about the origin (0,0) (Negative quarter turn)

सँगैको चित्रमा, विन्दु A लाई उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट –90° मा परिक्रमण (ऋणात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमण) गरेपछि प्रतिविम्ब A' बनेको छ । विन्दु A र यसको प्रतिविम्ब A' को निर्देशाङ्क लेखेर, विन्दु A र यसको प्रतिविम्ब A' बिचको सम्बन्ध साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



यहाँ, विन्दु A को निर्देशाङ्क (3, 4) छ र यसको प्रतिविम्ब A' को निर्देशाङ्क (4, –3) छ । शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्धका लागि,

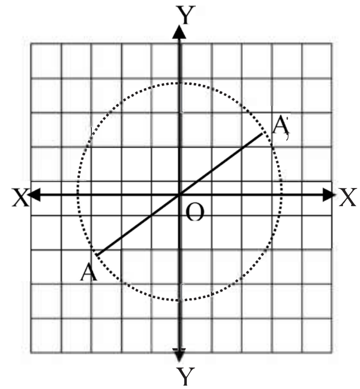
$A(3, 4) \xrightarrow{R_o: [O, -90^\circ]} A'(4, -3)$

यहाँ, x र y निर्देशाङ्क साटिएका छन् र y – निर्देशाङ्कको चिह्न बदलिएको छ । त्यसले, $P(x, y)$ लाई O को वरिपरि ऋणात्मक एक चौथाइ परिक्रमण गराउँदा प्रतिविम्ब $P'(y, -x)$ हुन्छ ।

अर्थात्, $P(x, y) \xrightarrow{R_o[O, -90°]} P'(y, -x)$

अतः –90° परिक्रमण भनेकै 270° परिक्रमण हो, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

(ग) उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट 180° मा परिक्रमण (अर्ध परिक्रमण) Rotation through 180° or Halfturn about the Origin)



सँगैको चित्रमा, विन्दु A लाई उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट 180° मा परिक्रमण (अर्धपरिक्रमण) गरेपछि प्रतिविम्ब A' बनेको छ । विन्दु A र यसको प्रतिविम्ब A' को निर्देशाङ्क लेखेर, विन्दु A र यसको प्रतिविम्ब A' बिचको सम्बन्ध साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

यहाँ, विन्दु A को निर्देशाङ्क (3, 2) छ र यसको प्रतिविम्ब A' को निर्देशाङ्क (–3, –2) छ ।

शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्धका लागि,

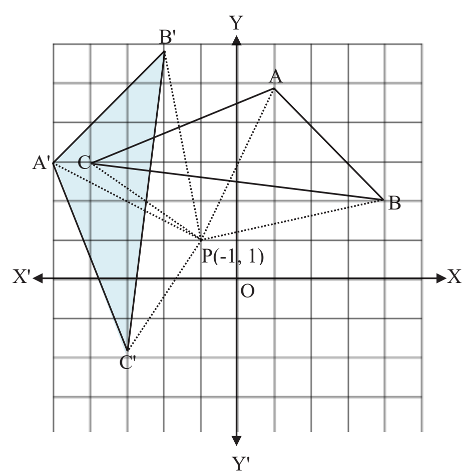
$A(3, 2) \xrightarrow{R_o:[o, -180°]} A'(-3, -2)$

यहाँ, प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कको परिमाण उही छ तर चिह्न बदलिएका छन् । त्यसैले, $P(x, y)$ लाई O को वरिपरि 180° परिक्रमण गराउँदा प्रतिविम्ब $P'(-x, -y)$ हुन्छ ।

अर्थात्, $P(x, y) \xrightarrow{R_o[o, -180°]} P'(-x, -y)$

अतः 180° परिक्रमण भनेकै –180° परिक्रमण हो, किन होला ? के अर्धपरिक्रमण पनि एउटै हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

(घ) कुनै विन्दु (a,b) बाट +90° मा परिक्रमण (धनात्मक एक चौथाइ परिक्रमण) (Rotation through +90° about any point (a, b) (Positive quarter turn)



तलको चित्रमा, ΔABC लाई कुनै विन्दु P(–1, 1) बाट +90° मा परिक्रमण (धनात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमण) गरेपछि प्रतिविम्ब ΔA'B'C' बनेको छ । ΔABC र यसको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्ध साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

यहाँ, ΔABC को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A(1, 5), B(4, 2) र C(–4, 3) छन् । त्यस्तै, ΔA'B'C' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A'(–5, 3), B'(–2, 6) र C(–3, –2) छन् ।

शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्धका लागि,

$A(1, 5) \xrightarrow{Ro:[(-1, 1), +90^\circ]} A'(-5, 3) = A'[-5+(-1+1), 1-(-1-1)]$

$B(4, 2) \xrightarrow{Ro:[(-1, 1), +90^\circ]} B'(-2, 6) = B'[-2+(-1+1), 4-(-1-1)]$

$C(-4, 3) \xrightarrow{Ro:[(-1, 1), +90^\circ]} C'(-3, -2) = C'[-3 + (-1 + 1), -4 - (-1, -1)]$

यहाँ, x र y निर्देशाङ्क साटिएका छन् र x – निर्देशाङ्कको चिह्न बदलिएको छ । प्रतिविम्बको x – निर्देशाङ्कमा परिक्रमणको केन्द्रविन्दुको x र y निर्देशाङ्कको योगफल जोडिएको छ भने प्रतिविम्बको y – निर्देशाङ्कबाट परिक्रमणको केन्द्रविन्दुको x र y निर्देशाङ्कको फरक घटाइएको छ । त्यसले, $P(x, y)$ लाई (a, b) को वरिपरि धनात्मक एक चौथाइ परिक्रमण गराउँदा प्रतिविम्ब $P'[-y + (a + b), x - (a - b)]$ हुन्छ ।

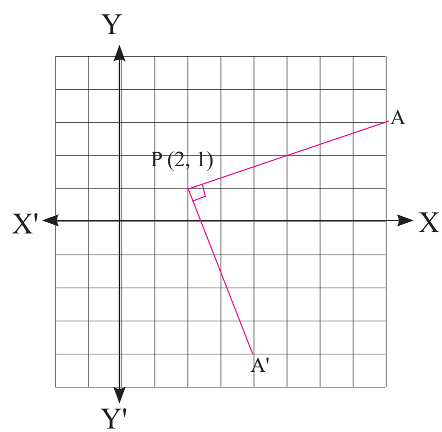
अर्थात्, $P(x, y) \xrightarrow{Ro:[(a, b),+90^0]} P'[-y + (a + b), x - (a - b)]$

अत: $+90°$ परिक्रमण भनेकै $-270°$ परिक्रमण हो, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

(ङ) कुनै विन्दु (a,b) बाट –90° मा परिक्रमण (ऋणात्मक एक चौथाइ परिक्रमण)

(Rotation through –90° about any Point (a, b) (Negative quarter turn)

सँगैको चित्रमा, विन्दु A लाई कुनै विन्दु P(2, 1) बाट –90° मा परिक्रमण (ऋणात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमण) गरेपछि प्रतिविम्ब A' बनेको छ । विन्दु A र यसको प्रतिविम्ब A' को निर्देशाङ्क लेखेर, विन्दु A र यसको प्रतिविम्ब A' बिचको सम्बन्ध साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



यहाँ, विन्दु A को निर्देशाङ्क (7, 3) छ र यसको प्रतिविम्ब A' को निर्देशाङ्क (4, –4) छ ।

शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्धका लागि,

$A (7, 3) \xrightarrow{Ro:[(2, 1), -90°]} A'(4, -4) = A'[3 + (2 - 1), -7 + (2 + 1)]$

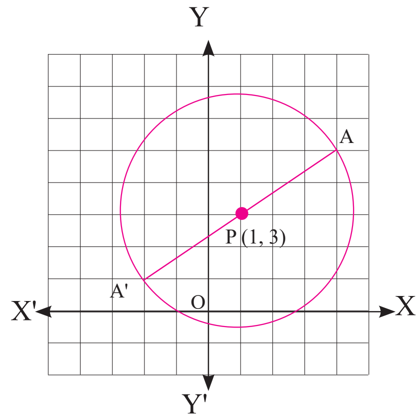
यहाँ, x र y निर्देशाङ्क साटिएका छन् र y - निर्देशाङ्कको चिह्न बदलिएको छ । प्रतिविम्बको X – निर्देशाङ्कमा परिक्रमणको केन्द्रविन्दुको x र y निर्देशाङ्कको फरक जोडिएको छ भने प्रतिविम्बको Y – निर्देशाङ्कमा परिक्रमणको केन्द्रविन्दुको x र y निर्देशाङ्कको योगफल जोडिएको छ । त्यसले, $P(x, y)$ लाई (a, b) को वरिपरि ऋणात्मक एक चौथाइ परिक्रमण गराउँदा प्रतिविम्ब $P'[y + (a - b), -x + (a + b)]$ हुन्छ ।

अर्थात्, $P(x, y) \xrightarrow{Ro:[(a, b), -90°]} P'[y + (a - b), -x + (a + b)]$

अत: $-90°$ परिक्रमण भनेकै $+270°$ परिक्रमण हो, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

(च) कुनै विन्दु (a,b) बाट 180° मा परिक्रमण [Rotation through 180° or Halfturn about any point (a, b)]

सँगैको चित्रमा, विन्दु A लाई कुनै विन्दु P(1, 3) बाट 180° मा परिक्रमण (अर्ध परिमक्रमण) गरेपछि प्रतिविम्ब A' बनेको छ । विन्दु A र यसको प्रतिविम्ब A' को निर्देशाङ्क लेखेर, विन्दु A र यसको प्रतिविम्ब A' बिचको सम्बन्ध साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



यहाँ, विन्दु A को निर्देशाङ्क (4, 5) छ र यसको प्रतिविम्ब A' को निर्देशाङ्क (–2, 1) छ ।

शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्धका लागि,

$$A(4, 5) \xrightarrow{\text{Ro: [1, 3), 180°]}} A'(-2, 1) = A'(-4 + 2 \times 1, -5 + 2 \times 3)$$

यहाँ, प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कको परिमाण उही छ तर चिह्न बदलिएका छन् । प्रतिविम्बको X – निर्देशाङ्कमा परिक्रमणको केन्द्रविन्दुको x निर्देशाङ्कको दुई गुणा जोडिएको छ भने प्रतिविम्बको Y – निर्देशाङ्कमा परिक्रमणको केन्द्रविन्दुको y निर्देशाङ्कको दुई गुणा जोडिएको छ । त्यसले, P(x, y) लाई (a, b) को वरिपरि अर्ध परिक्रमण गराउँदा प्रतिविम्ब P'($-x$ + 2a, –y + 2b) हुन्छ ।

अर्थात्, $P(x, y) \xrightarrow{\text{Ro: [1, 3),180°]}} P'(-x + 2a, -y + 2b)$

अतः +180° परिक्रमण भनेकै –180° परिक्रमण हो, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

शीर्षविन्दुहरू A(2, 4), B(5, 1) र C(–3, 2) भएको ΔABC लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा एक चौथाइ परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । ΔABC र ΔA'B'C' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

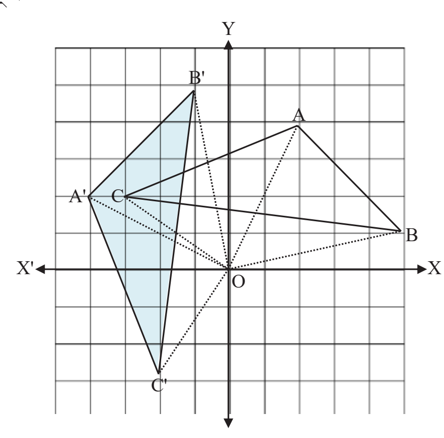
हामीलाई थाहा छ,

$$P(x, y) \xrightarrow{R_O: [O + 90°]} P'(-y, x)$$

त्यसैले, $A(2, 4) \xrightarrow{R_O: [O + 90°]} A'(-4, 2)$

$$B(5, 1) \xrightarrow{R_O: [O + 90°]} B'(-1, 5)$$

$$C(-3, 2) \xrightarrow{R_O: [O + 90°]} C'(-2, -3)$$



अतः A'(–4, 2), B'(–1, 5) र C'(–2, –3)
प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्क हुन् ।

ΔABC र प्रतिविम्ब ΔA'B'C' लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 2

ΔPQR का शीर्षविन्दुहरू P(–4, 6), Q(–1, –2) र R(3, –5) छन् । ΔPQR लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि घडीको सुई घुम्ने दिशामा 90° परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔP'Q'R' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाई दुबै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

ΔPQR का शीर्षविन्दुहरू P(–4, 6), Q(–1, –2) र R(3, –5) छन् ।

ΔPQR लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि घडीको सुई घुम्ने दिशामा 900 परिक्रमण गर्दा

हामीलाई थाहा छ,

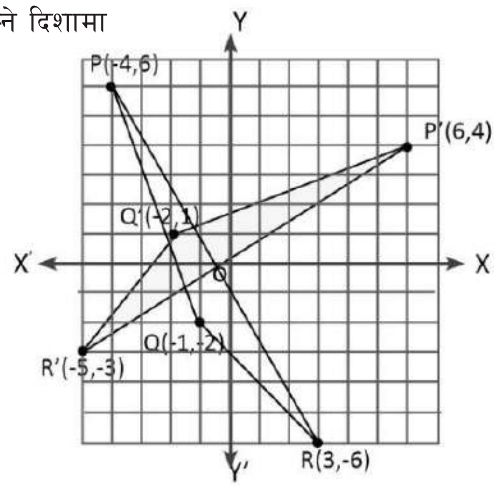
$$P(x, y) \xrightarrow{R_O: [O, -90^\circ]} P'(y, -x)$$

त्यसैले, $P(-4, 6) \xrightarrow{R_O: [O, -90^\circ]} P'(6, 4)$

$$Q(-1, -2) \xrightarrow{R_O: [O, -90^\circ]} Q'(-2, 1)$$

$$R(3, -5) \xrightarrow{R_O: [O, -90^\circ]} R'(-5, -3)$$

अतः P'(6, 4), Q'–2, 1) र R'(–5, –3) प्रतिविम्ब ΔP'Q'R' का निर्देशाङ्क हुन् ।



ΔPQR र ΔP'Q'R' लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 3

A(2, 1), B(1, –2), C(–3, –2) र D(–5, 1) समलम्ब चतुर्भुज ABCD का शीर्षविन्दुहरू हुन् । ABCD लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि 180° ले परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब चतुर्भुजको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाई दुबै चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा पस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

A(2, 1), B(1, –2), C(–3, –2) र D(–5, 1) समलम्ब चतुर्भुज ABCD का शीर्षविन्दुहरू हुन् ।

ABCD लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि 180° ले परिक्रमण गर्दा

हामीलाई थाहा छ,

$$P(x, y) \xrightarrow{R_o: O,\ 180°]} P'(-x, -y)$$

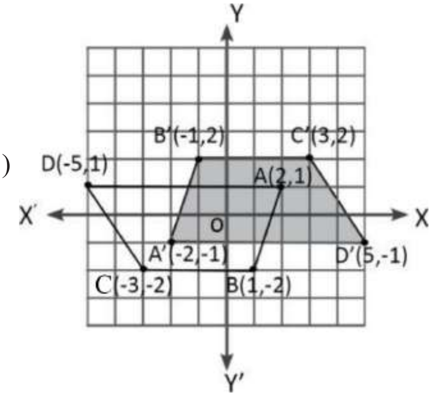
त्यसैले,

$$A(2, 1) \xrightarrow{R_O: O,\ 180°]} A'(-2, -1)$$

$$B(1, -2) \xrightarrow{R_O: O,\ 180°]} B'(-1, 2)$$

$$C(-3, -2) \xrightarrow{R_O: O,\ 180°]} C'(3, 2)$$

$$D(-5, 1) \xrightarrow{R_O: O,\ 180°]} D'(5, -1)$$



अत: A'(–2, –1), B'(–1, 2) र C'(3, 2) प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्क हुन् । चतुर्भुजहरू ABCD र A'B'CD' लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 4

यदि विन्दु A(–4, 3) लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि परिक्रमण गर्दा प्रतिविम्ब A'(3, 4) हुन्छ भने परिक्रमणको कोण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

विन्दु A(–4, 3) लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि परिक्रमण गरेर प्रतिविम्ब A'(3, 4) हुन्छ । त्यसैले

$A(-4, 3) \rightarrow A'(3, 4)$

अर्थात्, $P(x, y) \rightarrow P'(y, -x)$

यो सम्बन्धले उद्गम विन्दुको वरिपरि ऋणात्मक दिशामा भएको एक चौथाइ (–90°) परिक्रमण जनाउँछ ।

उदाहरण 5

A(2, 3), B(1, 5) र C(–2, 4) शीर्षविन्दुहरू भएको ΔABC लाई रेखा $y = x$ मा परावर्तन गरी प्रतिविम्ब ΔA'B'C' पाइयो । फेरि, ΔA'B'C लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा एक चौथाइ परिक्रमण गरी प्रतिविम्ब ΔA"B"C" पाइयो । ΔA'B'C' र ΔA"B"C" का शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाई तीनओटै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

A(2, 3), B(1,5) र C(–2, 4) ΔABC का शीर्षविन्दुहरू हुन् । ΔABC लाई रेखा $y = x$ मा परावर्तन गर्दा प्रतिविम्ब ΔA'B'C बन्छ ।

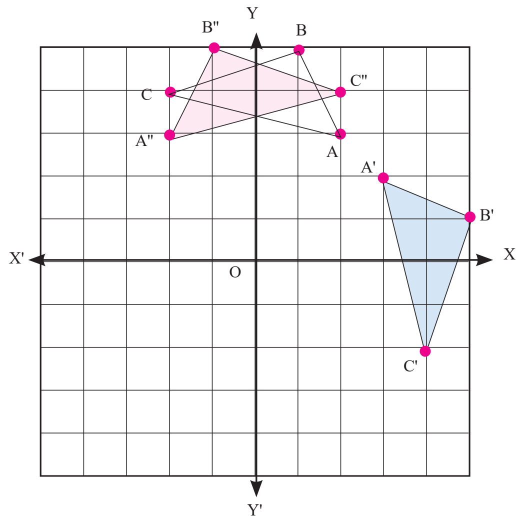
हामीलाई थाहाँ छ, $P(x, y) \xrightarrow{Re: y = x} P'(y, x)$

त्यसैले, $A(2, 3) \xrightarrow{Re: y = x} A'(3, 2)$

$B(1, 5) \xrightarrow{Re: y = x} B'(5, 1)$

$C(-2, 4) \xrightarrow{Re: y = x} C'(4, -2)$

अतः ΔABC लाई रेखा y = x मा परार्वतन गर्दा प्राप्त प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्क A'(3, 2), B'(5, 1) र C'(4, –2) छन् । फेरि, ΔA'B'C लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा एक चौथाइ परिक्रमण गरी प्रतिविम्ब ΔA"B"C बन्छ ।



हामीलाई थाहा छ,

$P(x, y) \xrightarrow{R_{O:} [O + 90°]} P'(-y, x)$

त्यसैले, $A'(3, 2) \xrightarrow{R_{o:} [O + 90°]} A''(-2, 3)$

$B'(5, 1) \xrightarrow{R_{o:} [O + 90°]} B''(-1, 5)$

$C'(4, -2) \xrightarrow{R_{o:} [O + 90°]} C''(2, 4)$

अतः ΔA'B'C' लाई रेखा y = x मा परार्वतन गर्दा प्राप्त प्रतिविम्ब ΔA"B"C" का निर्देशाङ्क A"(–2, 3), B'(–1, 5) र C'(2, 4) छन् ।

अब, ΔABC, ΔA'B'C' र ΔA"B"C" लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

अभ्यास 3.2 (B)

1. परिक्रमणलाई परिभाषित गरी यसका गुणहरू लेख्नुहोस् ।
2. कुनै विन्दु P (x, y) लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि +90° मा परिक्रमण गर्दा आउने प्रतिविम्बलाई पुनः180°मा परिक्रमण गर्दा आउने प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. कुनै विन्दु P (x, y) लाई कुनै विन्दु (a, b) को वरिपरि +90° मा परिक्रमण गर्दा आउने प्रतिविम्बलाई पुनः1800 मा परिक्रमण गर्दा आउने प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. विन्दुहरू P (7, 5), Q (–3, 4), R (–1, –3), S (6, –3) र T(–4, 7) लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि तलका अवस्थाहरूमा परिक्रमणपछि बन्ने प्रतिविम्बहरूका शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) +90° (ख) –90° (ग) 180°

5. विन्दुहरू P(7, 5), Q(–3, 4), R(–1, –3), S(6, –3) र T(–4, 7) लाई कुनै विन्दु (2, 1) को वरिपरि तलका अवस्थाहरूमा परिक्रमणपछि बन्ने प्रतिविम्बहरूका शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) +90° (ख) –90° (ग) 180°

6. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(1, 0), B(4, 5) र C(7, –2) छन् । तलको अवस्थामा ΔABC का प्रतिविम्बहरूका शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) यदि ΔABC लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि घडीको सुई घुम्ने दिशामा एक चौथाइ परिक्रमण गराइएको छ ।

(ख) यदि ΔABC लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि 180° ले परिक्रमण गराइएको छ ।

(ग) यदि ΔABC लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि +90° ले परिक्रमण गराइएको छ ।

7. A(3, 7), B(1, –1) र C(6, 8) ΔABC का शीर्षविन्दुहरू हुन् । ΔABC लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा अर्ध परिक्रमण गराउँदा बन्ने प्रतिविम्ब त्रिभुजको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् र दुबै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

8. समानान्तर चतुर्भुजका शीर्षविन्दुहरू A(2,1), B(5, 1) C(4, 4) र D(1, 4) छन् । ABCD लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि –90° ले परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लगाउनुहोस् र दुबै चतुर्भुजलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

9. A(3, 7), B(1, –1) र C(6, 8) ΔABC का शीर्षविन्दुहरू हुन् । ΔABC लाई कुनै विन्दु (–1, 1) को वरिपरि धनात्मक दिशामा अर्ध परिक्रमण गराउँदा बन्ने प्रतिविम्ब त्रिभुजको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लगाउनुहोस् र दुबै त्रिभुजलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

10. समानान्तर चतुर्भुजका शीर्षविन्दुहरू A(2, 1), B(5, 1) C(4, 4) र D(1, 4) छन् । ABCD लाई कुनै विन्दु (2, 3) को वरिपरि –90° ले परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुबै चतुर्भुजलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

11. यदि R_1, R_2, R_3 र R_4 ले उद्गम विन्दुको वरिपरि हुने परिक्रमणलाई जनाउँछ भने तलको अवस्थामा परिक्रमणको कोण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $A(-3, 4) \xrightarrow{R_1} A'(3, -4)$ (ख) $B(4, 5) \xrightarrow{R_2} B'(-5, 4)$

(ग) $C(-1, -2) \xrightarrow{R_3} C'(-2, 1)$ (घ) $D(6, -7) \xrightarrow{R_4} D'(6, -7)$

12. A (5, 2), B (3, 1) र C (2, –4) शीर्षविन्दुहरू भएको ΔABC छ । ΔABC लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि +90° ले परिक्रमण गर्दा ΔA'B'C' बन्छ र ΔA'B'C' लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि 180° ले परिक्रमण गर्दा ΔA"B"C" बन्छ भने ΔA'B'C र ΔA"B"C" का शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

13. ΔPQR का शीर्षविन्दुहरू P (3, 4), Q (–2, 6) र R (1, –5) छन् । ΔPQR लाई रेखा $x = -2$ मा परावर्तन गरी बन्ने प्रतिविम्ब ΔP'Q'R' लाई फेरि उद्गम विन्दुको वरिपरि 270° ले परिक्रमण गराउँदा ΔP"Q"R" बन्छ भने ΔP'Q'R र ΔP" Q"R" का शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाई तीन ओटै त्रिभुजलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1–3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 4. (क) P'(–5, 7), Q'(–4, –3), R'(3, –1), S'(3, 6), T'(–7, –4)

(ख) P'(5,–7, Q'(4, 3), R'(–3, 1), S'(–3, –6), T'(7, 4)

(ग) P'(–7,–5), Q (3, –4), R'(1, 3), S'(–6, 3), T'(4, –7)

5. (क) P'(–2, 6), Q'(–1, –4), R'(6, –2), S'(6, 5), T'(–4, –5)

(ख) P'(6, –4), Q'(5, 6), R'(–2, 4), S'(–2, –3), T'(8, 7)

(ग) P'(–3, –3), Q'(7, –2), R'(5, 5), S'(–2, 5), T'(8, –5)

6. (क) A'(0, –1), B'(5, –4), C'(–2, –7) (ख) A'(–1, 0), B'(–4, –5), C'(–7, 2)

(ग) A'(0, 1), B'(–5, 4), C'(2, 7) 7. A'(–3, –7), B' (–1,1), C'(–6, –8)

8. A'(1, –2), B'(1, –5), C' (4, –4), D'(4, –1) 9. A'(–5, –5), B'(–3, 3), C'(–8, –6)

10. A'(0, 3), B'(0, 0), C'(3, 1), D'(3, 4) 11. (क) 180° (ख) +90° (ग) –90°

(घ) 360° 12. A' (–2, 5), B'(–1, 3), C'(4, 2), A"(+2, –5), B"(1, –3), C"(–4, –2)

13. P'(–7, 4), Q'(–2, 6), R'(–5, –5), P"(4, 7), Q"(6, 2), R"(–5, 5)

3.2.4 ज्यामितीय आकृतिको विस्तारीकरण तथा सङ्कुचन (Enlargement and Reduction of Geometrical Shapes)

सँगैको ग्राफमा A(1, 1), B(5, 2) र C(2, 4) शीर्षविन्दु भएको ΔABC लाई विस्तारको नापो 2 विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु O मा विस्तार गरिएको छ । निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) OA, OA', OB, OB' र OC, OC' नाप्नुहोस् । $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$ र $\frac{OC}{OC}$ मान निकाल्नुहोस् र तिनीहरू बिचको सम्बन्ध पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) के A र A', B र B' तथा C र C' विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु O को एउटै दिशामा छन् ?

(ग) के ΔABC र ΔA'B'C' अनुरूप वा समरूप छन् ? कारण लेख्नुहोस् ।

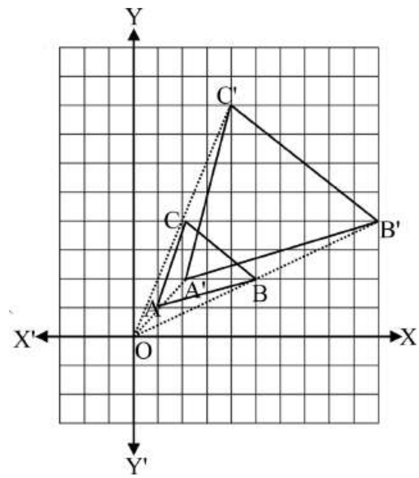
(घ) के ΔABC को 2 गुणा आकार बढेको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' हो ?

(क) सँगैको ग्राफमा, $OA = \frac{1}{2}$ OA', $OB = \frac{1}{2}$ OB' र $OC = \frac{1}{2}$ OC'। $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{1}{2}$। यहाँ ΔABC को 2 गुणा आकार बढेको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' हो । यहाँ 2 लाई विस्तारको नापो [scale factor (k)] भनिन्छ ।

त्यसैले, विस्तारको नापो $(k) = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 2$

अथवा, विस्तारको नापो $(k) = \frac{A'B'}{AB'} = \frac{B'C'}{OB} = \frac{C'A'}{CA} = 2$

यहाँ, ΔABC को आकार 'O' लाई केन्द्र बनाएर बढेको छ । उक्त विन्दु 'O' लाई विस्तारीकरण केन्द्र (centre of enlargement) भनिन्छ । यहाँ, विन्दु (A) त्यसको प्रतिविम्ब (A') र विस्तारीकरण केन्द्र O एउटै रेखामा पर्छन् ।



यसरी ज्यामितीय आकृतिको आकार निश्चित विस्तारीकरणको केन्द्र र विस्तारको नापोका आधारमा हुने परिवर्तन नै विस्तारीकरण (Enlargement) हो ।

(ख) A र A', B र B' तथा C र C' विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु O को एउटै दिशामा छन् । आकृति र प्रतिविम्ब विस्तारीकरण केन्द्रको एउटै दिशामा पर्छन् र प्रतिविम्ब आकृतिको सुल्टो देखिन्छ । त्यसैले, विस्तारको नापो [scale factor (k)] धनात्मक हुन्छ ।

(ग) ΔABC र ΔA'B'C' समरूप छन् किनभने सङ्गति भुजाहरूको अनुपात बराबर छन् । त्यसैले, विस्तारका आकृति र प्रतिविम्ब समरूप हुन्छन् ।

(घ) ΔABC को 2 गुणा आकार बढेको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' हो ।

तलको ग्राफमा A(2, 2), B(10, 4) र C(4, 8) शीर्षविन्दु भएको ΔABC लाई बिस्तारको नापो $-\frac{1}{2}$ विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु O हुनेगरी विस्तार गरिएको छ । निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

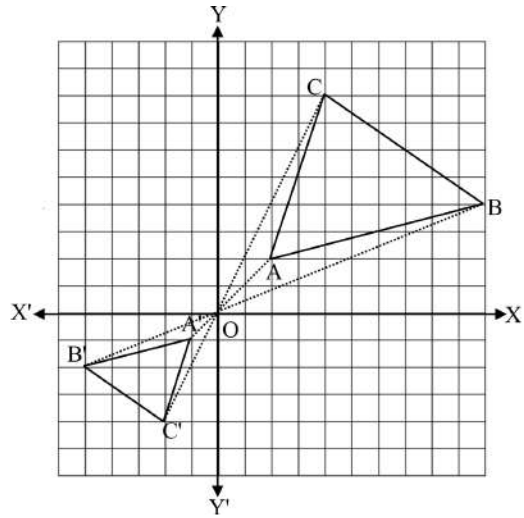
(क) OA, OA', OB, OB' र OC, OC' नाप्नुहोस् । $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$ र $\frac{OC}{OC'}$ मान निकाल्नुहोस् र तिनीहरूबिचको सम्बन्ध पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) के A र A', B र B' तथा C र C' विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु O को एउटै दिशामा छन् ?

(ग) के ΔABC र ΔA'B'C' अनुरूप वा समरूप छन् ? कारण लेख्नुहोस् ।

(घ) के ΔABC को 2 गुणा आकार बढेको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' हो ?

(क) सँगैको ग्राफमा, OA = 2OA', OB = 2OB' र OC = 2OC' भए $\frac{OA}{OA}$, $\frac{OB}{OB'}$ र $\frac{OC}{OC'}$ =2 हुन्छ । यहाँ ΔABC को $\frac{1}{2}$ गुणाले आकार घटेको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' हो । यहाँ $\frac{1}{2}$ लाई विस्तारको नापो [scale factor (k)] भनिन्छ ।



त्यसैले, विस्तारको नापो (k) = $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{1}{2}$

अथवा, विस्तारको नापो (k) = $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{1}{2}$

यहाँ, ΔABC को आकार 'O' लाई केन्द्र बनाएर घटेको छ । उक्त विन्दु 'O' लाई सङ्कुचन केन्द्र (centre of reduction) भनिन्छ । यहाँ, विन्दु (A) त्यसको प्रतिविम्ब (A') र सङ्कुचन केन्द्र O एउटै रेखामा पर्छन् ।

(ख) A र A', B र B' तथा C र C' सङ्कुचनको केन्द्र उद्गम विन्दु O को विपरीत दिशामा छन् । आकृति र प्रतिविम्ब विस्तारीकरण केन्द्रको विपरीत दिशामा पर्छन् र प्रतिविम्ब आकृतिको उल्टो देखिन्छ । त्यसैले, विस्तारको नापो [scale factor (k)] ऋणात्मक हुन्छ । त्यसैले, विस्तारको नापो (k) = $-\frac{1}{2}$

(ग) ΔABC र ΔA'B'C' समरूप छन् किनभने सङ्गती भुजाहरूको अनुपात बराबर छन् । त्यसैले, विस्तारका आकृति र प्रतिविम्ब समरूप हुन्छन् ।

माथिको छलफलका आधारमा विस्तारीकरणका गुणहरू यसप्रकार छन् :

1. विस्तारका आकृति र प्रतिविम्ब समरूप हुन्छन् ।
2. विस्तारको नापो $k > 0$ अर्थात् विस्तारको नापो धनात्मक भए आकृति र प्रतिविम्ब विस्तारीकरणको केन्द्रका एकै दिशामा पर्छन् ।

   (a) $k > 1$ भए प्रतिविम्बको आकार बढ्छ ।

   (b) $0 < k < 1$ भए आकृति र प्रतिविम्बको आकार घट्छ ।
3. विस्तारको नापो $k < 0$ अर्थात् विस्तारको नापो ऋणात्मक भए आकृति र प्रतिविम्ब विस्तारीकरण केन्द्रको विपरीत दिशामा पर्छन् र प्रतिविम्ब आकृतिको उल्टो देखिन्छ ।

   (a) $k < -1$ भए प्रतिविम्बको आकार बढ्छ ।

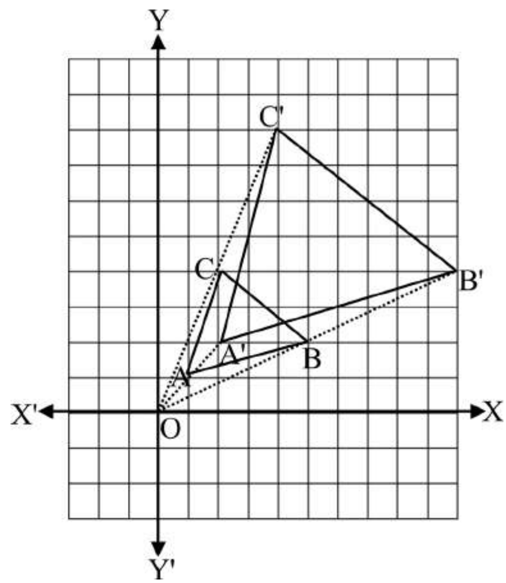
   (b) $-1 < k < 0$ भए प्रतिविम्बको आकार घट्छ ।
4. $|k| = 1$ भए आकृति र प्रतिविम्बको आकार बराबर हुन्छ ।

5. विस्तारीकरणको केन्द्र अपरिवर्तनीय विन्दु हो ।

विस्तारीकरणको केन्द्र O(0,0) र नापो k भएर हुने विस्तारीकरण लाई E(O, k) वा E[(0, 0), k] लेख्ने चलन छ ।

विस्तारीकरणमा निर्देशाङ्कको प्रयोग (Use of co-ordinates in enlargement)

(क) विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु O हुँदा (When the centre of enlarement is at the origin O)



सँगैको ग्राफबाट, ΔABC र यसको प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । ΔABC र यसको प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्ध साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

ΔABC को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A(1, 1), B(5, 2) र C(2, 4) छन् । त्यस्तै, $\Delta A'B'C'$ को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A'(2, 2), B'(10, 4) र C'(4, 8) छन् ।

फेरि,

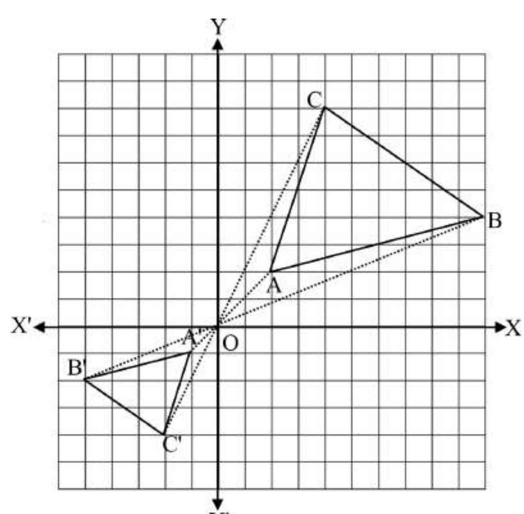
$A(1, 1) \rightarrow A'(2, 2) = A'(2 \times 1, 2 \times 1)$

$B(5, 2) \rightarrow B'(10, 4) = B'(2 \times 5, 2 \times 2)$

$C(2, 4) \rightarrow C'(4, 8) = C'(2 \times 2, 2 \times 4)$

यहाँ, प्रतिविम्बका X र Y निर्देशाङ्क आकृतिका सङ्गत X र Y निर्देशाङ्कको 2 (नापो = k) गुणा छन् । यस आधारमा विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु O र नापो k हुँदा $P(x, y)$ को प्रतिविम्ब $P'(kx, ky)$ हुन्छ ।

अर्थात् $P(x, y) \xrightarrow{E[O, k]} P'(kx, ky)$



सँगैको ग्राफबाट, ΔABC र यसको प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । ΔABC र यसको प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्ध साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

ΔABC को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A(2, 2), B(10, 4) र C(4, 8) छन् । त्यस्तै, $\Delta A'B'C'$ को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A'(–1, –1), B'(–5, –2) र C'(–2, –4) छन् ।

फेरि,

$A(2, 2) \rightarrow A'(-1, -1) = A'(-\frac{1}{2} \times 2, -\frac{1}{2} \times 2)$

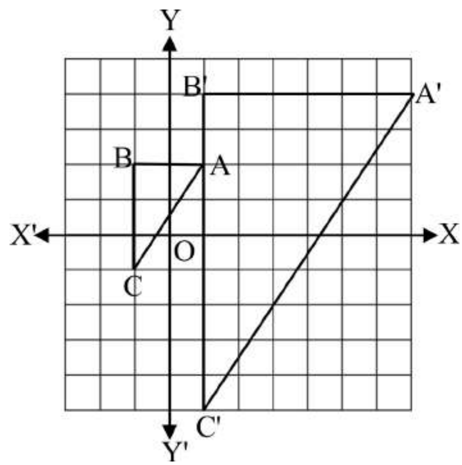
$B(10, 4) \rightarrow B'(-5, -2) = B'(-\frac{1}{2} \times 10, -\frac{1}{2} \times 4)$

$C(4, 8) \rightarrow C'(-2, -4) = C'(-\frac{1}{2} \times 4, -\frac{1}{2} \times 8)$

यहाँ, प्रतिविम्बका X – र Y – निर्देशाङ्क आकृतिका सङ्गत X – र Y – निर्देशाङ्कको $-\frac{1}{2}$ (नापो = k) गुणा छन् । यस आधारमा विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु O र नापो k हुँदा $P(x, y)$ को प्रतिविम्ब $P'(kx, ky)$ हुन्छ ।

अर्थात् $P(x, y) \xrightarrow{E[O, k]} P'(kx, ky)$

(ख) विस्तारीकरणको केन्द्र कुनै विन्दु (a, b) हुने स्थानान्तरण [Trnsformation about the centre of enlargement at any point (a, b)]



सँगैको ग्राफबाट, ΔABC र यसको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । ΔABC र यसको प्रतिविम्ब ΔA'B'C' शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कबिचको सम्बन्ध साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

ΔABC को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A(1, 2), B(–1, 2) र C(–1, –1) छन् । त्यस्तै, ΔA'B'C' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क A'(7, 4), B'(1, 4) र C'(1, –5) छन् ।

फेरि,

$A(1, 2) \rightarrow A'(7, 4) = A'[3\{1 - (-2)\} + (-2), 3(2 - 1) + 1]$

$B(-1, 2) \rightarrow B'(1, 4) = B'[3\{-1 - (-2)\} + (-2), 3(2 - 1) + 1]$

$C(-1, -1) \rightarrow C'(1, -5) = C'[3\{-1 - (-2)\} + (-2), 3(-1 - 1) + 1]$

यस आधारमा विस्तारीकरणको केन्द्र (a, b) र नापो k हुँदा $P(x, y)$ को प्रतिविम्ब $P'[k(x - a) + a, k(y - b) + b]$ हुन्छ ।

$\therefore P(x, y) \xrightarrow{E[(a,b),k]} P'[k(x - a) + a, k(y - b) + b]$

अर्को तरिका,

मानौं, $A(x, y)$ लाई नापो k र केन्द्र P(a, b) लिएर विस्तार गर्दा प्रतिविम्ब $A'(x', y')$ बन्छ ।

यहाँ, $\overrightarrow{OA} = (x, y)$

$\overrightarrow{OA'} = (x', y')$

$\overrightarrow{OP} = (a, b)$

अब, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (x, y) - (a, b) = (x - a, y - b)$

र $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OP} = (x', y') - (a, b) = (x' - a, y' - b)$

त्यसैले, $\overrightarrow{PA'} = k\,\overrightarrow{PA}$

अथवा, $(x' - a, y' - b) = k(x - a, y - b)$

अथवा, $x' - a = k(x - a)$ र $y' - b = k(y - b)$

$\therefore x' = k(x - a) + a$ $\therefore y' = k(y - b) + b$

त्यसैले, $A(x, y) \xrightarrow{E[P(a,b),k]} A'[k(x - a) + a, k(y - b) + b$

विस्तारीकरणको केन्द्र उद्‌गम विन्दु O(0, 0) र नापो k हुँदा,

$P(x, y) \xrightarrow{E[O, k]} P'(kx, ky)$

विस्तारीकरणको केन्द्र कुनै विन्दु (a, b) र नापो k हुँदा,

$P(x, y) \xrightarrow{E[(a, b), k]} P'[k(x - a) + a, k(y - b) + b]$

उदाहरण 1

विन्दु A(–3, 4) र B(5, 8) लाई तलका अवस्थाहरूमा विस्तारीकरण गर्नुहोस् :

(क) E [O, 3] (ख) $E[O, \frac{1}{2}]$ (ग) E[(1, 2), 2]

समाधान : यहाँ,

दिइएका विन्दुहरू A(–3, 4) र B(5, 8) छन् ।

हामीलाई थाहा छ,

$P(x, y) \xrightarrow{E[O, k]} P'(kx, ky)$

(क) विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो E[O, 3] हुँदा,

$A(-3, 4) \xrightarrow{E[O, 3])} A'[3 \times (-3), 3 \times 4] = A'(-9, 12)$

$B(5, 8) \xrightarrow{E[O, 3]} B'(3 \times 5, 3 \times 8) = B'(15, 24)$

(ख) विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो $E[O, \frac{1}{2}]$ हुँदा,

$A(-3, 4)\ (E[O, 1\frac{1}{2}]\ A'[\frac{1}{2} \times (-3), \frac{1}{2} \times 4] = A'\left(\frac{-3}{2}, 2\right)$

$B(5, 8)\ (E[O, \frac{1}{2}]\ \ B'(\frac{1}{2} \times 5, \frac{1}{2} \times 8) = B'(\frac{5}{2}, 4)$

(ग) विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो E[(1, 2), 2] हुँदा,

हामीलाई थाहा छ, $P(x, y) \xrightarrow{E[(a, b), k]} P'[k(x - a) + a, k(y - b) + b]$

$A(-3, 4) \xrightarrow{E[(1, 2), 2]} A'[2(-3 - 1) + 1, 2(4 - 2) + 2] = A'(-7, 6)$

$B(5, 8) \xrightarrow{E[(1, 2), 2]} B'[2(5 - 1) + 1, 2(8 - 2) + 2] = B'(9, 14)$

उदाहरण 2

A (–2, –1), B (2, 3) र C (1, 1) विन्दुहरू ΔABC का शीर्षविन्दुहरू हुन् । विस्तारीकरणको केन्द्र O(0,0) र विस्तारको नापो k = 3 लिएर ΔABC को विस्तारित प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् र दुबै त्रिभुजलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(–2, –1), B(2, 3), C(1, –1)

विस्तारीकरण केन्द्र O र विस्तारको नापो k = 3

हामीलाई थाहा छ,

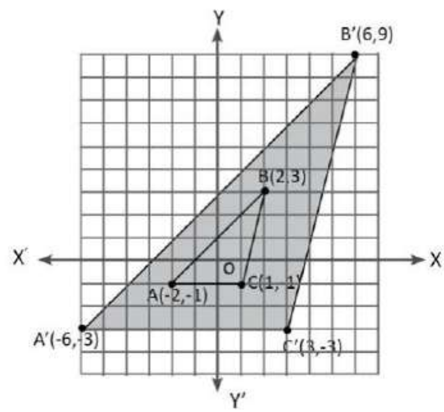
$P(x, y) \quad E[o, k] \quad P'(kx, ky)$

त्यसैले,

$A(-2, -1) \xrightarrow{E[O, 3]} A'[3 \times (-2), 3 \times (-1)] = A'(-6, -3)$

$B(2, 3) \xrightarrow{E[O, 3]} B'[3 \times 2, 3 \times 3] = B'(6, 9)$

$C(1, -1) \xrightarrow{E[O, 3]} C'[3 \times 1, 3 \times (-1)] = C'(3, -3)$



अतः A'(–6, –3), B'(6, 9) र C'(3, –3) प्रतिविम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्कहरू हुन् ।

ΔABC र ΔA'B'C' लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 3

ΔPQR का शीर्षविन्दुहरू P(3, 0), Q(0, 2) र R (3, 2) छन् विस्तारीकरणको (1, 1) र विस्तारको नापो k = –2 लिएर ΔPQR को विस्तारको प्रतिविम्ब ΔP'Q'R' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । साथै दुबै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

P (3, 0), Q (0, 2) र R (3, 2) विन्दुहरू ΔPQR का शीर्षविन्दुहरू हुन् । विस्तारको केन्द्र (a, b) = (1, 1) र विस्तारको नापो (k) = –2

हामीलाई थाहा छ, $P(x, y) \xrightarrow{E[(a, b), k])} P'[k(x - a) + a, k(y - b) + b]$

त्यसैले,

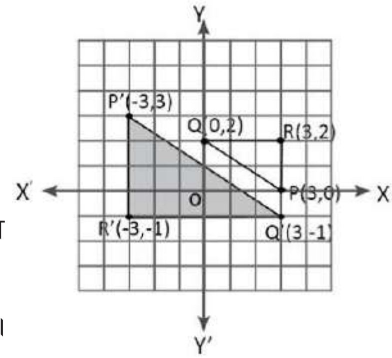
$P(3, 0) \xrightarrow{E[(1, 1), -2]} P'[-2(3 - 1) + 1, -2(0 - 1) + 1] = P'(-3, 3)$

$Q(0, 2) \xrightarrow{E[(1, 1), -2]} Q'[-2(0 - 1) + 1, -2(2 - 1) + 1] = Q'(3, -1)$

$R(3, 2) \xrightarrow{E[(1, 1), -2]} R'[-2(3 - 1) + 1, -2(2 - 1) + 1] = R'(-3, -1)$

अत: P'(–3, 3), Q'(3, –1) र R'(–3, –1) प्रतिविम्ब ΔP'Q'R' का निर्देशाङ्कहरू हुन् ।

ΔPQR र प्रतिविम्ब ΔP'Q'R' लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।



उदाहरण 4

एउटा विस्तारीकरणले विन्दु A(2, 3) लाई A' (6, 9) र B(1, 4) लाई B' (3, 12) मा विस्तार गर्छ भने विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं विस्तारीकरणको केन्द्र (a, b) र विस्तारको नापो k छन् ।

अब, विस्तारीकरणको केन्द्र (a, b) र विस्तारको नापो k हुँदा सूत्रअनुसार,

$A(2, 3) \xrightarrow{E[(a, b), k]} A'[k(2 - a) + a, k(3 - b) + b] = A'(6, 9)$

त्यसैले,

$k(2 - a) + a = 6 \ldots (i)$

$k(3 - b) + b = 9 \ldots (ii)$

र B(1, 4) E[(a, b), k]) B'[k(1 – a) + a, k(4 – b) + b] = B' (3, 12)

त्यसैले,

$k(1 - a) + a = 3 \ldots (iii)$

$k(4 - b) + b = 1 \ldots (iv)$

समीकरण (i) बाट समीकरण (iii) घटाउँदा,

$k(2 - a) + a = 6$

$k(1 - a) + a = 3$

$k(2 - a - 1 + a) = 3$

अथवा, $k = 3$

k को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$3(2 - a) + a = 6$

अथवा, $6 - 3a + a = 6$

अथवा, $-2a = 0$

$\therefore a = 0$

फेरि, k को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$3(3 - b) + b = 9$

अथवा, $9 - 3b + b = 9$

अथवा, $-2b = 0$

$\therefore b = 0$

अतः विस्तारीकरणको केन्द्र $(a, b) = (0, 0)$ र विस्तारको नापो $k = 3$

अर्को तरिका

$A(2, 3) \rightarrow A'(6, 9) = A'(3 \times 2, 3 \times 3)$

$B(1, 4) \rightarrow B'(3, 12) = B'(3 \times 1, 3 \times 4)$

त्यसैले, $P(x, y) \xrightarrow{E[O, k]} P'(kx, ky)$ सँग तुलना गर्दा

$\therefore$ विस्तारीकरणको केन्द्र . (0, 0)

विस्तारको नापो $(k) = 3$

नोटः यो तरिका विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम विन्दु (0, 0) हुँदा मात्र प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

अभ्यास 3.2 (C)

1. विस्तारीकरण भनेको के हो ? व्यावहारिक उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
2. आकृति र प्रतिविम्ब कुन अवस्थामा विस्तारीकरणको केन्द्रको एउटै दिशामा पर्छन् र कुन अवस्थामा विपरीत दिशामा पर्छन्, लेख्नुहोस् ।
3. विस्तारीकरण E ले तलका अवस्थाहरूमा विन्दुहरू A(4, 5) B(3, 0), C(–2, 3), D (–5, 0) र E(–3, –2) को विस्तारित प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) E[O, 2] (ख) E[O, –3] (ग) $E[O, \frac{3}{2}]$ (घ) $E[O, \frac{3}{2}]$

   (ङ) E[(3, –2), 2] (च) E[(1, 0), –4] (छ) $E[(-2, -2), \frac{-3}{2}]$
4. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(4, –2), B(3, 1) र C(2, 5) छन् । ΔABC लाई विस्तारीकरण E[O,2] ले विस्तार गरी बन्ने प्रतिविम्ब $\Delta A'B'C'$ को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् साथै आकृति र प्रतिविम्बलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
5. P(0, –1), Q(1, 3), R(2, 2) र S(1, –2) समानान्तर चतुर्भुज PQRS को शीर्षविन्दुहरू हुन् । समानान्तर चतुर्भुज PQRS लाई विस्तारीकरण E[(1,3), –2] ले विस्तार गरी बन्ने प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । आकृति र प्रतिविम्बलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

6. एउटा विस्तारीकरणले विन्दु A लाई A' र B लाई B' मा विस्तार गर्छ भने विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $A(3, 2) \rightarrow A'(-6, -4)$
$B(-2, 4) \rightarrow B'(4, -8)$

(ख) $A(3, -2) \rightarrow A'(9, -6)$
$B(-1, 0) \rightarrow B'(-3, 0)$

(ग) $A(-4, 0) \rightarrow A'(-10, -1)$
$B(4, 6) \rightarrow B'(6, 11)$

(घ) $A(2, 0) \rightarrow A'(3, -2)$
$B(3, 4) \rightarrow B'(5, 6)$

7. यदि विस्तारीकरण E[O, 3] ले विन्दु A(a, 2) लाई A' (9, b) मा विस्तार गर्छ भने a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. यदि विस्तारीकरण $E[(a, b), \frac{1}{2}]$ ले विन्दु A(–1, 6) लाई A' (1, 2) मा विस्तार गर्छ भने a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. कुनै विन्दु $P(x, y)$ लाई विस्तारीकरण $E[O, k_1]$ ले विस्तार गर्दा आउने प्रतिविम्बलाई फेरि विस्तारीकरण $E[0, k_2]$ ले विस्तार गर्दा आउने प्रतिविम्ब र उक्त विन्दु $P(x, y)$ लाई विस्तारीकरण $E[O, k_1. k_2]$ ले विस्तार गर्दा आउने प्रतिविम्बसँग तुलना गर्नुहोस् । यसबाट के निष्कर्ष प्राप्त भयो ? स्पष्ट पार्नुहोस् ।

10. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू कमशः A(1, 3), B(1, 5) र C(2, 5) हुन् ।

(क) ΔABC लाई $y = 0$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA'B'C' को शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) ΔA'B'C' लाई विस्तारीकरण E[(0, 0), 2] ले विस्तार गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA"B"C" को शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) तीनओटै त्रिभुजहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

11. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू क्रमशः A(3, 0), B(0, 2) र C(3, 2) हुन् ।

(क) ΔABC लाई $x = 0$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्ब ΔA'B'C' को शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) ΔA'B'C' लाई विस्तारीकरणको केन्द्र (0, 0) र नापो 2 लिदाँ बन्ने प्रतिविम्ब ΔA"B"C" को शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) तीनओटै त्रिभुजहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

12. ΔABC लाई विस्तारीकरणको केन्द्रविन्दु (4, 1) र नापो 2 लिइ विस्तारीकरण गर्दा बन्ने प्रतिविम्बको निर्देशाङ्कहरू क्रमशः A'(0, 1), B'(0, 5) र C'(6, 5) प्राप्त हुन्छन् भने शीर्षविन्दुहरू A, B र C का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1 र 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) A' (8, 10), B' (6, 0), C'(–4, 6), D' (–10, 0) E' (–6, –4)

(ख) A'(–12, –15), B'(–9, 0), C(6, –9), D'(15, 0) E(9, 6)

(ग) A'$\left(6, \frac{15}{2}\right)$, B'$\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, C'$\left(-3, \frac{9}{2}\right)$, D'$\left(\frac{-15}{2}, 0\right)$ E$\left(\frac{-9}{2}, -3\right)$

(घ) A'$\left(\frac{-4}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ B'(–1, 0), C'$\left(\frac{2}{3}, -1\right)$, D'$\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, E'$\left(1, \frac{2}{3}\right)$

(ङ) A' (5, 12), B'(3, 2) C' (–7, 8), D'(–13, 2), E (–9, –2)

(च) A' (–9, –20), B'(–7, 0), C'(13, –12), D'(25,0), E' (17, 8)

(छ) A'$\left(-11, \frac{-25}{2}\right)$, B'$\left(\frac{-18}{2}, -5\right)$, C'$\left(-2, \frac{18}{2}\right)$, D'$\left(\frac{5}{2}, 5\right)$, E'$\left(\frac{-1}{2}, -2\right)$

4. A' (8, –4), B'(6, 2), C' (4, 10) 5. P' (3, 11), Q' (1, 3), R (–1, 5), S'(1, 13)

6. (क) E[O,–2] (ख) E [O, 3] (ग) E[(2, 1), 2] (घ) E[(1, 2), 2]

7. a = 3, b = 6 8. a = 3, b = –2 9. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

10. (क) A'(1, –3), B'(1, –5), C'(2, –5) (ख) A"(2, –6), B"(2, –10), C"(4, –10)

11. (क) A'(–3, 0), B'(0, 2), C'(–3, 2) (ख) A"(–6, 0), B"(0, 4), C"(–6, 4) 12. A(2, 1), B(2, 3), C(5, 3)

नमुना परियोजना कार्य

सहकार्यात्मक परियोजना कार्य (Collaborative Project Work)

शीर्षक : परावर्तन र परिक्रमण (Reflection and Rotation) को प्रयोग

समस्या : समूहमा निर्देशाङ्कसहितका त्रिभुजलाई

1. $y = x$ रेखामा परावर्तन
2. धनात्मक र ऋणात्मक दिशामा केन्द्रविन्दु O मा 90° वा 180° परिक्रमण
3. धनात्मक र ऋणात्मक दिशामा केन्द्रविन्दु (a, b) मा 90° वा 180° परिक्रमण गर्नुहोस् ।

यसको स्वरूप र प्रकृति कस्तो बन्छ ? आफ्नो अध्ययनको निष्कर्षसहित दिइएको ढाँचामा प्रतिवेदन तयार गरी कक्षामा छलफलका लागि प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

आवश्यक सामग्री (Materials Required)

1. फोटोकपी पेपर 2. सूत्रहरूको सूची 3. ग्राफ पेपर

परियोजना कार्य गर्ने विद्यार्थी समूह

१. नाम र भूमिका : २. नाम र भूमिका :

३. नाम र भूमिका : ४. नाम र भूमिका :

परियोजना कार्य सम्पन्न गर्ने प्रक्रिया (Procedure): सबै साथीहरूले परावर्तन र परिक्रमणको सूत्रहरू लेख्नुहोस् । अनि सबैले त्रिभुजलाई माथि दिइएको अवस्थामा परावर्तन र परिक्रमण आवश्यक सूत्रहरूको प्रयोग गरी स्थानान्तरण गर्नुहोस् । तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

1. $y = x$ रेखामा परावर्तन गर्न कुन सूत्र प्रयोग गर्ने ? एकिन गर्नुहोस् ।
2. धनात्मक र ऋणात्मक दिशामा केन्द्रविन्दु O मा 90° वा 180° परिक्रमण गर्न कुन सूत्र प्रयोग गर्ने ? यकिन गर्नुहोस् ।
3. धनात्मक र ऋणात्मक दिशामा केन्द्रविन्दु (a, b) मा 90° वा 180° परिक्रमण गर्न कुन सूत्र प्रयोग गर्ने ? यकिन गर्नुहोस् ।
4. परावर्तन र परिक्रमण गर्दा यसको स्वरूप र प्रकृति कस्तो बन्छ ? लेख्नुहोस् ।

उपयोग र महत्वको खोजी (Exploration या Uses and Importance): परिक्रमण र परावर्तनको उपयोग कुन कुन क्षेत्रमा कसरी गर्न सकिन्छ खोजी गर्नुहोस् । केन्द्रविन्दु O मा र केन्द्रविन्दु (a, b) मा परिक्रमण गर्दा कस्तो असर हुन्छ ? अध्ययन गरी विश्लेषण र व्याख्या गर्नुहोस् ।

निष्कर्ष (Conclusion) : परावर्तन र परिक्रमणमा वस्तु र प्रतिविम्बको स्वरूप र प्रकृति कस्तो बन्छ ग्राफलाई अध्ययन निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

प्रतिविम्बन : तपाईंले गरेको अध्ययन विधि र निष्कर्ष कति भरपर्दो छ ? के तपाईं सही निष्कर्षमा पुग्नुभयो ? तपाईंलाई के के कठिनाई पर्‍यो ? तपाईंको निष्कर्ष निकाल्ने सही विधि कुन रहेछ ? के तपाईंले गरेकाबाहेक अन्य विधिबाट पनि यही निष्कर्षमा पुग्न सक्नुहुन्छ ? के तपाईंको निष्कर्ष निकाल्न ग्राफ वा अन्य विधि पनि उपयोगी थिए कि ? दैनिक जीवनमा यसको प्रयोग कसरी हुँदो रहेछ ? यस्तै कुराहरूमा प्रतिविम्बन गर्नुहोस् ।

परियोजना कार्यको प्रतिवेदन प्रस्तुतिका बुँदाहरू

१. परियोजना कार्यको शीर्षक

२. पृष्ठभूमि : विषयवस्तु र अध्ययनको महत्त्व

३. उद्देश्य : पत्ता लगाउने कुराहरू

४. अध्ययन प्रक्रिया

(क) अध्ययन गरेका स्रोत सामग्री

(ख) सूचना सङ्कलन विधि

(ग) विश्लेषण विधि

(घ) नतिजा र प्रस्तुति

(ङ) निष्कर्ष

(च) प्रतिविम्बन

(छ) अनुसूची

पाठ 4

भेक्टर (Vector)

4.1 परिचय (Introduction)

भौतिक परिमाणहरूको दिशा र मानका आधारमा दैनिक जीवनका विभिन्न समस्या समाधान गर्न प्रयोग गरिने गणित र विज्ञानको एउटा महत्त्वपूर्ण क्षेत्र भेक्टर हो । भेक्टरको अवधारणाको प्रयोग सर्वप्रथम आइरिस गणितज्ञ विलियम रोवन हामिल्टनले गरेका थिए । भेक्टरमा विलियम रोवन हामिल्टनको योगदान पर्याप्त र बहुमुखी थियो । उनले मुख्य अवधारणा, शब्दावली र ज्यामितीय व्याख्याहरू प्रस्तुत गरे जसले भेक्टरको विकासका लागि जग बसाल्यो ।

तलका चित्र हेरी जवाफ दिनुहोस् :

फर्सीको पिण्ड	पूर्वतिर जाँदै गरको बालिकाको गति	बिहानको समय	खस्दै गरेको बलको प्रवेग	बालकको उचाइ

(क) कुन भौतिक परिमाणहरूको मान मात्र छ तर दिशा छैन ?

(क) कुन भौतिक परिमाणको मान र दिशा दुबै छ ?

तपाईंको उत्तरलाई साथीसँग छलफल गरी शिक्षकलाई भन्नुहोस् ।

तलको चित्रमा रीमाले एउटा बल पटक पटक भित्तामा भएको गोलो चिह्नको चित्रमा फ्याँक्न खोजिन् । धेरैपटक उनले भित्तामा पुऱ्याउन सकिनन् तर एकपटक गुलेली प्रयोग गरी फाल्दा सिधा 15 m/s को गतिमा गई गोलो चिह्नमा ठोकियो ।

(क) बाटो A मा सिधा हुने गरी 15 m/s को गतिले बल चिह्नमा पुग्यो ।

(ख) बाटो B मा बल वक्र बाटामा 15 m/s को वेगले बल चिह्नमा पुगेन ।

बाटो A को निश्चित दिशा पूर्वतिर छ भने बाटो B मा बल जाने बाटाको दिशा फरक फरक हुँदै घुमेर गएको छ । बाटो A मा बलको दिशा र दुरी दुबै निश्चित छ भने बाटो B मा दुरी त निश्चित

छ तर दिशा परिवर्तन भइरहेको अवस्था छ । चित्र A मा जस्तै मान र दिशा निश्चित हुने भौतिक परिमाणलाई भेक्टर भनिन्छ भने मान हुने तर दिशा निश्चित नहुने वा दिशा नै नहुने भौतिक परिमाणलाई स्केलर भनिन्छ ।

तौल, बल, दुरी, ज्ञान, घनत्व, क्षेत्रफल, भावनामध्ये कुन कुन कुरा नाप्न सकिएला ? साथीहरूबिच छलफल गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

मापन गर्न सकिने राशिहरूलाई भौतिक राशिहरू (Physical quantities) भनिन्छ । यी दुई प्रकारका हुन्छन् । (i) स्केलर (Scalar) र (ii) भेक्टर (Vector)

(i) स्केलर (Scalar)

सामान्यतः पानी कति डिग्री तापक्रममा उम्लिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

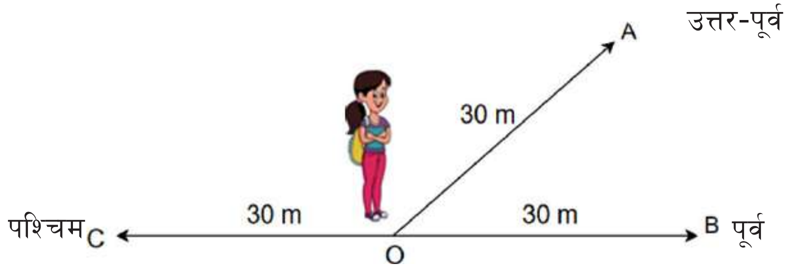
पानी 100 °C तापक्रममा उम्लिन्छ । यहाँ, मान अर्थात् सङ्ख्या (100) र एकाइ (°C) ले तापक्रमलाई पूर्ण रूपमा वर्णन गर्न सकिन्छ । तसर्थ तापक्रम एउटा स्केलर राशि हो ।

परिमाणात्मक मान (Magnitude or Quantitative value) मात्र हुने भौतिक राशिहरूलाइ स्केलर भनिन्छ । जस्तै दुरी (distance), वेग (speed), समय (time), तापक्रम (temperature) , कार्य (work), शक्ति (energy), सामर्थ्य (power) आदि स्केलर राशिहरू हुन् ।

(ii) भेक्टर (Vector)

चित्र अध्ययन गरी जवाफ दिनुहोस् ।

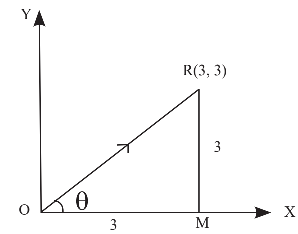
चित्रमा विन्दु O मा एक जना छात्रा 30 मी. सिधारेखामा हिँड्दा कहाँ पुग्छिन ?



माथिको प्रश्नमा छलफल गर्दा 30 m दिइएका रेखामा हिँड्दा पूर्वतिर गएमा विन्दु B मा पुगिन्छ । पश्चिमतिर गएमा विन्दु C मा र उत्तर - पूर्वतिर गएमा विन्दु A मा पुगिन्छ । प्रत्येक चरणमा विन्दु O बाट निश्चित दिशातिर विद्यार्थी विस्थापित हुँदा निश्चित विन्दुमा पुगेको छ । यो विस्थापनको उदाहरण हो । त्यसैले विस्थापनको मान 30 m हो भने दिशा विन्दुअनुसार फरक छ । त्यसैले विस्थापनमा मान र दिशा भएकाले विस्थापन एउटा भेक्टर हो ।

परिमाण र दिशा दुबै हुने भौतिक राशिहरूलाइ भेक्टर परिमाण भनिन्छ । जस्तैः विस्थापन (displacement), गति (velocity), प्रवेग (acceleration), बल (Force), तौल (weight) आदि ।

भेक्टरका प्रकारहरू (Types of Vector)



दिइएको चित्रमा O देखि R सम्मको विस्थापनलाई ($\overrightarrow{OR}$) ले जनाइन्छ ।

$\overrightarrow{OR}$ को X – खण्ड र Y – खण्डलाई कति तरिकाले लेख्न सकिएला ?

(i) लहर भेक्टर (Column vector)

माथिको चित्रमा $\overrightarrow{OR}$ लाई $\vec{a}$ ले जनाउँदा, $\vec{a}$ का X – खण्ड 3 र Y – खण्ड 3 भएकाले $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ लेख्न सकिन्छ । यसरी कुनै भेक्टरका खण्डहरू लहरमा लेखेर सानो कोष्ठले घेरिएका छन् भने त्यसरी जनाएका भेक्टरहरू लहर भेक्टर हुन् ।

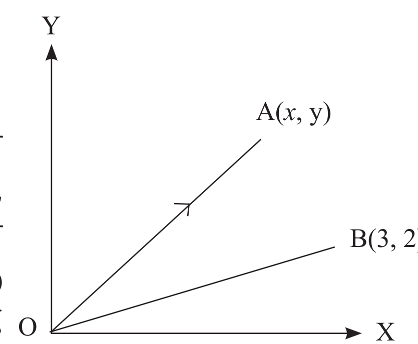
जस्तै : $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ पनि लहर भेक्टर हो ।

(ii) पङ्क्ति भेक्टर (Row vector)

माथिको $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ लाई $\vec{a} = (3, 3)$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

यहाँ X - खण्ड र Y – खण्डहरू पङ्क्तिमा राखी अल्पविराम (Comma) ले छुट्याएर सानो कोष्ठले घेरी व्यक्त गरिएका भेक्टरलाई पङ्क्ति भेक्टर भनिन्छ । जस्तैः $\vec{b} = (3, -2)$

(iii) स्थिति भेक्टर (Position vector)



सँगैको चित्रमा $\overrightarrow{OA}$ को सुरुको विन्दु के छ ?

के $\overrightarrow{OA}$ ले A को स्थितिलाई जनाउँछ ? छलफल गर्नुहोस् ।

यदि $\overrightarrow{OA}$ ले O(0,0) लाई A(x, y) मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{OA}$ ले A(x, y) को स्थिति (Position) लाई जनाउँछ । यहाँ, $\overrightarrow{OA}$ लाई स्थिति भेक्टर (Position Vector) भनिन्छ । स्थिति भेक्टरको प्रारम्भिक विन्दु जहिले पनि उद्गम विन्दु O(0, 0) हुन्छ । जस्तैः B(3, 2) को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OB}$ हो, जहाँ $\overrightarrow{OB}$ = (3, 2) हुन्छ ।

अतः उद्गम विन्दुबाट प्रारम्भ भएको भेक्टरलाई उक्त भेक्टरको अन्तिम विन्दुको निर्देशाङ्कलाई स्थिति भेक्टर (Position Vector) भनिन्छ । $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{OB}$ क्रमशः विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू हुन् ।

(iv) शून्य भेक्टर (Zero or null vector)

मानौं दुई जना मानिसहरू एउटै डोरीको दुई छेउबाट समान बल लगाई विपरीत दिशामा तानिरहेका छन् । यस अवस्थामा, डोरीमा लगाइएको बल शून्य भेक्टर हुन्छ किनभने दुई बराबर बलहरूले विपरीत दिशामा कार्य गर्ने हुनाले एकअर्कामा सन्तुलित भई दुबैतिर बलको प्रभाव शून्य हुन्छ ।

यदि कुनै भेक्टरले A(x, y) लाई A(x, y) मा नै विस्थापन गर्छ भने त्यो भेक्टरको परिमाण कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

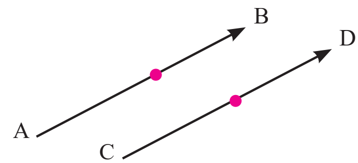
यहाँ उपर्युक्त भेक्टरको परिमाण शून्य (0) हुन्छ । यसरी शून्य परिमाण हुने भेक्टरलाई शून्य भेक्टर भनिन्छ ।

$\overrightarrow{a} = (0, 0)$ शून्य भेक्टर हो ।

(v) बराबर भेक्टरहरू (Equal vectors)

सँगैको चित्रमा $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CD}$ का परिमाण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ? के तिनीहरूको परिमाण बराबर छ ? के तिनीहरूको दिशा पनि समान छ ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

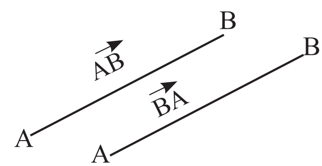
यहाँ $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A लाई B मा जति परिमाणमा जुन दिशामा विस्थापन गरेको छ $\overrightarrow{CD}$ ले विन्दु C लाई D मा त्यति नै परिमाणमा त्यही दिशामा विस्थापन गरेको छ ।



बराबर परिमाण र समान दिशामा भएका भेक्टरहरूलाई बराबर भेक्टर भनिन्छ । जस्तै : यदि $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1)$ र $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2)$ बराबर भए $x_1 = x_2$ र $y_1 = y_2$ हुनुपर्छ ।

(vi) ऋणात्मक भेक्टर (Negative vector)

सँगैको चित्रमा $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{BA}$ का परिमाण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ? के तिनीहरूको परिमाण बराबर छ ? के तिनीहरूको दिशा पनि समान छ ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

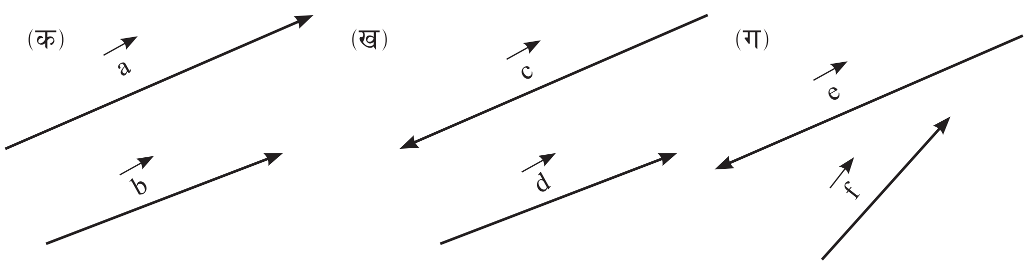


यहाँ $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A लाई B मा जति परिमाणमा जुन दिशामा विस्थापन गरेको छ $\overrightarrow{BA}$ ले विन्दु B लाई विन्दु A मा त्यति नै परिमाणमा तर विपरीत दिशामा विस्थापन गरेको छ । तिनीहरूलाई जनाउने रेखाखण्डको लम्बाइ (परिमाण) बराबर भए पनि दिशा एकअर्काका विपरीत छन् ।

बराबर परिमाण तर विपरीत दिशामा भएका भेक्टरहरूलाई ऋणात्मक भेक्टर भनिन्छ । $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{BA}$ एकअर्काका ऋणात्मक भेक्टर हुन् । त्यसैले $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ हुन्छ ।

जस्तै: यदि $\overrightarrow{a} = (6, 2)$ र $\overrightarrow{b} = (-6, -2)$ एकअर्काका ऋणात्मक भेक्टर हुन् ।

(vii) समान र असमान भेक्टरहरू (Like and unlike vectors)



माथिको चित्रमा कुन कुन भेक्टरहरूको दिशा समान छ ? कुन कुन भेक्टरहरूको दिशा विपरीत छ ? कुन कुन भेक्टरहरूको दिशा समान र विपरीत दुबै होइनन् ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

माथिको चित्रमा $\vec{a}$ र $\vec{b}$ का दिशा समान छ। यसरी दिशा समान भएका भेक्टरहरूलाई समान भेक्टर (Like vectors) भनिन्छ। जस्तै : $\vec{a} = (6, 4)$ र $\vec{b} = (3, 2)$ समान भेक्टर (Like vectors) हुन् किनकि यी दुबै धनात्मक छन्।

तर, $\vec{c}$ र $\vec{d}$ का दिशा विपरीत छन्। यसरी दिशा विपरीत भएका भेक्टरहरूलाई असमान भेक्टर (Unlike vectors) भनिन्छ। जस्तै: $\vec{c} = (-6, -4)$ र $\vec{d} = (3, 2)$ असमान भेक्टर हुन् किनकि यी भेक्टरमा एउटा ऋणात्मक र अर्को धनात्मक छन्।

समान वा असमान भेक्टरहरू समानान्तर (Parallel) वा एकरेखीय (Collinear) भेक्टरहरू हुन्।

त्यस्तै, $\vec{e}$ र $\vec{f}$ का दिशा समान र विपरीत दुबै होइनन्। त्यसैले, $\vec{e}$ र $\vec{f}$ समान भेक्टर र असमान भेक्टर दुबै होइनन्।

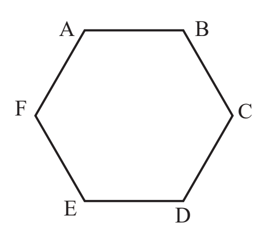
4.2 स्केलर र भेक्टरबिच भिन्नता (Difference Between Scalar and Vector)

स्केलर र भेक्टरबिच भिन्नता (Difference between scalar and vector)

स्केलर (Scalar)	भेक्टर (Vector)
जुन भौतिक राशिको मान मात्र हुन्छ त्यसलाई स्केलर भनिन्छ।	जुन भौतिक राशिको मानसँगसँगै दिशा पनि हुन्छ, त्यसलाई भेक्टर राशि भनिन्छ।
यसलाई सङ्ख्या र एकाइद्वारा निर्दिष्ट गरिएको हुन्छ।	यसलाई सङ्ख्या र एकाइका साथै दिशाद्वारा निर्दिष्ट गरिएको हुन्छ।
उदाहरण : तापक्रम, वेग आदि।	उदाहरण : गति, प्रवेग आदि।

अभ्यास 4.1

1. भेक्टर र स्केलरको उदाहरणसहित परिभाषा दिनुहोस्।
2. भेक्टर र स्केलरबिच भिन्नता उल्लेख गर्नुहोस्।
3. तलका राशिहरू भेक्टर वा स्केलर के हुन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् :
   दुरी (distance), विस्थापन (displacement), बल (force), वेग (speed), गति (velocity), काम (work), घनत्व (density), क्षेत्रफल (area), आयतन (volume), प्रवेग (acceleration)
4. उदाहरणसहित परिभाषा दिनुहोस् :
   (a) लहर भेक्टर (b) पङ्क्ति भेक्टर (c) स्थिति भेक्टर
   (d) शून्य भेक्टर (e) बराबर भेक्टरहरू (f) ऋणात्मक भेक्टर
   (g) समान भेक्टरहरू (h) असमान भेक्टरहरू
5. सँगै दिइएको नियमित षड्भुज (Regular hexagon) ABCDEF मा बराबर, समान, असमान र ऋणात्मक भेक्टरहरू पहिचान गर्नुहोस्।



6. सँगैको चित्रमा PT||QR, QS||RT र PQ||SR छन् भने तलका प्रश्नको समाधान गर्नुहोस् :

(a) $\overrightarrow{PQ}$ सँग बराबर हुने भेक्टर कुन हो ?

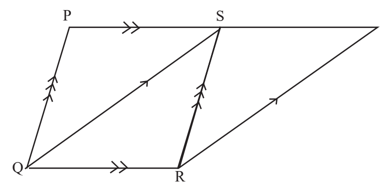
(b) $\overrightarrow{QS}$ सँग बराबर हुने भेक्टर कुन हो ?

(c) $\overrightarrow{QR}$ सँग बराबर हुने दुईओटा भेक्टर कुन कुन हुन् ?

(d) $\overrightarrow{ST}$ सँग बराबर हुने ऋणात्मक भेक्टर कुन कुन हुन् ?

(e) $\overrightarrow{RS}$ को ऋणात्मक भेक्टर कुन हो ?

(f) $\overrightarrow{TR}$ को ऋणात्मक भेक्टर कुन हो ?



उत्तर

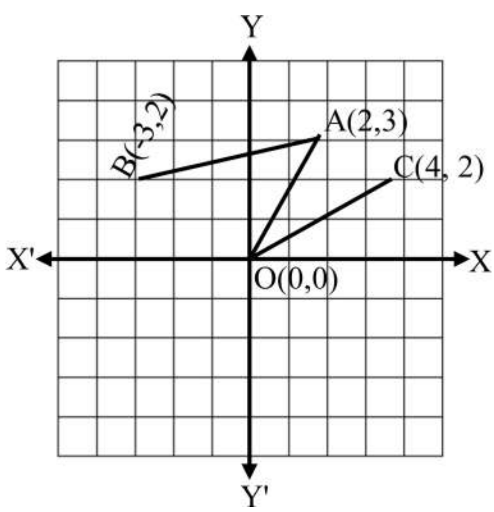
1. 1 देखि 5 सम्मको उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. (a) $\overrightarrow{SR}$ (b) $\overrightarrow{RT}$ (c) $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{ST}$

(d) $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{RQ}$ (e) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{SR}$ (f) $\overrightarrow{RT}$, $\overrightarrow{QS}$

4.3 भेक्टरलाई निर्देशाङ्क र लेखाचित्रमा प्रस्तुत (Representation of Vector in Co-ordinates and Graph)

निम्नलिखित विन्दुहरूलाई O(0, 0), A(2, 3), B(–3, 2) र C(4, 2) लेखाचित्रमा देखाएर OA, OC र AB रेखाखण्डहरू जोड्नुहोस् ।

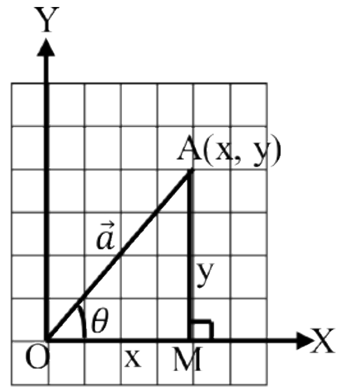


सँगैको चित्रमा OA, OC र AB रेखाखण्डहरूलाई रेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

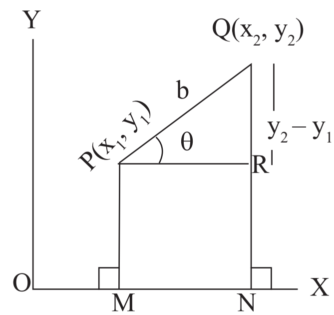
विन्दु O(0,0) बाट A(2,3) मा विस्थापन भयो भने उक्त विस्थापनलाई निर्देशित रेखाखण्ड (directed line segment) $\overrightarrow{OA}$ ले जनाइन्छ । यहाँ O सुरुको विन्दु (initial point) हो भने A विस्थापन भएपछिको अन्तिम विन्दु (terminal point) हो । त्यसैले $\overrightarrow{OA}$ भेक्टर हो । $\overrightarrow{OA}$ ले O बाट A मा भएको विस्थापनलाई जनाउँछ भने $\overrightarrow{OA}$ ले A बाट O मा भएको विस्थापनलाई जनाउँछ । त्यसैले $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{OA}$ फरक भेक्टर हुन् । त्यस्तै, $\overrightarrow{OC}$ र $\overrightarrow{AB}$ भेक्टर हुन् ।

तलको चित्रमा कुनै विन्दु O (0, 0) बाट A (x, y) मा विस्थापन भयो भने उक्त विस्थापनलाई निर्देशित रेखाखण्ड (directed line segment) $\overrightarrow{OA}$ ले जनाइन्छ । यहाँ O सुरुको विन्दु (initial point) हो

भने A विस्थापन भएपछिको विन्दु (terminal point) हो । त्यसैले $\overrightarrow{OA}$ भेक्टर हो । $\overrightarrow{OA}$ ले O बाट A मा भएको विस्थापनलाई जनाउँछ ।



सामान्यत:, भेक्टरलाई गाढा अङ्ग्रेजी अक्षर (boldface letter) ले जनाउने चलन भए पनि लेखाइमा अङ्ग्रेजी अक्षरको माथितिर arrow प्रयोग गरेर जनाइन्छ । सँगैको चित्रमा $\overrightarrow{OA}$ लाई **a** वा $\vec{a}$ ले जनाउन सकिन्छ । $\overrightarrow{OA}$ लाई भेक्टर a भनेर पढिन्छ । चित्रमा $\overrightarrow{OA}$ को पङ्क्ति विस्थापन x र लहर विस्थापन y हुन् । त्यसैले निर्देशाङ्कमा $\overrightarrow{OA}$ ($\vec{a}$) लाई पङ्क्ति (Row) मा (x, y) र लहर (Column) मा $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लेखिन्छ । यहाँ x लाई X – खण्ड (X – component) र y लाई Y - खण्ड (Y – component) भनिन्छ ।



चित्रमा विन्दुहरू $P(x_1, y_1)$ र $Q(x_2, y_2)$ जोडेर भेक्टर $\overrightarrow{PQ}$ बनेको छ । विन्दुहरू P र Q बाट क्रमश: PM र QN, X – अक्षमा लम्ब र विन्दु P बाट PR ⊥ QN खिच्दा, $PR = MN = x_2 - x_1$ र $QR = y_2 - y_1$ हुन्छ ।

यहाँ $\overrightarrow{PQ}$ ($\vec{b}$) को पङ्क्ति विस्थापन PR हो भने लहर विस्थापन QR हो । त्यसैले निर्देशाङ्कमा $\overrightarrow{PQ}$ लाई पङ्क्तिमा $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ र लहरमा $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ लेखिन्छ ।

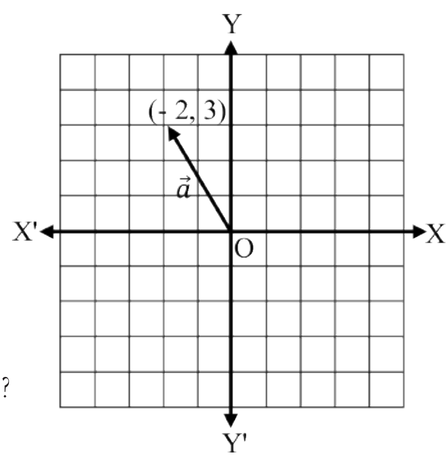
यहाँ $\overrightarrow{PQ}$ को X – खण्ड $x_2 - x_1$ र Y – खण्ड $y_2 - y_1$ हुन् ।

उदाहरण 1

भेक्टर $\vec{a} = (-2, 3)$ लाई तीर चित्र (arrow -diagram) मा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

$\vec{a} = (-2, 3)$ लाई तीर चित्रमा प्रस्तुत गर्दा ।



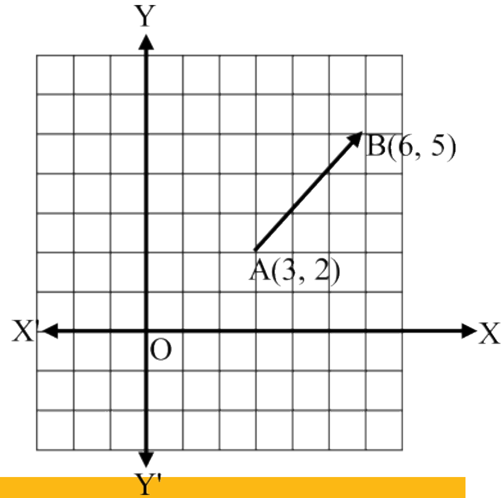
विचारणीय प्रश्न : के पङ्ति भेक्टरले स्थानमात्र जनाउँछ ?

उदाहरण 2

यदि $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A(3, 2) लाई B(6, 5) मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{AB}$ जनाउने चित्र खिच्नुहोस् र $\overrightarrow{AB}$ लाई लहर भेक्टरमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ $\overrightarrow{AB}$ लाई सँगैको तीर चित्रमा देखाउँदा,



फेरि, $A(3, 2) = (x_1, y_1)$

$B(6, 5) = (x_2, y_2)$

$\overrightarrow{AB}$ को X - खण्ड $(x) = x_2 - x_1 = 6 - 3 = 3$

$\overrightarrow{AB}$ को Y – खण्ड $(y) = y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$

त्यसैले, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

अभ्यास 4.2

1. दिइएका भेक्टरहरूलाई लेखाचित्र चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

   (क) $\vec{a} = (2, 3)$ (ख) $\vec{b} = (-3, 4)$ (ग) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ (घ) $\vec{d} = (-5, -4)$

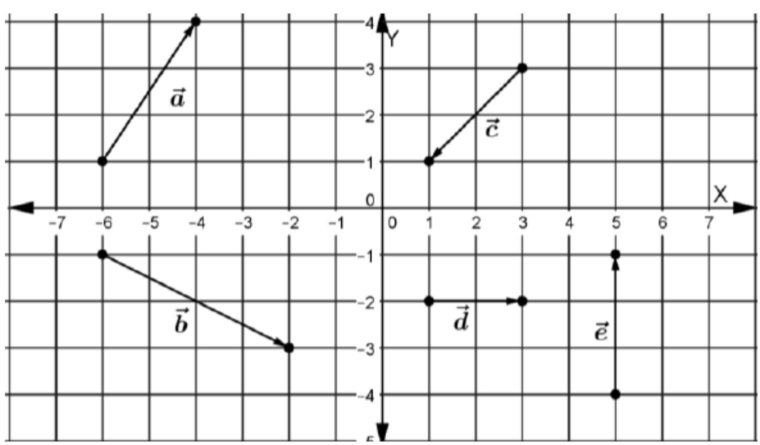
2. दिइएका निर्देशाङ्कहरूबाट $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{AB}$ पत्ता लगाई के दुबै भेक्टर बराबर छन्, खोजी गर्नुहोस् :

   (क) A(4, 3), B(2, 5) (ख) A(6, 3), B(5, –4) (ग) A(–6, 3), B(5, –2)

3. यदि $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A लाई B मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{AB}$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी लहर भेक्टरमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

   (क) A(2, 5), B(–1, 0) (ख) A(2, 3), B(–5, –4) (ग) A(–6, 4), B(0, –1)

4. तलको लेखाचित्रबाट दिइएको भेक्टरहरूलाइ निर्देशाङ्कका रूपमा लेख्नुहोस् ।



खुला प्रश्न : कुनै दुई बिन्दु प्रयोग गरी दिइएका भेक्टरहरू लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नहोस् :

(क) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (ख) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (क) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, (ख) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

   (ग) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix} \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$
3. (क) $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ (ख) $\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}$ (ग) $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$
4. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

4.4 भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम (Triangle Law of Vector Addition)

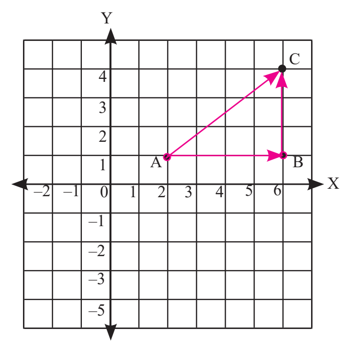
क्रियाकलाप

समस्या : दायाँ दिइएको लेखाचित्र अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् ।

(क) $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BC}$ र $\overrightarrow{AC}$ लाई निर्देशाङ्कका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ख) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ र $\overrightarrow{A}$ बिचको सम्बन्ध खोजी गर्नुहोस् ।

प्रक्रिया : उपयुक्त सङ्ख्यामा साथीहरूको समूहमा बसी माथिको समस्याको बारेमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

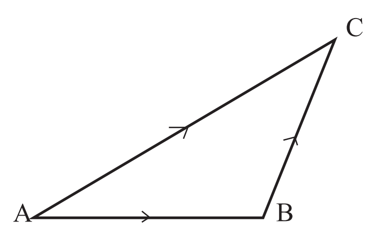


दायाँको चित्रमा, $\overrightarrow{BA}$ ले विन्दु A लाई विन्दु B मा र $\overrightarrow{BC}$ ले विन्दु B लाई विन्दु C मा विस्थापन गर्छन् भने तिनीहरूको समग्र विस्थापन $\overrightarrow{AC}$ (विन्दु A बाट विन्दु C सम्मको विस्थापन) ले दिन्छ । अर्थात् $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{BC}$ को योगफल $\overrightarrow{AC}$ हुन्छ ।

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

त्यस्तै, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

भेक्टर जोडको यो नियमलाई भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम (Triangle law of vector addition) भनिन्छ ।



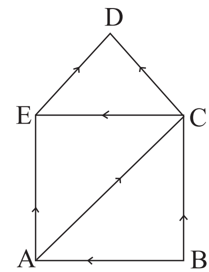
सँगैको चित्रमा ABCDE एउटा पञ्चभुज हो । यसका भुजाहरू $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ र $\overrightarrow{DE}$ लाई क्रमशः $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ र $\vec{d}$ ले जनाउँदा,

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$ [भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमबाट, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$]

$= \overrightarrow{AE}$ [भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमबाट, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$]



यो भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमको विस्तारित रूप हो ।

यसलाई भेक्टरहरू जोडको बहुभुज नियम (Polygon law of vector addition) भनिन्छ ।

4.5 भेक्टरका क्रियाहरू (Operations of vectors)

(क) भेक्टरहरूको जोड (Addition of vectors)

यदि $\vec{a} = (3, 2)$ र $\vec{b} = (6, 4)$ भए $\vec{a} + \vec{b}$ मान कति हुन्छ ? त्यस्तै, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ र $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ भए $\vec{c} + \vec{d}$ मान कति हुन्छ ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

$\vec{a} + \vec{b} = (3, 2) + (6, 4) = (3 + 6, 2 + 4) = (9, 6)$

त्यस्तै, $\vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

यसरी भेक्टरहरूलाई जोड्दा X - खण्डलाई X - खण्डसँग र Y - खण्डलाई Y – खण्डसँग जोड्नुपर्छ ।

(ख) भेक्टरहरूको घटाउ (Subtraction of vectors)

के $\vec{a} - \vec{b}$ लाई $\vec{a} + (-\vec{b})$ लेख्न सकिन्छ ? भेक्टरहरूको जोड र घटाउमा के समानता छ ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

यहाँ, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

त्यसैले दुई धनात्मक भेक्टरहरू ($\vec{a}$ र $\vec{b}$) को घटाउ भनेकै एक धनात्मक ($\vec{a}$) अर्को ऋणात्मक $(-\vec{b})$ भेक्टरहरूको जोड हो ।

जस्तै : यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ भए

$-\vec{b} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$ हुन्छ ।

अब, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

यसरी भेक्टरहरूलाई घटाउँदा X – खण्डलाई X – खण्डसँग र Y – खण्डलाई Y – खण्डसँग घटाउनुपर्छ ।

4.6 भेक्टरलाई स्केलरले गुणन (Multiplication of vector by scalar)

$\vec{a} = (3, 2)$ र $\vec{b} = (6, 4)$ को मान र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् । तिनीहरूबिच के समानता छ ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

$\vec{a}$ को मान $= |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ एकाइ

$\vec{b}$ को मान $= |\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

$= 2\sqrt{13}$ एकाइ

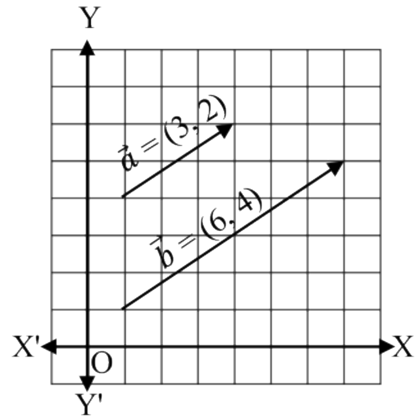
$\vec{a}$ को दिशा $= \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$\vec{b}$ को दिशा $= \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

यहाँ $|\vec{a}|$ लाई 2 ले गुणन गर्दा $|\vec{b}|$ हुन्छ अनि $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को दिशा समान छन् ।

त्यसैले, $\vec{b} = (6, 4) = 2(3, 2) = 2\,\vec{a}$

यहाँ $\vec{a}$ लाई 2 (स्केलर सङ्ख्या) ले गुणन गर्दा $\vec{b}$ बन्छ ।

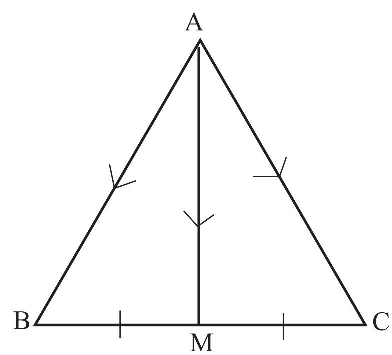


यसरी कुनै भेक्टरलाई कुनै सङ्ख्याले (स्केलर सङ्ख्या) गुणन गर्नुलाई भेक्टरलाई स्केलरले गुणन भनिन्छ । यदि $\vec{a} = (x, y)$ एउटा भेक्टर र k कुनै स्केलर छ भने $\vec{a}$ लाई k ले गुणन गर्दा $k\vec{a} = k(x, y) = (kx, ky)$ हुन्छ । यहाँ $k\vec{a}$ को परिमाण $\vec{a}$ को k गुणा हुन्छ । k धनात्मक (+ ve) हुँदा $\vec{a}$ र k $\vec{a}$ दिशा समान हुन्छ भने k ऋणात्मक (– ve) हुँदा $\vec{a}$ र $k\vec{a}$ दिशा विपरीत हुन्छ । k धनात्मक वा ऋणात्मक जे हुँदा पनि $\vec{a}$ र k $\vec{a}$ समानान्तर हुन्छन् । माथिको चित्रमा $\vec{a}$ र $\vec{a}$ को दिशा समान छन् र $\vec{b} = 2\vec{a}$ । त्यसैले, $\vec{a}$ र $\vec{b}$ समानान्तर छन् ।

उदाहरण 1

ΔABC मा BC को मध्यविन्दु M भए प्रमाणित गर्नुहोस् $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

समाधान



ΔABC मा BC को मध्यविन्दु M हो ।

ΔABM मा, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ ....(i)

ΔACM मा, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ ....(ii)

समीकरणहरू (i) र (ii) जोड्दा,

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$

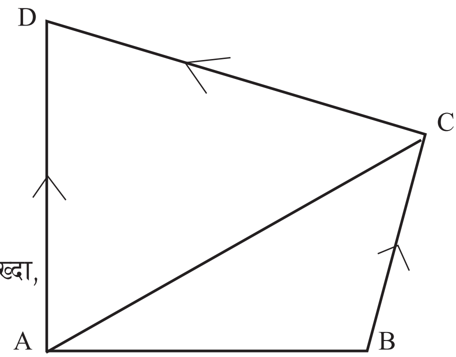
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM}$ [BC को मध्यविन्दु M भएकाले, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{BM}$]

$\therefore 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

चतुर्भुज ABCD मा, प्रमाणित गर्नुहोस् $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

समाधान



चतुर्भुज ABCD को विकर्ण AC हो ।

ΔABC मा, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ....(i)

ΔACD मा, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ....(ii)

समीकरण (i) बाट $\overrightarrow{AC}$ को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

अथवा, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = 0$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

$\vec{a} = (1, -2)$ र $\vec{b} = (-3, 6)$ आपसमा समानान्तर छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a} = (1, -2)$ र $\vec{b} = (-3, 6)$

अब, $\vec{a} = (-3, 6) = -3(1, -2)$

अथवा, $\vec{b} = -3\vec{a}$

अत: $\vec{a}$ र $\vec{b}$ आपसमा समानान्तर छन् ।

उदाहरण 4

यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ भए $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ र $2\vec{a} - 3\vec{b}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+9 \\ 10-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix}$$

अभ्यास 4.3

1. यदि $\overrightarrow{AB} = (-5, 7)$ र $\overrightarrow{BC} = (2, 1)$ भए $\overrightarrow{AC}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. यदि $\overrightarrow{OA} = (2, -3)$ र $\overrightarrow{OB} = (0, 2)$ भए $\overrightarrow{AB}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. यदि विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $\vec{i} + 2\vec{j}$ र $3\vec{i} - \vec{j}$ भए $\overrightarrow{AB}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. यदि $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ भए $\overrightarrow{OB}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

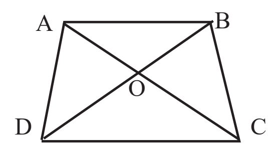
5. ΔABC मा प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

6. चतुर्भुज PQRS मा प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = 0$

7. एउटा नियमित पञ्चभुज ABCDE मा प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

8. समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

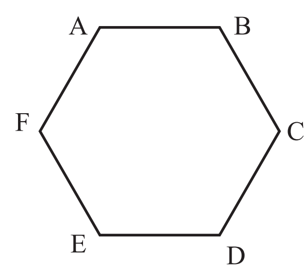
9. सँगैको चित्रबाट, निम्नलिखित भेक्टरहरू पत्ता लगाउनुहोस् :



(क) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ (ख) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

(ग) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$ (घ) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AD}$

10. सँगैको नियमित षड्भुजमा यदि $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ र $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ भए तलका भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ मा व्यक्त गर्नुहोस् :



(क) $\overrightarrow{AC}$ (ख) $\overrightarrow{AD}$

(ग) $\overrightarrow{AE}$ (घ) $\overrightarrow{AF}$

11. यदि $\vec{a} = (4, -2)$ भए निम्न भेक्टरहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $3\vec{a}$ (ख) $\frac{1}{2}\vec{a}$ (ग) $\frac{3}{2}\vec{a}$

12. तलका जोडा भेक्टरहरू आपसमा समानान्तर छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix}$ (ख) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

13. यदि $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + k\vec{j}$ र $\vec{a} // \vec{b}$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ भए तलका भेक्टरहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\vec{a} + \vec{b}$ (ख) $\vec{a} - \vec{b}$ (ग) $\vec{b} - \vec{a}$

(घ) $2\vec{a} + \vec{b}$ (ङ) $3\vec{a} - 2\vec{a}$ (च) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

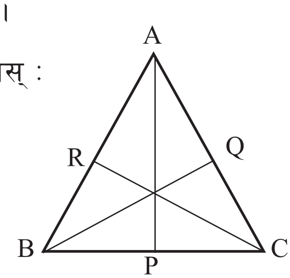
15. (क) यदि $\vec{a} - \vec{b} = (12, 4)$ र $\vec{b} = (5, 7)$ भए $\vec{a}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $\vec{a} + \vec{b} = (5, 1)$ र $\vec{a} = (0, 4)$ भए $\vec{b}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $2\vec{a} + 3\vec{b} = (0, -7)$ र $\vec{b} = (2, -3)$ भए $\vec{a}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

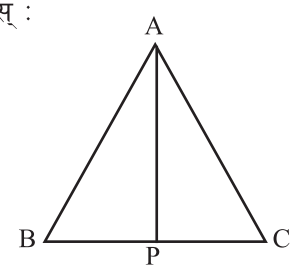
16. दिइएको ΔABC मा AP, BQ र CR मध्यिकाहरू भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = 0$

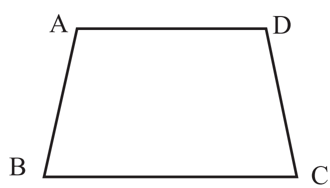


17. दिइएको ΔABC को भुजा BC मा विन्दु P छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{BP}$



18. दिइएको चतुर्भुज ABCD मा $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



19. यदि चारओटा विन्दुहरू क्रमशः A(1, –2), B(2, –5), C(4, 5) र D(5, 2) भए $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

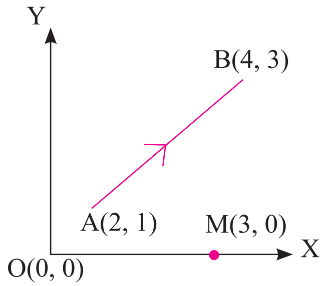
20. यदि P(–2, 3), Q(–5, 6), R(2, 7) र S(5, 4) दिइएका विन्दुहरू भए $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

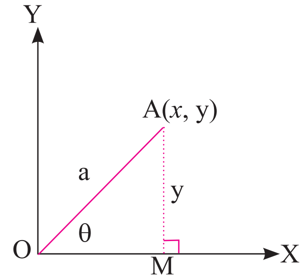
उत्तर

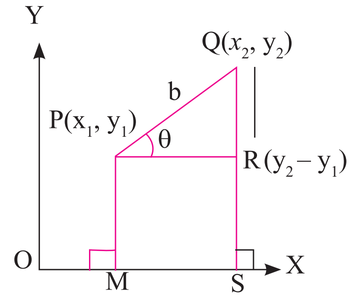
1. (–3, 8)	2. (–2, 5)	3. $2\vec{i} - 3\vec{j}$	4. (11, 11)		
9.(क) $\overrightarrow{BA}$	(ख) $\overrightarrow{DC}$	(ग) $\overrightarrow{DA}$	(घ) $\overrightarrow{AO}$	10. (क) $\vec{a} + \vec{b}$	
(ख) $2\vec{b}$	(ग) $2\vec{b} - \vec{a}$	(घ) $\vec{b} - \vec{a}$	11. (क) (12, –6)	(ख) (2, –1)	
(ग) (6, –3)	13. –4	14. (क) (–2, 6)	(ख) (4, –2)	(ग) (–4, 2)	
(घ) (–1, 8)	(ङ) (9, –2)	(च) (–4, 7)	15. (क) (17, 11)	(ख) (5, –3)	(ग) (–3, 1)

4.7 भेक्टरको परिमाण, दिशा र एकाइ भेक्टर (Magnitude, Direction of a Vector and Unit Vector)

भेक्टरको परिमाण (Magnitude of a vector)







माथिका चित्रहरूलाई अध्ययन गरी, OM, AB, OA र PQ को लम्बाइ कसरी पत्ता लगाउन सकिएला ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

> कुनै दुई विन्दुहरूबिचको दुरीको सूत्र प्रयोग गरेर माथि उल्लेख गरिएका रेखाखण्डहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउन सकिन्छ । कुनै भेक्टर जनाउने निर्देशित रेखाखण्डको लम्बाइलाई नै उक्त भेक्टरको परिमाण (Magnitude of a vector) भनिन्छ । $\vec{a}$ को परिमाणलाई $|\vec{a}|$ ले जनाइन्छ । $|\vec{a}|$ लाई $\vec{a}$ को निरपेक्ष मान (Modulus of $\vec{a}$) भनी पढिन्छ ।

माथिका चित्रहरूमा,

OM को लम्बाइ = $\sqrt{(3-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{(3)^2+(0)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9}$
= 3 एकाइ हुन्छ ।

त्यसैले, $\overrightarrow{OM}$ को परिमाण = $|\overrightarrow{OM}|$ = 3 एकाइ हुन्छ ।

त्यस्तै, AB को लम्बाइ = $\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2} = = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} =$
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ एकाइ हुन्छ ।

त्यसैले, $\overrightarrow{AB}$ को परिमाण = $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$ एकाइ हुन्छ ।

त्यस्तै, OA को लम्बाइ = $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x)^2+(y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$
एकाइ हुन्छ ।

त्यसैले, $\overrightarrow{OA}$ को परिमाण = $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2+y^2}$ एकाइ हुन्छ ।

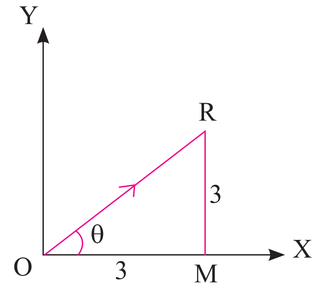
त्यस्तै, PQ को लम्बाइ = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ एकाइ हुन्छ ।

त्यसैले, $\overrightarrow{PQ}$ को परिमाण = $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ एकाइ हुन्छ ।

> समग्रमा, भेक्टरको परिमाण = $\sqrt{(X-\text{खण्ड})^2+(Y-\text{खण्ड})^2}$
>
> जस्तै : $\vec{a}$ = (3, 4) भए $|\vec{a}| = \sqrt{(3^2+4\ )} = \sqrt{(9+16)} = \sqrt{25} = 5$ एकाइ
>
> लम्बाइ धनात्मक चिह्नमा मात्र व्यक्त गरिने हुनाले भेक्टरको परिमाण पनि धनात्मक हुन्छ ।

भेक्टरको दिशा (Direction of a vector)

सँगैको चित्रमा रेखाखण्ड OR ले X – अक्षसँग धनात्मक दिशामा (positive direction) कति डिग्रीको कोण बनाउँला ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



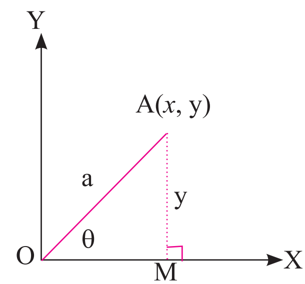
मानौँ, रेखाखण्ड OR ले X – अक्षसँग धनात्मक दिशामा (positive direction) बनाएको कोण θ हो ।

$\tan\theta = \frac{RM}{OM} = \frac{3}{3} = 1 = \tan 45°$

$\therefore \theta = 45°$

यहाँ, $\overrightarrow{OR}$ ले धनात्मक X – अक्षसँग 45° को कोण बनाएको छ । यही 45° को कोणलाई $\overrightarrow{OR}$ को दिशा भनिन्छ ।

त्यस्तै,



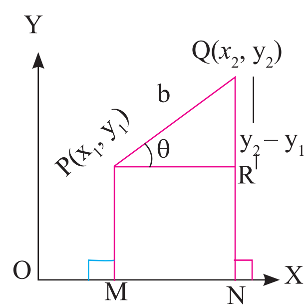
मानौँ, सँगैको चित्रमा $\overrightarrow{OA}$ ले X – अक्षसँग धनात्मक दिशामा बनाएको कोण θ हो ।

$\tan\theta = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{x}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

त्यसैले, $\overrightarrow{OA}$ को दिशा $(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ हुन्छ ।

त्यसैगरी,



सँगैको चित्रमा $\overrightarrow{PQ}$ ले X – अक्षसँग धनात्मक दिशामा बनाएको कोण θ हो ।

$$\tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

त्यसैले, $\overrightarrow{PQ}$ को दिशा $(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ हुन्छ ।

कुनै पनि भेक्टरले X – अक्षसँग धनात्मक दिशामा बनाएको कोणको नापलाई उक्त भेक्टरको दिशा भनिन्छ ।

भेक्टरको दिशा : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Y खण्ड}}{\text{X खण्ड}}\right)$

जस्तै : $\vec{a} = (3, 2)$ को दिशा $(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69°$

$\vec{a} = (1,0)$ र $\vec{b} = (0,1)$ का परिमाण पत्ता लगाई समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् । के $\vec{a}$ र $\vec{b}$ मान 1 एकाइ छ ?

परिमाण 1 एकाइ हुने भेक्टरलाई एकाइ भेक्टर भनिन्छ ।

$\vec{a} = (1, 0)$ भए $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$ एकाइ

त्यस्तै, $\vec{b} = (0, 1)$ भए $|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$ एकाइ

यहाँ, $\vec{a}$ र $\vec{b}$ मान 1 एकाइ छ । त्यसैले, $\vec{a}$ र $\vec{b}$ एकाइ भेक्टर हुन् ।

कुनै भेक्टर $\vec{a}$ लाई त्यसको परिमाण $|\vec{a}|$ ले भाग गर्दा आउने नै $\vec{a}$ दिशाको एकाइ भेक्टर (Unit vector) हो । यसलाई $\hat{a}$ ले जनाइन्छ ।

त्यसैले, $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

जस्तै : $\vec{a} = (3,4)$ भए $\vec{a}$ को दिशाको एकाइ भेक्टर

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

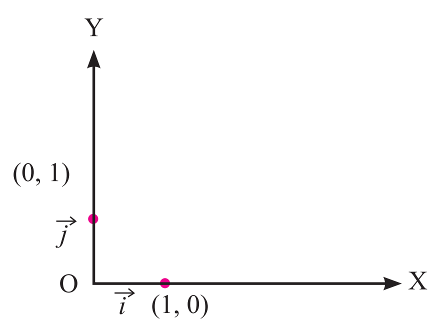
X – अक्ष र Y – अक्षसँग समानान्तर हुने एकाइ भेक्टर

X – अक्ष र Y – अक्षसँग समानान्तर हुने एकाइ भेक्टरलाई क्रमशः $\vec{i} = (1,0)$ र $\vec{j} = (0,1)$ ले जनाइन्छ ।

कुनै भेक्टर $\vec{a} = (x, y)$ लाई $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ लेख्न सकिन्छ ।

किनभने,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ &= x(1,0) + y(0,1) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x + 0, 0 + y) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$



उदाहरण 1

यदि $\vec{a} = (-4, 3)$ भए यसको परिमाण, दिशा र $\vec{a}$ को दिशामा एकाइ भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a} = (-4, 3)$

X– खण्ड (x) = – 4

Y– खण्ड (y) = 3

अब, $\vec{a}$ को परिमाण $= |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ एकाइ

$\vec{a}$ को दिशा $= \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-4}\right) = 36.87°$

यहाँ, X– खण्ड ऋणात्मक र Y– खण्ड धनात्मक भएकोले θ दोस्रो चतुर्थांश पर्छ ।

त्यसैले, $\theta = 180^0 - 36.87^0$

$\therefore \theta = 143.13^0$

फेरि,

$\vec{a}$ को दिशामा एकाइ भेक्टर $= \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-4,3)}{5} = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

अत: $\vec{a}$ को परिमाण = 5 एकाइ, $\vec{a}$ को दिशा $= \theta = 143.13^0$ र $\vec{a}$ को दिशामा एकाइ भेक्टर $= \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ हुन्

उदाहरण 2

यदि $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A(5, 3) लाई विन्दु B(8, 1) मा विस्थापन गर्छ र $\overrightarrow{PQ}$ ले विन्दु P(2, 0) लाई विन्दु Q(–1, 2) मा विस्थापन गर्छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PQ}|$

समाधान

$\overrightarrow{AB}$ को लागि,

मानौँ, $A(5,3) = (x_1, y_1)$ र

$B(8,1) = (x_2, y_2)$

$\overrightarrow{AB}$ को परिमाण $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(8-5)^2 + (1-3)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{9 + 4}$

$= \sqrt{13}$ एकाइ

$\overrightarrow{PQ}$ को लागि,

मानौँ, $P(2, 0) = (x_1, y_1)$ र

$Q(-1, 2) = (x_2, y_2)$

$\overrightarrow{PQ}$ को परिमाण $= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$= \sqrt{(-1-2)^2 + (2-0)^2}$
$= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{9+4}$
$= \sqrt{13}$ एकाइ

तसर्थ, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PQ}|$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

यदि $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A(3, 1) लाई विन्दु B(5, –2) मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{AB}$ लाई $x\vec{i} + y\vec{j}$ स्वरूपमा व्यक्त गर्नुहोस् र $\overrightarrow{AB}$ को दिशाको एकाइ भेक्टर पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, A(3, 1) = (x_1, y_1) र
B(5 ,–2) = (x_2, y_2)

$\therefore \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 5-3 \\ -2-1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
$= 2\vec{i} - 3\vec{j}$

अब, $\overrightarrow{AB}$ को परिमाण $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ एकाइ

फेरि, $\overrightarrow{AB}$ को दिशाको एकाइ भेक्टर $= \widehat{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(2,-3)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$

उदाहरण 4

यदि $\vec{a} = (x, 1)$ एउटा एकाइ भेक्टर भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a} = (x, 1)$ एउटा एकाइ भेक्टर भएकाले $|\vec{a}| = 1$

फेरि, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 1^2}$

अथवा, $1 = \sqrt{x^2 + 1}$

दुबैतर्फ वर्ग गर्दा,

$1 = x^2 + 1$

अथवा, $x^2 = 1 - 1$

$\therefore x = 0$

उदाहरण 5

यदि $\vec{a} = (2, 1)$ र $\vec{b} = (6, 3)$ भए $\vec{a}$ र $\vec{b}$ समान भेक्टर हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

दिशा समान भएका भेक्टरहरूलाई समान भेक्टर भनिन्छ । त्यसैले $\vec{a}$ र $\vec{b}$ लाई समान देखाउन, तिनीहरूका दिशा समान देखाउनुपर्छ ।

यहाँ, $\vec{a} = (2, 1) = (x, y)$

$\vec{a}$ को दिशा $(\theta) = = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

त्यस्तै, $\vec{b} = (6, 3) = (x, y)$

$\vec{b}$ को दिशा $(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

यहाँ $\vec{a}$ र $\vec{b}$ दिशा समान भएकाले तिनीहरू समान भेक्टर हुन् ।

उदाहरण 6

यदि $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A(2, 2) लाई विन्दु B(5, 6) मा विस्थापन गर्छ र $\overrightarrow{CD}$ ले विन्दु C(3, 0) लाई विन्दु D(6, 4) मा विस्थापन गर्छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$

समाधान

बराबर परिमाण र समान दिशामा भएका भेक्टरहरूलाई बराबर भेक्टर भनिन्छ । त्यसैले $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CD}$ लाई बराबर देखाउन, तिनीहरूका परिमाण र दिशा समान देखाउनुपर्छ ।

मानौं, $A(2, 2) = (x_1, y_1)$ र

$B(5, 6) = (x_2, y_2)$

अब, $\overrightarrow{AD} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$= (5 - 2, 6 - 2)$

$= (3, 4)$

$\overrightarrow{AB}$ को परिमाण $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ एकाइ

$\overrightarrow{AB}$ को दिशा $(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

फेरि,

मानौं, $C(3,0) = (x_1,y_1)$ र

$D(6,4) = (x_2,y_2)$

अब, $\overrightarrow{CD} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$= (6 - 3, 4 - 0)$

$= (3, 4)$

$\overrightarrow{CD}$ को परिमाण $= |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ एकाइ

$\overrightarrow{CD}$ को दिशा $(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

यहाँ, $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CD}$ का परिमाण र दिशा समान भएकाले $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ हुन्छ ।

उदाहरण 7

यदि विन्दुहरू A(6,1), B(a, b) र $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ भए a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, $A(6, 1) = (x_1, y_1)$ र

$B(a ,b) = (x_2, y_2)$

अब, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 6 \\ b - 1 \end{pmatrix}$

प्रश्नानुसार,

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

or, $\begin{pmatrix} a - 6 \\ b - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

त्यसैले,

$a - 6 = -1 \therefore a = 5$ $\qquad$ $b - 1 = 0 \therefore b = 1$

अत: a = 5 र b = 1

अभ्यास 4.4

1. उदाहरणसहित परिभाषा दिनुहोस् :

   (क) एकाइ भेक्टर $\qquad$ (ख) भेक्टरको परिमाण $\qquad$ (ग) भेक्टरको दिशा

2. तलका प्रत्येक भेक्टरको परिमाण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) $\vec{a} = (3, 3)$ $\qquad$ (ख) $\vec{b} = (-4, 3)$ $\qquad$ (ग) $\vec{a} = (-5, 5\sqrt{3})$

3. यदि $\overrightarrow{PQ}$ विन्दु P लाई विन्दु Q मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{PQ}$ लाई लहरमा व्यक्त गर्नुहोस् । साथै $\overrightarrow{PQ}$ को परिमाण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (क) P(2, –2), Q(7, –5) $\qquad$ (ख) P(4, –2), Q(6, 1)

4. यदि $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A लाई विन्दु B मा र $\overrightarrow{CD}$ ले विन्दु C लाई विन्दु D मा विस्थापन गर्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

   (क) A(–5, 4), B(0, 2), C(1, –1), D(6, –3)

   (ख) A(4, 5), B(7, –3), C(–1, –3), D(2, –11)

5. A(–3, 2), B(2, 4), C(x, 3) र D(2, –2) चार विन्दुहरू हुन् । यदि $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ भए x को मान निकाल्नुहोस् ।

6. दिइएका भेक्टरहरूका दिशामा एकाइ भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) $\vec{a} = (-3, 4)$ $\qquad$ (ख) $\vec{b} = (2, -5)$

7. यदि $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A लाई विन्दु B मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{AB}$ लाई $x\vec{i} + y\vec{j}$ स्वरूपमा व्यक्त गर्नुहोस् र $\overrightarrow{AB}$ को दिशाको एकाइ भेक्टर पनि पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) A(5, 6), B(–2, 0) (b) A(–2, 1), B(–1, –2)

8. (a) यदि $\vec{a} = (\frac{3}{5}, y)$ एउटा एकाइ भेक्टर भए y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $\vec{b} = (\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{y}{\sqrt{13}})$ एउटा एकाइ भेक्टर भए y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. तल दिइएका जोडी भेक्टरहरू समान वा असमान के छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{a} = (3, -6)$ र $\vec{b} = (1, -2)$

10. (a) यदि $\overrightarrow{AB}$ ले बिन्दु A(2, −1) लाई बिन्दु B(3, 3) मा र $\overrightarrow{CD}$ ले बिन्दु C(-2, -6) लाई बिन्दु D(−1, −2) मा विस्थापन गर्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(b) यदि $\overrightarrow{PQ}$ ले बिन्दु P(2, −3) लाई बिन्दु Q(4, −2) मा र $\overrightarrow{RS}$ ले बिन्दु R(1, −4) लाई बिन्दु S(−1, −5) मा विस्थापन गर्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

11. (a) मानौँ A(0, −3), B(2, 5), C(−2, −3) कुनै तिन बिन्दुहरू हुन् । यदि $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ भए D को निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) मानौँ A(−1, y), B(0, 4), C(−1, 3) र D(x, 6) कुनै चार बिन्दुहरू हुन् । यदि $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ भए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. बिन्दुहरू A(6, 9) र B(a, b) छन् । यदि $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ भए a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) $3\sqrt{2}, 45^0$ (b) $5, 143.13^0$ (c) $10, 240^0$

3.(a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \sqrt{34}, 329.03^0$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \sqrt{13}, 56.3^0$

5. $x = 0$ or 4

6.(a) $\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}}\right)$

7.(a) $-7\vec{i} - 6\vec{j}, \left(\frac{-7}{\sqrt{85}}, \frac{-6}{\sqrt{85}}\right)$ (b) $\vec{i} - 3\vec{j}, \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$

8.(a) $y = \pm\frac{4}{5}$ (b) $y = \pm 2$

9.(a) असमान (b) समान

11.(a) (0, 5) (b) $x = 0$, y = 1 12. a = 8, b = 10

पाठ 5 तथ्याङ्कशास्त्र (Statistics)

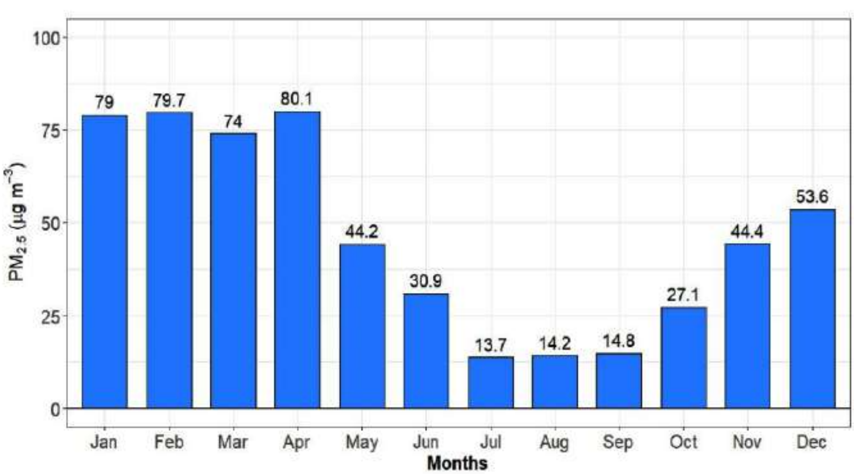
5. 0 परिचय (Introduction)

तथ्याङ्कशास्त्र गणितको त्यो शाखा हो, जसमा तथ्याङ्कको सङ्कलन, प्रदर्शन, वर्गीकरण र त्यसका गुणहरूका बारेमा अध्ययन गरिन्छ । तथ्याङ्कशास्त्रको उत्पत्ति इजिप्ट, बेबिलोनियन र रोम जस्ता पुरातन सभ्यताहरूमा भएको पाइन्छ, जहाँ मानिसहरूले सामान्य तरिकाबाट जनसङ्ख्याको आकार, व्यापार र करहरूको रेकर्ड राख्ने गरेको देखिन्छ । यद्यपि आधुनिक तथ्याङ्कको विकास हुनुमा युरोपेली पुनर्जागरणलाई श्रेय दिन सकिन्छ। जसमा वैज्ञानिक विधि, आलोचनात्मक सोच र अनुभवजन्य अवलोकनहरूबाट यसको विकास भएको मान्न सकिन्छ। 18 औँ शताब्दीका चर्चित तथ्याङ्कशास्त्रीहरू Leonhard Euler, Thomas Bayes र Pierre Simon Laplace को तथ्याङ्कशास्त्रको विकासमा ठुलो योगदान रहेको छ ।

तथ्याङ्कशास्त्र गणितीय विज्ञानको शाखा भएकाले यो प्राकृतिक विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, मानविकी र व्यापार जस्ता क्षेत्रहरूमा प्रयोग गर्ने गरिएको हुन्छ । तथ्याङ्कलाई कुनै विषयको आँकडाको वर्णन गर्नका लागि प्रयोग गर्न सकिन्छ, जसलाई वर्णनात्मक तथ्याङ्क भनिन्छ । यसका अतिरिक्त तथ्याङ्कको प्रारूपलाई विभिन्न तरिकाले प्रदर्शन गर्नका लागि यसको प्रयोग गरिन्छ ।

5.1.1 वैयक्तिक श्रेणी र खण्डित श्रेणीको चतुर्थांशीय मान र शतांशीय मान (Quartiles and Percentiles of Individual and Discrete data)

तलिकामा ललितपुरको वायुप्रदूषण अनुगमन केन्द्र खुमलटारका अनुसार सन् 2023 मा 2.5 माइक्रोग्राम प्रति घनमिटरभन्दा साना हावामा भएका हानिकारक कणहरूको मात्रा कति रहेको छ भन्ने तथ्याङ्क प्रस्तुत गरिएको छ ।



त्यस्ता सुक्ष्म कणहरूको मात्रा 20 सम्म मात्र स्वास्थ्यका लागि राम्रो रहेको र सोभन्दा बढी भएमा हानिकारक हुन्छ।

उपरोक्त चित्रको अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूको जवाफ दिनुहोस् :

(क) राम्रो र नराम्रो हावाको गुणस्तरका आधारमा महिनाहरूलाई दुई समूहमा वर्गीकरण गर्नुहोस् ।

(ख) खुमलटारको वायुप्रदूषणको अवस्थाको एक वर्षको औसत पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) बढी प्रदुषण हुने कारणहरू के हुन सक्छन् ? महिना पहिचान गरी उचित कारणहरूको बारेमा आफ्ना तर्कहरू दिनुहोस् ।

क्रियाकलाप 1

पहिलो त्रैमासिक परीक्षामा आफ्नो कक्षाका विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क सोधी लेख्नुहोस् र तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) प्राप्त तथ्याङ्क (प्राप्ताङ्क) लाई बढ्दो क्रममा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) बढ्दो क्रममा लेखिएको तथ्याङ्कमा को कोले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कले सो तथ्याङ्कलाई चार बराबर भागमा विभाजन गर्छ ? प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

माथिको क्रियाकलाप (1) गर्नका लागि सहयोगी उदाहरणः काठमाडौँमा जाडो मौसमको कुनै एक दिन प्रत्येक 2 घण्टामा रेकर्ड गरिएको तापक्रम निम्नानुसार छ ।

5°C, 7°C, 3°C, 10°C, 12°C, 15°C, 9°C, 17°C, 13°C, 19°C, 8°C

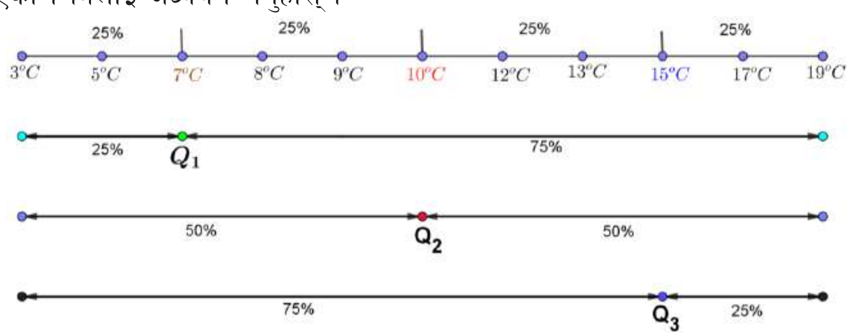
(क) दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) कति डिग्री सेल्सियसले बढ्दो क्रममा लेखिएको तथ्याङ्कलाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्छ ?

(ग) दिइएको श्रेणी (तथ्याङ्क) लाई चार बराबर भागमा विभाजन गर्न कतिओटा (सङ्ख्या/तापक्रम) लिनुपर्ला, छलफल गर्नुहोस् ।

तथ्याङ्क (श्रेणी) लाई बढ्दो क्रममा लेख्दा निम्नानुसार लेखिन्छ ।
3°C, 5°C, 7°C, 8°C, 9°C, 10°C, 12°C, 13°C, 15°C, 17°C, 19°C

दिइएको तथ्याङ्क (श्रेणी) बढ्दो क्रममा लेखेपछि 10°C बिचमा पर्छ, त्यसैले 10°C ले तथ्याङ्क (श्रेणी) लाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ । त्यसैले 10°C मध्यिका हो । तीनओटा विन्दु (सङ्ख्या/तापक्रम) श्रेणी (तथ्याङ्क) लाई चार बराबर भागमा विभाजन गर्छ । दिइएको चित्रलाई अध्ययन गर्नुहोस् ।



बायाँबाट गणना गर्दा तेस्रो पद अर्थात् 7°C, छैठौँ पद अर्थात् 10°C र नवौँ पद अर्थात् 15°C ले श्रेणीलाई चार बराबर भागमा विभाजन गर्छ । यसरी कुनै तथ्याङ्कलाई चार बराबर भागमा विभाजन गर्ने मानलाई चतुर्थांश भनिन्छ । यहाँ, 7°C लाई पहिलो चतुर्थाँश (Q_1) वा तल्लो चतुर्थाँश (lower quartile), 10°C लाई दोस्रो चतुर्थाँश (Q_2) वा मध्यिका (median) र 15°C लाई तेस्रो चतुर्थाँश (Q_3) वा माथिल्लो चतुर्थाँश (upper quartile) भनिन्छ ।

त्यस्तो मान जसले दिइएको तथ्याङ्कलाई तल 25% र माथि 75% भागमा विभाजन गर्छ भने त्यो मानलाई पहिलो चतुर्थाँश (first quartile) वा तल्लो चतुर्थाँश (lower quartile) (Q_1) भनिन्छ ।
त्यस्तो मान जसले दिइएको तथ्याङ्कलाई तल 50% र माथि 50% बराबर भागमा विभाजन गर्छ भने त्यो मानलाई दोस्रो चतुर्थाँश (second quartile) (Q_2) वा मध्यिका (median) भनिन्छ ।
त्यस्तो मान जसले दिइएको तथ्याङ्कलाई तल 75% र माथि 25% भागमा विभाजन गर्छ भने त्यो मानलाई तेस्रो चतुर्थांश (third quartile) वा माथिल्लो चतुर्थाँश (upper quartile) (Q_3) भनिन्छ ।

5.1.2 वैयक्तिक श्रेणी (Individual series) मा चतुर्थाँशीय मान

माथिको उदाहरणमा दिइएको वैयक्तिक श्रेणीमा जम्मा 11 ओटा तथ्याङ्कहरू दिएको अवस्थामा कसरी चतुर्थाँशीय मानहरू पत्ता लगायौँ ? अब कुनै वैयक्तिक श्रेणीमा N औँ पदहरू दिएको छ भने चतुर्थाँशीय मानहरू पहिलो चतुर्थांश (Q_1), दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

जहाँ, जम्मा तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या = N

पहिलो चतुर्थाँस $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद

दोस्रो चतुर्थाँस $(Q_2) = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पद

तेस्रो चतुर्थाँस $(Q_2) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद

विचारणीय प्रश्न : किन 4 ले भाग गरिएको होला ?

5.1.3 खण्डित श्रेणी (discrete series) मा चतुर्थाँशीय मान

त्यसैगरी, खण्डित श्रेणी (discrete series) मा पनि बारम्बारताको योगफल $\sum f$ दिइएको छ भने चतुर्थाँशीय मानहरू कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

जहाँ, बारम्बारताको योगफल (जम्मा बारम्बारता) $\sum f = N$

वैयक्तिक श्रेणीमा जस्तै, खण्डित श्रेणी (discrete series) मा पनि एउटै तरिकाबाट चतुर्थाँशीय मानहरू पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

पहिलो चतुर्थाँस $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद

दोस्रो चतुर्थाँस $(Q_2) = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पद

तेस्रो चतुर्थाँस $(Q_2) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद

उदाहरण 1

कक्षा 9 मा अध्ययनरत 11 जना विद्यार्थीहरूको दिइएको तौलका आधारमा तीनओटै चतुर्थांशीय मानहरू पत्ता लागाउनुहोस् ।

35 kg, 39 kg, 52 kg, 25 kg, 32 kg, 28 kg, 46 kg, 41 kg, 42 kg, 38 kg, 50 kg

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेख्दा,

25 kg, 28 kg, 32 kg, 35 kg, 38 kg, 39 kg, 41 kg, 42 kg, 46 kg, 50 kg, 52 kg

जम्मा दिइएको तथ्याङ्क सङ्ख्या (N) = 11

अब सूत्रानुसार,

पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद $= \left(\frac{11+1}{4}\right)$आँ पद $= \left(\frac{12}{4}\right)$औँ पद = 3, तेस्रो पद = 32 kg

दोस्रो चतुर्थांश $(Q_2) = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद = (2×3) औँ पद = 6 औँ पद = 39 kg $\left(\because \left(\frac{N+1}{4}\right) = 3\right)$

तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद = 3×3 औँ पद = 9 औँ पद = 46 kg

अतः पहिलो चतुर्थांश (Q_1) = 32 kg , दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) = 39 kg र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) = 46 kg

उदाहरण 2

कुनै एउटा गाउँपालिकाले अनुभवका आधारमा 8 प्रकारका कामदारहरू परिभाषित गरी प्रतिदिनको ज्याला तल दिइएअनुसारको पारिश्रमिक लिन पाउने व्यवस्था गरेको छ ।

Rs. 1100, Rs. 750 kg, Rs. 900, Rs. 1200, Rs. 950, Rs. 1000, Rs. 1150, Rs. 800

यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) पहिलो चतुर्थाँश (Q_1), दोस्रो चतुर्थाँश (Q_2) र तेस्रो चतुर्थाँश (Q_3) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दोस्रो चतुर्थाँश (Q_2) र मध्यिका (M_d) सम्बन्धलाई वर्णन गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेख्दा,

Rs. 750 kg, Rs. 800, Rs. 900, Rs. 950, Rs. 1000, Rs. 1100, Rs. 1150, Rs. 1200

जम्मा दिइएको तथ्याङ्क सङ्ख्या (N) = 8

अब सूत्रानुसार,

(क) पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{8+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{9}{4}\right)$ औँ पद = 2.25 औँ पद

= 2 औँ पद + 0.25 (3 औँ पद – 2 औँ पद)

= Rs. 800 + 0.25 (Rs. 900 – Rs. 800)

= Rs. 800 + 0.25 (Rs. 100)

= Rs. 800 + Rs. 25

= Rs. 825

त्यसैगरी, दोस्रो चतुर्थांश $(Q_2) = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद

= 2 × 2.25 औँ पद

= 4.5 औँ पद $\therefore \left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद = 2.25 औँ पद)

= 4 औँ पद + 0.5 (5 औँ पद - 4 औँ पद)

= Rs. 950 + 0.5 (Rs. 1000 – Rs. 950)

= Rs. 950 + 0.5 (Rs. 50)

= Rs. 950 + Rs. 25

= Rs. 975

तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद = 3 × 2.25 औँ पद ($\therefore$ किनकि $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद = 2.25 औँ पद)

= 6.75 औँ पद

= 6 औँ पद + 0.75 (7 औँ पद – 6 औँ पद)

= Rs. 1100 + 0.75 (Rs. 1150 – Rs. 1100)

= Rs. 1100 + 0.75 (Rs. 50)

= Rs. 1100 + Rs. 37.5

= Rs. 1137.5

अतः पहिलो चतुर्थांश (Q_1) = Rs. 825, दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) = Rs. 975 र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) = Rs. 1137.5

(ख) माथिबाट, दोस्रो चतुर्थांश $(Q_2) = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद = 4.5 औँ पद = Rs. 975 हुन्छ ।

त्यसैगरी, मध्यिका $(M_d) = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पद = 4.5 औँ पद = Rs. 975 हुन्छ ।

दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र मध्यिका (Md) को मान बराबर छ । अतः दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) = मध्यिका (M_d) हुन्छ ।

उदाहरण 3

कुनै एउटा नगरपालिकाले गरेको सर्वेक्षणमा, निम्न उमेरका शिक्षकहरूले कक्षा कोठामा अध्यापन गरिरहेको पाइयो । यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् ।

उमेर (वर्षमा)	25	30	35	45	50
शिक्षक सङ्ख्या	5	8	10	7	1

(क) पहिलो चतुर्थांश (Q_1) पत्ता लगाउनुहोस् । (ख) तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

उमेर (वर्षमा)	शिक्षक सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
25	5	5
30	8	$5 + 8 = 13$
35	10	$13 + 10 = 23$
45	7	$23 + 7 = 30$
50	1	$30 + 1 = 31$
	$\sum f = N = 31$	

दिइएको तथ्याङ्कबाट, जम्मा बारम्बारता $(\sum f) = N = 31$

अब सूत्रानुसार,

(क) पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{31+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{32}{4}\right)$ औँ पद $= 8$ औँ पद

सञ्चित बारम्बारता तालिकाबाट, 8 औँ पदको मान $= 30$

त्यसैले, पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = 30$ वर्ष

(ख) त्यसैगरी, तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद

$= 3 \times 8$ औँ पद $= 24$ औँ पद [किनकि $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= 8$ औँ पद]

सञ्चित बारम्बारता तालिकाबाट, 24 औँ पदको मान $= 45$

त्यसैले, तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 45$ वर्ष

अतः पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = 30$ वर्ष र तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 45$ वर्ष

5.1.4 शतांशक (Percentiles)

क्रियाकलाप 2

समस्या : एउटा लामो डोरीलाई 100 बराबर भाग हुनेगरी काट्न कति ठाउँमा काट्नुपर्ला ?

प्रक्रिया : हामीलाई थाहा छ दिएको डोरीलाई सिधा पारेपछि 4 बराबर भाग हुनेगरी काट्न तीन ठाउँमा काट्नुपर्छ । अब हरेक विन्दुहरू बराबर दुरीमा पर्नेगरी उक्त डोरीलाई 99 ओटा विन्दुमा चिनो लगाउनुहोस् । चिनो लगाएको ठाउँबाट काट्नुहोस् ।

निष्कर्ष : 99 बराबर भागबाट काट्दा उक्त डोरीलाई 100 बराबर भागमा विभाजन गर्न सकिन्छ । यसलाई नै शतांशक भनिन्छ ।

फेरि, शतांशकको अवधारणा अझ प्रष्ट पार्नको लागि दिइएका उदाहरणको अध्ययन गर्नुहोस् । एउटा कक्षाका 19 जना विद्यार्थीहरूको उचाइ (cm) मा निम्नानुसार छ ।

150, 140, 132, 125, 133, 126, 123, 137, 145, 122, 149, 147, 142, 148, 136, 124, 128, 141, 144.

यसलाई बढ्दो क्रममा लेख्नुहोस् । यसलाई बढ्दो क्रममा किन लेख्नुपर्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

माथिको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेख्दा, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 132, 133, 136, 137, 140, 141, 142, 144, 145, 147, 148, 149, 150. शतांशीय मानहरू जति बढ्दै जान्छ त्यति नै ठुलो हुँदै जान्छ, त्यसैले यसलाई बढ्दो क्रममा लेख्नुपर्छ ।

उक्त तथ्याङ्कलाई चार बराबर भागमा विभाजन गरे जस्तै 100 बराबर भागमा विभाजन गर्ने मानहरू के के होलान् ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् । तीमध्ये केही मानहरू, जस्तै:

पाँचौं (5 औं) शतांशक मान = $\frac{5(19+1)}{100}$ औं पद = $\frac{5\,(20)}{100}$ औं पद = 1 औं पद = 122

साठिऔं (60 औं) शतांशक मान = $\frac{60(19+1)}{100}$ औं पद = $\frac{60\,(20)}{100}$ औं पद = 12 औं पद = 141

बयासिऔं (82 औं) शतांशक मान = $\frac{82(19+1)}{100}$ औं पद = $\frac{82\,(20)}{100}$ औं पद = 16.4 औं पद

अर्थात् बयासिऔं (82 औं) शतांशक मान 16 औं पद र 17 औं पदको बिचमा पर्छ

अतः बयासिऔं (82 औं) शतांशक मान = $\frac{(147+148)}{2}$ = 147.5

पन्चान्नब्बेऔं (95 औं) शतांशक मान = $\frac{95\,(19+1)}{100}$ औं पद = $\frac{95\,(20)}{100}$ औं पद = 19 औं पद = 150

विचारणीय प्रश्न : अरू शतांशक मानहरू के के हुन सक्छन् ? ....

यसरी कुनै पनि तथ्याङ्कलाई सय बराबर भागमा विभाजन गर्ने 99 ओटा मानहरूलाई शतांशक (percentile) मान भनिन्छ । यी मानहरूलाई क्रमशः P_1, P_2, P_3 , P_4 , P_5 … P_{99} ले सङ्केत गरिन्छ ।

चतुर्थांश जस्तै शतांशक (percentile) पत्ता लगाउने सूत्र निम्नानुसार छ ।

वैयक्तिक श्रेणी (individual series) का लागि n औँ शतांशक पर्ने स्थान $(P_n) = n\left\{\frac{(N+1)}{100}\right\}$ औँ पद ।

त्यसैगरी, खण्डित श्रेणी (discrete series) का लागि n औँ शतांशक पर्ने स्थान $(P_n) = n\left\{\frac{(N+1)}{100}\right\}$ औँ पद ।

उदाहरण 1

कुनै ठाउँको विगत 10 वर्षदेखि औसत वर्षा निम्नानुसार छ ।

1500 mm, 1600 mm, 1720 mm, 1850 mm, 1980 mm, 2100 mm, 2200 mm, 2220 mm, 2250 mm.

यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् ।

(क) दसौँ (10 औँ) शतांशक (P_{10}) र पैँतिसौँ (35 औँ) शतांशक मान (P_{35}) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र पचासौँ (50 औँ) शतांशक (P_{50}) को आपसी सम्बन्ध के हुन्छ, वर्णन गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेख्दा,

1500 mm, 1600 mm, 1720 mm, 1850 mm, 1980 mm, 2100 mm, 2200 mm, 2220 mm, 2250 mm.

जम्मा दिइएको तथ्याङ्क सङ्ख्या (N) = 9

अब सूत्रानुसार,

(क) दसौँ शतांशक $(P_{10}) = 10\left(\frac{N+1}{100}\right)$ औँ पद $= 10\left(\frac{9+1}{100}\right)$ औँ पद = 1औँ पद = 1500 mm

त्यसैगरी, पैँतिसौँ शतांशक $(P_{35}) = 35\left(\frac{N+1}{100}\right)$ औँ पद $= 35\left(\frac{9+1}{100}\right)$ औँ पद = 3.5 औँ पद

अर्थात् पैँतिसौँ शतांशकको मान 3 औँ पद र 4 औँ पदको बिचमा पर्छ

अतः पैंतीसौ शतांशक $= \frac{1720 + 1850}{2} = 1785$

(ख) त्यसैगरी, दोस्रो चतुर्थांश $(Q_2) = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= 2\left(\frac{9+1}{4}\right) = 5$ औँ पद = 1980 mm

र पचासौँ (50 औँ) शतांशक $(P_{50}) = 50\left(\frac{N+1}{100}\right)$औँ पद $= 50\left(\frac{9+1}{100}\right)$औँ पद = 5 औँ पद = 1980 mm

यसरी दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र पचासौँ (50 औँ) शतांशकको मान बराबर छ । त्यसैले दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) भनेकै पचासौँ (50 औँ) शतांशक (P_{50}) हो भनिन्छ ।

उदाहरण 2

तलका तथ्याङ्कबाट दसौँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उचाइ (cm)	5	10	15	20	25	30
शिक्षक सङ्ख्या	3	7	6	2	5	7

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

उमेर (वर्षमा)	शिक्षक सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
5	3	3
10	7	$3 + 7 = 10$
15	6	$10 + 6 = 16$
20	2	$16 + 2 = 18$
25	5	$18 + 5 = 23$
30	7	$23 + 7 = 30$
	$\sum f = N = 30$	

दिइएको तथ्याङ्कबाट, बारम्बारताको योगफल $(\sum f) = N = 30$

अब सूत्रानुसार, दसौँ (10 औँ) शतांशक मान $(P_{10}) = 10\left(\frac{N+1}{100}\right)$ औँ पद $= 10\left(\frac{30+1}{100}\right)$ औँ पद $= 3.1$ औँ पद

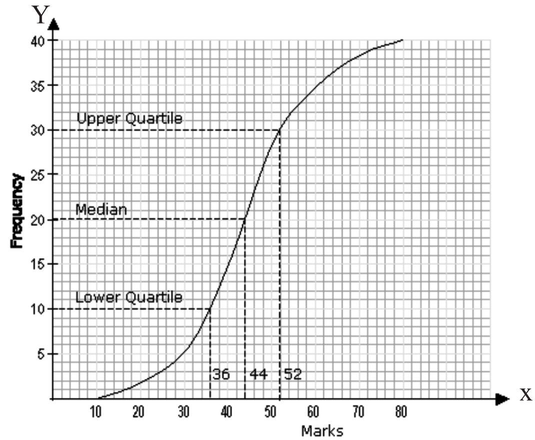
सञ्चित बारम्बारता तालिकाबाट, 10 औँ शतांशक मान $(P_{10}) = 10$

अतः दसौँ (10 औँ) शतांशक मान $= 10$

अभ्यास 5.1

1. (क) वैयक्तिक र खण्डित श्रेणी भनेको के हो ? उदाहरणसहित स्पष्ट पार्नुहोस् ।
   (ख) चतुर्थांशीय मान भन्नाले के बुझिन्छ ? उदाहरणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।
   (ग) शतांशीय मान भन्नाले के बुझिन्छ ? यिनीहरूलाई के ले जनाइन्छ, लेख्नुहोस् ।
   (घ) वैयक्तिक श्रेणीमा पहिलो चतुर्थांश (Q_1), दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउने सूत्रहरू लेख्नुहोस् ।
2. माथि दिइएको क्रियाकलाप 1 पढ्नुहोस् र त्यसबाट प्राप्त निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।
3. माथि दिइएको क्रियाकलाप 2 पढ्नुहोस् र त्यसबाट प्राप्त निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।
4. खण्डित श्रेणीमा पहिलो चतुर्थांश (Q_1), दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउने सूत्रहरू लेख्नुहोस् ।
5. वैयक्तिक र खण्डित श्रेणीका अभ्यास र उदाहरणमा भन्दा फरक तर दैनिक जीवनसँग जोडेर एक एकओटा उदाहरण बनाउनुहोस् ।

6. सँगै दिएको ग्राफ हेरी व्याख्या गर्नुहोस् ।



7. दिइएको चित्रमा तपाईंभन्दा तल 80% लेख्नाले के जनाउँछ ? व्याख्या गर्नुहोस् ।

8. सविताले तलको तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश, दोस्रो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाएर भन्नुहुन्छ दोस्रो चतुर्थांश भनेको मध्यिका हो । तपाईं पनि पहिलो चतुर्थांश, दोस्रो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् । के उनको भनाइमा सहमत हुनुहुन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(क) 25, 48, 32, 52, 21, 64, 29, 57

(ख) 19, 20, 21, 23, 23, 24, 25, 27, 31

9. 543 जनामा गरिएको एक सर्वेक्षणमा निम्न उमेर भएका सदस्यहरूले टेलिभिजन हेर्ने गरेको पाइयो, सोको आधारमा पहिलो र तेस्रो चतुर्थांशहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उमेर (वर्ष)	20	30	40	50	60	70	80
सदस्य सङ्ख्या	3	61	132	153	140	51	3

10. गत वर्ष कुनै गाउँमा, वर्षमा कति घरधुरीले कति धान बेच्छन् भनी एक सर्वेक्षण गरिएको थियो । सो सर्वेक्षणबाट प्राप्त नतिजालाई तल तालिकामा प्रस्तुत गरिएको छ ।

धान (पाथी)	5	15	25	35	45	55
घरधुरी सङ्ख्या	3	7	15	5	8	2

(क) पहिलो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) तेस्रो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दोस्रो चतुर्थांश भनेको मध्यिका हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

11. पहिलो त्रैमासिक परीक्षामा 19 जना विद्यार्थीले गणितमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कः
30, 21, 54, 30, 37, 45, 25, 47, 37, 24,
42, 45, 33, 28, 52, 50, 47, 20, 35,
(क) चालिसौँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) असिऔँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) पचासौँ शतांशकको मान दोस्रो चतुर्थांशसँग बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

12. गणित विषयको वार्षिक परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई तल तालिकामा दिइएको छ, सोका आधारमा निम्न प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50	60
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	7	15	5	8	2

(क) तिसौँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) पचासिऔँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) पचासौँ शतांशकको मान दोस्रो चतुर्थांशसँग बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

13. एउटा खण्डित श्रेणीमा आधारित भएर सन्दर्भसहितको एउटा प्रश्न निर्माण गर्नुहोस् । यसरी निर्माण भएको प्रश्नका आधारमा,
(क) पहिलो चतुर्थाँशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) तेस्रो चतुर्थाँशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) दोस्रो चतुर्थाँश भनेको मध्यिका हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

14. एउटा वैयक्तिक श्रेणीमा आधारित भएर सन्दर्भसहितको प्रश्न निर्माण गर्नुहोस् । यसरी निर्माण भएको प्रश्नका आधारमा,
(क) बिसौँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) साठिऔँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) पचासौँ शतांशकको मान दोस्रो चतुर्थांशसँग बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उत्तर

1 देखि 7 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
8. (क) 26, 40, 55.75 (ख) 20.5, 23, 26 9. 40, 60
10. (क) 25 (ख) 45
11. (क) 33 (ख) 47 12. (क) 30 (ख) 50
13 र 14 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5.2. वैयक्तिक र खण्डित श्रेणीको विचरणशीलता (Dispersion of Individual and Discrete series)

पछिल्लो 11 महिनामा नेपाली बजारमा खाने तेल प्रतिलिटर र चामल 25 kg प्रतिबोरामा भएको मूल्यदर निम्नअनुसार छ ।

खाने तेल (प्रतिलिटर रुपियाँमा):

180, 200, 230, 240, 245, 250, 260, 270, 300, 310, 315

चामल 25 kg (प्रतिबोरा रुपियाँमा): 1600, 1700, 1850, 2040, 2145, 2250, 2260, 2300, 2350, 2400, 2450

उपर्युक्त तथ्याङ्कलाई अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) खाने तेल प्रतिलिटर र चामल 25 kg प्रतिबोरामा मध्यक र मध्यिका मूल्य कति कति हुन्छ ?

(ख) दिइएको तथ्याङ्क मध्यविन्दुबाट कति परिमाणमा छरिएको, फैलिएको वा विचलित भएको छ भन्ने कुराको मापन केबाट गर्न सकिन्छ ?

(ग) विचरणशीलता मापन गर्नुको मुख्य उद्देश्य के हो, लेख्नुहोस् ।

माथिको तथ्याङ्कमा खाने तेल प्रतिलिटरको मध्यक मूल्य रु. 254.54 हुन्छ र चामल 25 kg प्रतिबोराको मध्यक मूल्य रु. 2122.27 हुन्छ ।

खाने तेलको प्रतिलिटर मध्यिका मूल्य रु. 250 र चामल 25 kg प्रतिबोरा मध्यिका मूल्य रु. 2250 हुन्छ । दिइएको तथ्याङ्कमा मध्यविन्दुबाट कति परिमाणमा छरिएको वा फैलिएको वा विचलित भएको छ भन्ने कुराको मापन गर्न विस्तार (range), चतुर्थांशीय विचलन (quartile deviation), मध्यक भिन्नता (mean deviation), स्तरीय भिन्नता (standard deviation) र यिनका गुणाङ्कहरू (coefficients) को गणना गर्न सकिन्छ । विचरणशीलता मापनको मुख्य उद्देश्य कुनै तथ्याङ्कहरूबिचको सजातीय (homogeneity) अथवा विविधता (heterogeneity) पत्ता लगाउनु हो ।

5.2.1. चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क (Quartile Deviation and its Coef fecient)

कुनै पनि देशका नागरिकको उचाइ र तौल मापन गर्‍यो भने पक्कै पनि त्यहाँ निकै ठुलो फरक पाइन्छ तर त्यही देशको फुटबल टिममा रहेका खेलाडीहरूको उचाइ र तौल मापन गर्‍यो भने त्यति ठुलो फरक पाइँदैन । हो फरक कति छ भनेर थाहा पाउन नै चतुर्थांशीय विचलनको प्रयोग गर्ने गरिन्छ । अतः चतुर्थांशीय विचलनबाट सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्क कति फैलिएको छ भन्ने विशेष जानकारी हुन्छ ।

एउटा टोलको सभामा जम्मा भएका मानिसहरूको उमेर (वर्षमा) तल दिइएको छ ।

40, 46, 35, 50, 38, 57, 44, 52, 60, 48, 55, 56, 67, 70, 62.

कुन कुन उमेरले चतुर्थांशीय मान (पहिलो चतुर्थांश, दोस्रो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश) जनाउँछन् समूहमा छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

चतुर्थांशीय मान पत्ता लगाउन दिइएको तथ्याङ्क बढ्दो वा घट्दो क्रम कुनमा लेख्नुपर्छ र किन ? छलफल गर्नुहोस् ।

> यसलाई बढ्दो क्रममा लेख्नुपर्छ किनकि पहिलो चतुर्थांश, दोस्रो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश मानहरू क्रमशः बढ्दै जान्छन् । यदि यसलाई घट्दो क्रममा राखियो भने तेस्रो चतुर्थांशको मान पहिलो र दोस्रो चतुर्थांशको मानभन्दा सानो हुन्छ । त्यसैले दिइएको तथ्याङ्कलाई सधैं बढ्दो क्रममा लेख्नुपर्छ ।

दिइएको उमेरलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

35, 38, 40, 44, 46, 48, 50, 52, 55, 56, 57, 60, 62, 67, 70

दिइएको तथ्याङ्क एउटा वैयक्तिक श्रेणी हो र यसमा जम्मा पद सङ्ख्या (N) = 15 छ ।

अब, पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$औं पद $= \left(\frac{15+1}{4}\right)$औं पद $= \left(\frac{16}{4}\right)$औं पद $= 4$ औं पद $= 44$ वर्ष

दोस्रो चतुर्थांश $(Q_2) = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औं पद $= 2 \times 4$ औं पद $= 8$ औं पद $= 52$ वर्ष

तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$औं पद $= 3 \times 4$ औं पद $= 12$ औं पद $= 60$ वर्ष

तेस्रो चतुर्थांश (माथिल्लो चतुर्थांश) र पहिलो चतुर्थांश (तल्लो चतुर्थांश) बिचको फरकलाई के भनिन्छ, होला ? तेस्रो चतुर्थांश र पहिलो चतुर्थांशमा आधारित भएर चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation) पत्ता लगाइन्छ । यसरी तेस्रो चतुर्थांश (माथिल्लो चतुर्थांश) र पहिलो चतुर्थांश (तल्लो चतुर्थांश) को फरकलाई चतुर्थांशबिचको विस्तार (Inter quartile range) भनिन्छ । त्यसैले,

> चतुर्थांशबिचको विस्तार (Inter quartile range) $= Q_3 - Q_1$
>
> तेस्रो चतुर्थांश (माथिल्लो चतुर्थांश) र पहिलो चतुर्थांश (तल्लो चतुर्थांश) फरकको आधालाई चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation) अथवा चतुर्थांशबिचको विस्तारको आधा (Semi-inter quartile range) भनिन्छ ।
>
> चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation) $= \left(\frac{Q_3 - Q_1}{2}\right)$
>
> माथिल्लो र तल्लो चतुर्थांशको सापेक्षिक फरकको मापनलाई चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (Coefficient of quartile deviation) भनिन्छ ।
>
> चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क : माथिल्लो र तल्लो चतुर्थांशको सापेक्षिक फरकको मापनलाई चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क भनिन्छ । यसलाई सूत्रमा निम्नअनुसार लेख्न सकिन्छ ।
>
> चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (Coefficient of quartile deviation) $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

माााथि प्रस्तुत गरिएको उदाहरणबाट

चतुर्थांशबिचको विस्तार (inter quartile range) $= Q_3 - Q_1 = 60 - 44 = 16$ वर्ष

चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{60 - 44}{2} = \frac{16}{2} = 8$ वर्ष

चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (Coefficient of quartile deviation)

$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{60 - 44}{60 + 44} = \frac{16}{104} = 0.154$

उदाहरण 1

दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation) र त्यसका गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।
16, 24, 26, 30, 32, 37, 41, 34, 45, 48, 7, 31, 39, 5, 8, 9, 11, 23, 33,

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,
5, 7, 8, 9, 11, 16, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 39, 41,45, 48

दिइएको तथ्याङ्क एउटा वैयक्तिक श्रेणी हो र यसमा जम्मा पद सङ्ख्या (N) = 19 छ ।

अब, पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद $= \left(\frac{19+1}{4}\right)$औँ पद $= \left(\frac{20}{4}\right)$औँ पद $= 5$ औँ पद $= 11$

तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद $= 3 \times 5$ औँ पद $= 15$ औँ पद $= 37$

चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{37-11}{2} = \frac{26}{2} = 13$

चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (Coefficient of quartile deviation)

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{37-11}{37+11} = \frac{26}{48} = 0.154$$

अत: दिइएको तथ्याङ्को चतुर्थांशीय विचलन र चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क क्रमशः 13 र 0.541 छ ।

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation) र त्यसका गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

दुरी (km): 15, 20, 25, 40, 16, 21, 42, 35, 18, 45

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्क एउटा वैयक्तिक श्रेणीमा छ, त्यसैले उक्त तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,
15, 16, 18, 20, 21, 25, 35, 40, 42, 45

जम्मा पद सङ्ख्या (N) = 10 छ ।

अब, पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद $= \left(\frac{10+1}{4}\right)$औँ पद $= \left(\frac{11}{4}\right)$औँ पद $= 2.75$ औँ पद

अत: पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = 2.75$ औँ पदको मान

= 2 औँ पदको मान + 0.75 (3 औँ पदको मान – 2 औँ पदको मान)

$= 16 + 0.75\,(18 - 16)$

$= 16 + 0.75\,(2)$

$= 16 + 1.5$

$= 17.5$

त्यसैगरी, तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद $= 3 \times 2.75$ औँ पद $= 8.25$ औँ पद

अतः तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 8.25$ औँ पदको मान

$= 8$ औँ पदको मान $+ 0.25$ (9 औँ पदको मान - 8 औँ पदको मान)

$= 40 + 0.25\,(42 - 40) = 40 + 0.25\,(2) = 40 + 0.5 = 40.5$

चतुर्थँशीय विचलन (Quartile deviation) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{40.5 - 17.5}{2} = \frac{23}{2} = 11.5$

चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (Coefficient of quartile deviation) $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{40.5 - 17.5}{40.5 + 17.5} = \frac{23}{58} = 0.396$

अतः दिइएको तथ्याङ्को चतुर्थांशीय विचलन र चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क क्रमशः 11.5 र 0.396 छ ।

उदाहरण 3

तालिकामा परिवारको सङ्ख्या र तिनीहरूको मासिक आम्दानीलाई देखाइएको छ । सो तथ्याङ्कलाई आधार मानी चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation) र त्यसका गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

आम्दानी (रु. हजारमा)	25	28	30	32	35	45
परिवारको सङ्ख्या	3	4	7	6	2	1

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा राख्दा

आम्दानी (रु. हजारमा)	परिवारको सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
25	3	3
28	4	7
30	7	14
32	6	20
35	2	22
45	1	23
	$\sum f = N = 23$	

अब, पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद $= \left(\frac{23+1}{4}\right)$औँ पद $= \left(\frac{24}{4}\right)$औँ पद $= 6$ औँ पद

सञ्चित बारम्बारता स्तम्भ (column) बाट, 6 औँ पदको मान = रु. 28,000

तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद $= 3 \times 6$ औँ पद $= 18$ औँ पद

सञ्चित बारम्बारता स्तम्भ (Column) बाट, 18 औँ पदको मान = रु. 32,000

सूत्रअनुसार, चतुर्थांशीय विचलन (Quartile deviation)

$= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{32,000 - 28,000}{2} = \frac{4,000}{2} = 2,000$

चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (Coefficient of quartile deviation) =

$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{32,000 - 28,000}{32,000 + 28,000} = \frac{4,000}{50,000} = 0.08$

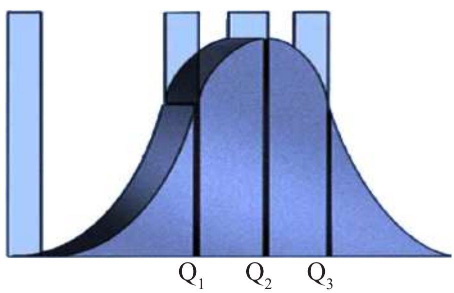
अभ्यास 5.2

1. विचरणशीलता भनेको के हो, उदाहरणसहित प्रस्ट पार्नुहोस् ।

2. चतुर्थांशीय विचलन भन्नाले के बुझिन्छ ? चतुर्थांशीय विचलन पत्ता लगाउन कुन कुन चतुर्थांशको प्रयोग गरिन्छ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

3. चतुर्थांशबिचको विस्तार (Inter quartile range) भन्नाले के बुझिन्छ, लेख्नुहोस् ।

4. दिइएको ग्राफमा पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = 24$ र तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = 38$ भए चतुर्थांशीय भिन्नता र विचलनको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।



5. वैयक्तिक श्रेणीको तल्लो र माथिल्लो चतुर्थांशीय मानहरू क्रमशः 30 र 40 छन् ।

   (क) उक्त श्रेणीको चतुर्थांशीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. कुनै खण्डित श्रेणीको पहिलो चतुर्थांश (Q_1) 35 र चतुर्थांशीय विचलन 20 छन् ।

   (क) उक्त श्रेणीको तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (क) कुनै खण्डित श्रेणीको चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क क्रमशः 14 र $\frac{7}{20}$ भए, यसको पहिलो चतुर्थांश (Q_1) को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) कुनै वैयक्तिक श्रेणीको चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क $\frac{1}{4}$ र यसको तेस्रो चतुर्थाँशीय मान 15 भए त्यसको पहिलो चतुर्थाँशको मान र चतुर्थाँशीय विचलन पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) वैयक्तिक श्रेणीको पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = 12$ र चतुर्थाँशीय विचलन $(Q.D) = 2$ भए त्यसको तेस्रो चतुर्थाँशीय मान तथा चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. विभिन्न समयमा सङ्कलन गरिएका तथ्याङ्कहरू तल दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कहरूको आधारमा चतुर्थाँशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) मूल्य (रु): 150, 200, 250, 400, 160, 210, 420

(ख) तापक्रम (°c): 13, 40, 27, 30, 25, 22, 21, 18, 12, 13, 10.

(ग) शरीरको तौल (kg): 20, 18, 25, 12, 9, 6, 21, 42, 35, 28.

(घ) विद्यार्थीको खाजा खर्च (रु): 50, 80, 85, 75, 70, 90, 100, 105, 120, 110, 130.

9. एउटा विद्यालयको कक्षा 9 मा अध्ययनरत 28 जना विद्यार्थीको पुस महिनाको पहिलो हप्तामा लिइएको तौल तल तालिकामा दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कका आधारमा चतुर्थांशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

तौल (kg)	45	47	49	51	53	55
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	8	5	3	3	5

10. फरक फरक भौगोलिक ठाउँमा रहेका तर एउटै समयमा मापन गरिएका सहरहरूको तापक्रम निम्नानुसार पाइयो । उक्त तथ्याङ्कका आधारमा चतुर्थाँशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

तापक्रम (°c)	10	15	20	25	30
सहर सङ्ख्या	3	7	10	8	2

11. एउटा सामुदायिक विद्यालयको कक्षा 9 को दोस्रो त्रैमासिक परीक्षामा 39 जना विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तल तालिकामा देखाइएको छ । उक्त तथ्याङ्कका आधारमा चतुर्थाँशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	40	45	50	55	60	64	68
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	7	8	6	4	6	3

12. एउटा विद्यालयको हरेक त्रैमासिक परीक्षामा विद्यार्थीहरूको उचाइ मापन गर्ने गरिन्छ । सो मापन गरेको उचाइ तल तालिकामा देखाइएको छ । उक्त तथ्याङ्कका आधारमा चतुर्थाँशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

विद्यार्थीको उचाइ (cm)	153	155	157	159	161	163	165	167	169
विद्यार्थी सङ्ख्या	8	2	4	6	3	4	7	1	4

13. नेपाली चलचित्र हेर्न मन पराउने विभिन्न उमेर समूहका मानिसहरूमा गरिएको एक सर्वेक्षणको तथ्याङ्क तल तालिकामा दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कका आधारमा चतुर्थांशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

उमेर (वर्षमा)	20	30	40	50	60	70	80
मानिसहरूको सङ्ख्या	3	61	132	153	140	51	3

14. एउटा वैयक्तिक श्रेणीमा आधारित भएर सन्दर्भसहितका प्रश्न निर्माण गर्नुहोस् । यसरी निर्माण भएका प्रश्नका आधारमा,

(क) पहिलो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) तेस्रो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त तथ्याङ्कका आधारमा चतुर्थांशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. एउटा खण्डित श्रेणीमा आधारित भएर सन्दर्भसहितका एउटा प्रश्न निर्माण गर्नुहोस् । यसरी निर्माण भएका प्रश्नका आधारमा,

(क) पहिलो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) तेस्रो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) चतुर्थांशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) चतुर्थांशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउँदा दोस्रो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउँदैनौँ किन ? कारण दिनुहोस् ।

उत्तर

1 देखि 3 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) 7, (ख) 0.22 5. (क) 5, (ख) 0.14 6. (क) 75 (ख) 0.36

7. (क) 26 (ख) 9, 3 (ग) 16, 0.14 8. क) 120, 0.42 (ख) 7, 0.35 (ग) 9.25, 0.45

(घ) 17.5, 0.189 9. 3, 0.06 10. 5, 0.25 11. 7.5, 0.14 12. 5, 0.031

13. 10, 0.2 14 र 15 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5.3 मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क (Mean Deivation and Its Coefficient)

मध्यक भिन्नता नै किन निकाल्नु पर्‍यो ? चतुर्थांशीय विचलन (भिन्नता) ले काम गर्दैन र ? हो पक्कै पनि गर्दैन, किनकि चतुर्थांशीय विचलनबाट सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्क कति फैलिएको छ भन्ने मात्र जानकारी हुन्छ । तर मध्यक भिन्नताबाट केन्द्रीय प्रवृत्तिका मापन (मध्यक, मध्यिका र रीत) का मानहरूबाट कति तल वा माथि गयौँ भन्ने जानकारी लिन सकिन्छ । जस्तैः सामान्यतः एउटा निरोगी मानिसको शरीरको र Strfk 120/80mmHg हुनुपर्छ । यदि छैन भने हुनुपर्नेभन्दा कति तल वा माथि भयो भनेर स्वास्थ्यकर्मीहरूले जानकारी लिने गर्छन् । बिरामीको उपचार गर्दै जाँदा अहिले कस्तो भइरहेको छ, त्यसैगरी उपचारमा पहिलाभन्दा सुधार भइरहेको छ वा छैन मध्यक मानको कति नजिक वा कति टाढा छ भन्ने जानकारी लिन र दिनका लागि स्वास्थ्यकर्मीहरूले मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क प्रयोग गरेको पाइन्छ ।

क्रियाकलापमा आधारित उदाहरण

दुई जना साथीहरू पेम्बा र टासीको एक वर्षको समयमा प्रत्येकको 10 पटक लिइएको गणित विषयको 25 पूर्णाङ्कको परीक्षामा उनीहरूले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कको अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको छलफल गर्नुहोस् ।

पेम्बा : 17, 19, 20, 16, 22, 23, 21, 20.5, 18, 15

टासी : 9, 10, 3, 15, 20, 16, 5, 25, 21, 23

(क) दुबै जनाको औसत प्राप्ताङ्क कति कति छ ?

(ख) यी दुबै तथ्याङ्कको तुलना गर्ने आधारहरू के के छन् ?

(ग) दुई जनाको प्राप्ताङ्क तुलना गर्दा कसको तौल औसत प्राप्ताङ्कबाट बढी टाढा र नजिक छन् ?

पेम्बाले प्राप्त गरेको औसत प्राप्ताङ्क $= \frac{17 + 19 + 20 + 16 + 22 + 23 + 21 + 20.5 + 18 + 15}{10} = \frac{191.5}{10} = 19.15$

त्यसैगरी, टासीले प्राप्त गरेको औसत प्राप्ताङ्क $= \frac{9 + 10 + 3 + 15 + 20 + 16 + 5 + 25 + 21 + 23}{10} = 14.7$

यसरी, टासीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क औसत प्राप्ताङ्कभन्दा धेरै नै तलमाथि भएको देखिन्छ भने पेम्बाले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तुलनात्मक रूपमा बढी स्थिर भएको देखिन्छ । यसरी मध्यक वा मध्यिकाको आधारमा तथ्याङ्कबिच तुलना गर्न मध्यक वा औसत भिन्नता/विचलन प्रयोग गरिन्छ ।

मध्यक र मध्यिका जस्ता केन्द्रीय प्रवृत्तिका नापहरूबाट प्रत्येक पदको अन्तरको निरपेक्ष मानको औसतलाई मध्यक वा औसत विचलन भनिन्छ । मध्यक भिन्नता अङ्क गणितीय मध्यक, मध्यिका र रितका आधारमा पत्ता लगाइन्छ । हामीले यहाँ वैयक्तिक श्रेणी र खण्डित श्रेणीबाट, मध्यक र मध्यिकाको प्रयोग गरी मध्यक भिन्नता गणना गर्छौं ।

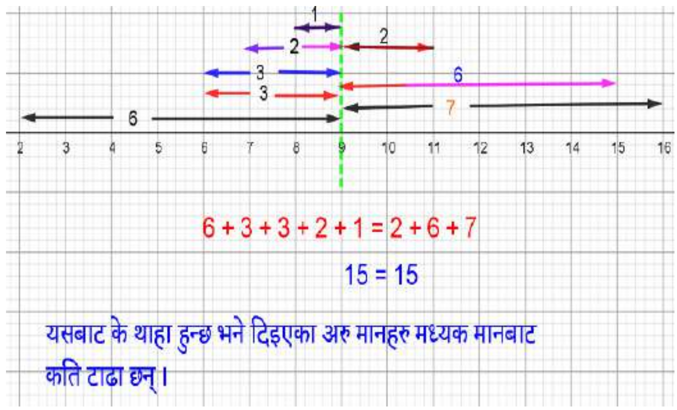
5.3.1 वैयक्तिक श्रेणी (Individual series) मा मध्यक भिन्नता

एउटा वैयक्तिक श्रेणी लिउँ, 3, 6, 6, 7, 8, 11, 16, 15

पहिलो चरणमा, वैयक्तिक श्रेणीमा मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउनका लागि सबैभन्दा पहिले मध्यक पत्ता लगाउनुपर्छ । मध्यक $(\overline{X}) = \frac{3+6+6+7+8+11+16+15}{8} = \frac{72}{8} = 9$

दोस्रो चरणमा, मध्यक मानबाट दिइएको प्रत्येक मानसम्मको दुरी पत्ता लगाउनुपर्छ ।

मान (X)	मध्यक मान (9) देखिको दुरी
3	6
6	3
6	3
7	2
8	1
11	2
15	6
16	7



तेस्रो चरणमा, मध्यक मान (9) देखि प्रत्येक मानसम्मको दुरीको मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउनुपर्छ ।

मध्यक भिन्नता $(M.D) = \frac{6+3+3+2+1+2+6+7}{8} = \frac{30}{8} = 3.75$

अतः दिइएको तथ्याङ्कको मध्यक $(\overline{X}) = 9$ र मध्यक भिन्नता $(M.D) = 3.75$ हुन्छ ।

वैयक्तिक श्रेणीको तथ्याङ्कलाई के सूत्र प्रयोग गरेर पनि मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउन सकिन्छ त ? हो पक्कै पनि सूत्र प्रयोग गरेर मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउन सकिन्छ, जुन सूत्रहरू यसप्रकार छन् ।

यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ एउटा वैयक्तिक श्रेणी हो ।

(क) मध्यक भिन्नता (मध्यकबाट)

(i) मध्यक $(\overline{X}) = \frac{\sum X}{N}$

(ii) मध्यक भिन्नता $(M.D) = \frac{\sum|X-\overline{X}|}{N} = \frac{\sum D}{N}$ जहाँ, $D = |X-\overline{X}|$

$N =$ जम्मा पद सङ्ख्या, $D = |X-\overline{X}|$ भएकाले D को मान सधैं धनात्मक हुन्छ ।

(ख) मध्यक भिन्नता (मध्यिकाबाट)

(i) मध्यिका $(M_d) = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औं मान

(ii) मध्यक भिन्नता $(M.D) = \frac{\sum|X-\overline{X}|}{N} = \frac{\sum D}{N}$ जहाँ, $D = |X - Md|$ र $N =$ जम्मा पद सङ्ख्या

मध्यक भिन्नता विचरणशीलता मापनको निरपेक्ष मान हो । फरक एकाइ तथ्याङ्कका दुई वा दुईभन्दा बढी श्रेणीहरूको तुलना गर्न मध्यक भिन्नताको गुणाङ्कको प्रयोग गरिन्छ । मध्यक भिन्नतामा आधारित विचरणशीलताको तुलनात्मक मापन नै मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क हो । यसको गणना गर्न निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (मध्यकबाट) $= \dfrac{\text{मध्यकबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यक}} = \dfrac{M.D}{\overline{X}}$

मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (मध्यिकाबाट) $= \dfrac{\text{मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यिका}} = \dfrac{M.D}{Md}$

मध्यक भिन्नता पत्ता लगाएर मात्र किन पुग्दैन ? भिन्नताको गुणाङ्क नै किन पत्ता लगाउने गरिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

मध्यक भिन्नताले निरपेक्ष मानलाई जनाउँछ । सापेक्ष मान जनाउनका लागि मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउने गरिन्छ ।

5.3.2 खण्डित श्रेणी (Discrete series) मा मध्यक भिन्नता

खण्डित श्रेणीमा (Discrete Series) मा मध्यक भिन्नता कसरी पत्ता लगाउने होला ? के वैयक्तिक श्रेणीमा जसरी मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउन सकिन्छ त ? अवश्य पनि सकिँदैन किनकि यसमा बारम्बारता हुने हुनाले, फरक सूत्रको प्रयोग गर्नुपर्छ ।

त्यो थाहा पाउन एउटा खण्डित श्रेणी $x_1, x_2, x_3,\ldots x_n$ लिउँ । जसमा सम्बन्धित पदहरूको बारम्बारता क्रमशः $f_1, f_2, f_3,\ldots f_n$ छन् । मध्यक भिन्नता मध्यक र मध्यिकाबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

(क) मध्यक भिन्नता (मध्यकबाट)

(i) मध्यक $(\overline{X}) = \dfrac{\sum fX}{N}$ जहाँ, $\sum fX$ = प्रत्येक पद र सम्बन्धित बारम्बारताको गुणनफलको योगफल

$\sum f = N$ = बारम्बारताको योगफल अथवा जम्मा पदको सङ्ख्या

(ii) मध्यक भिन्नता $(M.D) = \dfrac{\sum f|X-\overline{X}|}{N} = \dfrac{\sum fD}{N}$ जहाँ, $D = |X - \overline{X}|$

$\overline{X}$ = खण्डित श्रेणीको मध्यक र $\sum f = N$ = बारम्बारताको योगफल अथवा जम्मा पदको सङ्ख्या

(ख) मध्यक भिन्नता (मध्यिकाबाट)

(i) मध्यिका $(M_d) = \left(\dfrac{N+1}{2}\right)$ औँ मान

(ii) मध्यक भिन्नता $(M.D) = \dfrac{\sum f|X-Md|}{N} = \dfrac{\sum fD}{N}$

जहाँ, $D = |X - Md|$, M_d = खण्डित श्रेणीको मध्यिका र $N = \sum f$ = बारम्बारताको योगफल अथवा जम्मा पदको सङ्ख्या

माथि दिइएको क्रियाकलापमा आधारित उदाहरण अध्ययन गरी मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्कको अवधारणा प्रस्ट हुने गरी एउटा क्रियाकलाप बनाउनुहोस् ।

क्रियाकलाप 1

उद्देश्य : मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्कको अवधारणा विकास गर्नु
समस्या : ....
आवश्यक सामग्री : ....
प्रक्रिया : ....
निष्कर्ष : ....

उदाहरण 1

एउटा किताबमा 7 ओटा पेजहरू गन्दा, प्रत्येक पेजहरू जस्तै (1, 2, 3, ...) मा तल उल्लेख गरिएअनुसारका शब्दहरू अटाएका छन् ।

271, 296, 301, 285, 298, 327, 287 प्रत्येक पृष्ठमा शब्द सङ्ख्याको

(क) मध्यकको प्रयोग गरी मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) मध्यिकाको प्रयोग गरी मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कः X = 271, 296, 301, 285, 298, 327, 287 जम्मा पदको सङ्ख्या (N) = 7

(क) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता :

सूत्रअनुसार, मध्यक $(\overline{X}) = \frac{\sum X}{N} = \frac{271 + 296 + 301 + 285 + 298 + 327 + 287}{7} = 295$

मध्यकाबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउन दिइएको तथ्याङ्कलाई निम्नअनुसारको तालिका प्रयोग गरिन्छ ।

शब्दहरू (X)	$D = \lvert X - \overline{X} \rvert$
271	24
285	10
287	8
296	1
298	3
301	6
327	32
	$\sum D = 84$

फेरि, सूत्रअनुसार, मध्यक भिन्नता $(MD) = \frac{\sum D}{N} = \frac{84}{7} = 12$

मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{\text{मध्यकबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यक}} = \frac{12}{295} = 0.0406$

(ख) अब, दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेख्दा, 271, 285, 287, 296, 298, 301, 327

अब, सूत्रअनुसार, मध्यिका (M_d) पर्ने स्थान $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ मान

$= \left(\frac{7+1}{2}\right)$ औँ मान $= \left(\frac{8}{2}\right)$ औँ मान $= (4)$ औँ मान $= 296$

अतः (4) औँ मान = 296 त्यसैले, मध्यिका $(M_d) = 296$

मध्यकबाट मध्यक भिन्नता: मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउन दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेखी निम्नअनुसारको तालिका प्रयोग गरिन्छ ।

शब्दहरू (X)	$D = \lvert X - M_d \rvert$
271	25
285	11
287	9
296	0
298	2
301	5
327	31
	$\sum D = 83$

फेरी, सूत्रअनुसार, मध्यक भिन्नता (M.D) $= \frac{\sum D}{N} = \frac{83}{7} = 11.85$

मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{\text{मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यिका}} = \frac{11.85}{296} = 0.04$

उदाहरण 2

एउटा विद्यालयमा 75 पूर्णाङ्कको गणित विषयको प्रथम त्रैमासिक परीक्षामा विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तल दिइएको छ ।

प्राप्ताङ्क	10	15	20	25	30	35	40
विद्यार्थी सङ्ख्या	8	10	5	3	5	2	7

(क) मध्यकको प्रयोग गरी मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) मध्यिकाको प्रयोग गरी मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

(क) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउन तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राखी निम्नअनुसारको तालिका प्रयोग गरिन्छ ।

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	fx	$D = \lvert X - \overline{X} \rvert$	fD
10	8	80	12.625	101
15	10	150	7.625	76.25
20	5	100	2.625	13.125
25	3	75	2.375	7.125
30	5	150	7.375	36.875
35	2	70	12.375	24.75
40	7	280	17.375	121.625
	$\sum f = N = 40$	$\sum fx = 905$		$\sum fD = 380.75$

अब, सूत्रअनुसार, मध्यक $(\bar{X}) = \frac{\sum fX}{N} = \frac{905}{40} = 22.625$

फेरी, सूत्रअनुसार, मध्यक भिन्नता (M.D) $= \frac{\sum D}{N} = \frac{380.75}{40} = 9.52$

मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{\text{मध्यकबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यक}} = \frac{9.52}{22.625} = 0.4207$

(ख) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउन तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेखी निम्नअनुसारको तालिका प्रयोग गरिन्छ ।

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	cf	D = |X–Md|	fD
10	8	8	10	80
15	10	18	5	50
20	5	23	0	0
25	3	26	5	15
30	5	31	10	50
35	2	33	15	30
40	7	40	20	140
	$\sum f = N = 40$			$\sum f D = 365$

अब, सूत्रअनुसार, मध्यिका (M_d) पर्ने स्थान $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ मान

$= \left(\frac{40+1}{2}\right)$ औँ मान $= \left(\frac{41}{2}\right)$ औँ मान $= (20.5)$ औँ मान

दिइएको cf को पङ्क्तिबाट, मध्यिका (Md) = 20

फेरी, सूत्रअनुसार, मध्यक भिन्नता (M.D) $= \frac{\sum fD}{N} = \frac{365}{40} = 9.125$

मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{\text{मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यिका}} = \frac{9.125}{20} = 0.456$

अभ्यास 5.3

1. मध्यक भिन्नता भन्नाले के बुझिन्छ, लेख्नुहोस् ।
2. मध्यक भिन्नता के केबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ, लेख्नुहोस् ।
3. हाम्रो दैनिक जीवनमा मध्यक भिन्नताको उपयोग कहाँ गरिन्छ, खोजी गरी लेख्नुहोस् ।
4. चतुर्थांशीय भिन्नताभन्दा मध्यक भिन्नता बढी विश्वसनीय मानिन्छ किन, कारणसहित लेख्नुहोस् ।
5. मध्यक भिन्नता पत्ता लगाएर मात्र किन पुग्दैन, भिन्नताको गुणाङ्क नै किन पत्ता लगाउने गरिन्छ ?
6. मध्यक भिन्नता मध्यकबाट कसरी पत्ता लगाइन्छ, स्पष्ट पार्नुहोस् ।

7. मध्यक भिन्नता मध्यिकबाट कसरी पत्ता लगाइन्छ, स्पष्ट पार्नुहोस् ।

8. विभिन्न समयमा सङ्कलन गरिएका विभिन्न तथ्याङ्कहरू तल दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कका आधारमा मध्यकबाट मध्यक वा औसत भिन्नता (विचलन) र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) मूल्य (रु): 150, 200, 250, 400, 160, 210, 422

(ख) तापक्रम (°C): 20, 18, 25, 12, 9, 6, 22, 45, 35, 28.

(ग) शरीरको तौल (kg): 13, 40, 27, 30, 25, 22, 21, 18, 12, 13, 10.

(घ) विद्यार्थीको खाजा खर्च (रु): 50, 80, 85, 75, 70, 90, 100, 105, 120, 110, 127.

(ङ) वर्षा (mm) : 14, 10, 8, 12, 22, 28, 16, 24, 26.

(च) प्राप्ताङ्क: 17, 10, 15, 7, 13, 9, 6, 18, 11, 14.

9. दिइएका तथ्याङ्कका आधारमा मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) मूल्य (रु): 150, 200, 250, 400, 160, 210, 422

(ख) तापक्रम (°c): 20, 18, 25, 12, 9, 6, 22, 45, 35, 28.

(ग) शरीरको तौल (kg): 13, 40, 27, 30, 25, 22, 21, 18, 12, 13, 10.

(घ) विद्यार्थीको खाजा खर्च (रु): 50, 80, 85, 75, 70, 90, 100, 105, 120, 110, 127.

(ङ) वर्षा (mm): 14, 10, 8, 12, 22, 28, 16, 24, 26.

(च) प्राप्ताङ्क: 17, 10, 15, 7, 13, 9, 6, 18, 11, 14.

10 पहिलो 10 ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरू दिइएको 5 . 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

(क) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) मध्यकबाट र मध्यिकाबाट प्राप्त मध्यक भिन्नताको मानमा फरक पर्छ कि पर्दैन ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

11. एउटा विद्यालयको कक्षा 9 को दोस्रो त्रैमासिक परीक्षामा विद्यार्थीहरूले विज्ञान तथा प्रविधि विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तल तालिकामा देखाइएको छ ।

प्राप्ताङ्क	40	45	50	55	60	64	68
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	7	8	6	4	6	3

(क) दिइएको तथ्याङ्कलाई कुन श्रेणीमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

(ख) तालिकामा जम्मा कति विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क दिइएको छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त तथ्याङ्कको मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) उक्त तथ्याङ्कको मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. कुनै ठाउँको एक दिनमा रेकर्ड गरिएको तापक्रम तल तालिकामा देखाइएको छ ।

तापक्रम (°C)	20	25	28	29	33	38	42	43
बारम्बारता	6	20	24	28	15	4	2	1

(क) दिइएको तथ्याङ्कलाई कुन श्रेणीमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

(ख) जम्मा बारम्बारता ($\sum f$) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त तथ्याङ्कको मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) उक्त तथ्याङ्कको मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. कुनै ठाउँको पाँच महिना (जेष्ठ, आषाढ, श्रावण, भाद्र, असोज) मा रेकर्ड गरिएको वर्षा mm मा तल तालिकामा देखाइएको छ ।

वर्षा (mm)	20	25	30	35	40
दिन	5	8	12	10	5

(क) खण्डित श्रेणीको मध्यक पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) दिइएको तथ्याङ्बाट मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दिइएको तथ्याङ्बाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) उक्त तथ्याङ्कको मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) उक्त तथ्याङ्कको मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1 देखि 7 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 8. (क) 88.57, 0.34 (ख) 9, 0.44 (ग) 7.09, 0.337 (घ) 18.54, 0.20 (ङ) 6.42, 0.36 (च) 3.4, 0.28 9. क) 80.28, 0.38 (ख) 9, 0.42 (ग) 7.09, 0.337 (घ) 18.36, 0.204 (ङ) 6.22, 0.34 (च) 4, 0.33 10. (क) 2.5, 0.45 (ख) 2.5, 0.45 (ग) पर्दैन । 11. (क) खण्डित श्रेणी (ख) 39 (ग) 7.59, 0.14 (घ) 7.51, 0.15 12. (क) खण्डित श्रेणी (ख) 100 (ग) 2.94, 0.102 (घ) 2.94, 0.101 13. (क) $\overline{X} = \frac{\sum fX}{N}$ (ख) 30.25 (ग) 30 (घ) 4.81, 0.159 (ङ) 4.75, 0.158

5.4 स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क (Standard Deviation and Its Coefficient)

स्तरीय भिन्नताको अवधारणा Karl Pearson ले 1893 मा पत्ता लगाएका हुन् । यो अरू भिन्नताभन्दा किन बढी प्रयोगमा ल्याइन्छ ? के यो अरू विचलनभन्दा भरपर्दो र बढी विश्वसनीय छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

कुनै श्रेणी वा तथ्याङ्कहरूको वितरणमा त्यसका प्रत्येक पद र मध्यमान विचलनको वर्गको औसतको वर्गमूललाई स्तरीय भिन्नता भनिन्छ । अर्को शब्दमा कुनै पनि तथ्याङ्कहरूको प्रत्येक पदको विचलनलाई वर्ग गरी तिनीहरूको योगफललाई जम्मा पद सङ्ख्याले भाग गरी वर्गमूल निकालेर

स्तरीय भिन्नता गणना गरिन्छ । त्यसैले यसलाई मध्यक भिन्नताको वर्गको औसतको वर्गमूल (root mean square deviation) पनि भन्ने गरिन्छ । यसलाई ग्रिक अक्षर σ (सिग्मा) ले जनाइन्छ । स्तरीय भिन्नताले कुनै पनि तथ्याङ्कको निरपेक्ष विस्तार अथवा विचरणशीलतको मापन गर्छ। यसले तथ्याङ्कको वितरणको एकरूपताको मात्र निर्धारण गर्छ। स्तरीय भिन्नताको मान जति सानो भयो त्यति नै तथ्याङ्कहरूमा एकरूपताको मात्रा बढी हुन्छ। त्यसैले यसको गणनाबाट तथ्याङ्कको वितरण मध्यकले कसरी सो तथ्याङ्कको प्रतिनिधित्व गरेको छ भन्ने जानकारी दिन्छ।

5.4.1 वैयक्तिक श्रेणी (Individual Series) को स्तरीय भिन्नता

यदि $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ एउटा वैयक्तिक श्रेणी भए यसको प्रमाणिक विचलन वा स्तरीय भिन्नताको गणना विभिन्न तरिकाबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ। अब विभिन्न तरिका बारेमा छलफल गरौँ।

(क) वास्तविक मध्यक विधि (Actual Mean Method): यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन वास्तविक मध्यक $(\overline{X})$ पत्ता लगाउनुपर्छ। यदि मध्यकको मान दशमलवमा आएको अवस्थामा हिसाब गर्न केही कठिन पनि हुने गर्छ। यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ।

$$(S.D) = \sqrt{\frac{\sum(X-\overline{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

जहाँ, $d = X - \overline{X}$ श्रेणीको प्रत्येक पद र मध्यक वा औसतबिचको फरक

N = जम्मा पद सङ्ख्या, X = कुनै पदको मान

वास्तविक मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्दा अपनाउने प्रक्रियाका चरणहरु

सुरुमा मध्यक

1. $(\overline{X}) = \frac{\sum X}{N}$ सूत्रको प्रयोग गरी पत्ता लगाउने
2. दिइएको मान X र मध्यक $(\overline{X})$ बिचको अन्तर $d = X - \overline{X}$ पत्ता लगाउने
3. मान d को वर्ग d^2 पत्ता लगाउने र $\sum d^2$ निकाल्ने
4. स्तरीय भिन्नता $(S.D) = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$ सूत्रको प्रयोग गर्ने

(ख) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) : यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन वास्तविक मध्यक निकाल्नु पर्दैन र अनुमानित मध्यक पनि चाहिँदैन। दिइएका X का मानहरूको योगफल निकाल्ने र प्रत्येक X का मानहरूलाई वर्ग गरी X^2 को जम्मा योगफल पत्ता लगाई निम्न सूत्रको प्रयोग गरी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुपर्छ ।

स्तरीय भिन्नता $(S.D.) = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2}$ जहाँ, X = कुनै पदको मान र N = जम्मा पद सङ्ख्या हुन्।

(ग) अनुमानित मध्यक विधि (Assumed Mean Method): वास्तविक मध्यकबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्न कठिन र बढी समय लाग्ने हुन्छ। यस्तो अवस्थामा कुनै एउटा सङ्ख्यालाई मध्यक मानी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाइन्छ। यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेख्ने र तथ्याङ्कको मध्यतिर पर्ने मानलाई काल्पनिक मध्यक लिइन्छ। काल्पनिक

अनुमानित मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्दा अपनाउने प्रक्रियाका चरणहरू

1. सुरुमा दिइएका X का मानहरूबाट बिचतिर पर्ने मानलाई अनुमानित मध्यक A लिने
2. दिइएको मान X र अनुमानित मध्यक A बिचको अन्तर $d = X - A$ पत्ता लगाउने
3. d को जम्मा $\sum d$ निकाल्ने
4. d को वर्ग d^2 पत्ता लगाउने र $\sum d^2$ निकाल्ने
5. स्तरीय भिन्नता $(S.D) = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d^2}{N}\right)}$ सूत्र प्रयोग गर्ने

मध्यकलाई A ले जनाइन्छ । यसमा निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

स्तरीय भिन्नता (S.D.) = $\sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$

जहाँ, d = X – A श्रेणीको प्रत्येक पद र मध्यक वा औसतबिचको फरक A = काल्पनिक मध्यक, N = जम्मा पद सङ्ख्या, X = कुनै पदको मान

5.4.2 खण्डित श्रेणीमा (Discrete Series) मा स्तरीय भिन्नता

खण्डित श्रेणीमा (Discrete Series) मा स्तरीय भिन्नता कसरी पत्ता लगाउने होला ? के वैयक्तिक श्रेणीमा जसरी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन सकिन्छ त ? अवश्य पनि सकिँदैन किनकि यसमा बारम्बारता दोहोरिएका कारणले, फरक सूत्रको प्रयोग गर्नुपर्छ ।

ल अब त्यो थाहा पाउन एउटा खण्डित श्रेणी $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ लिउँ । जसमा सम्बन्धित पदहरूको बारम्बारता क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ छन् । स्तरीय भिन्नता विभिन्न तरिकाबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

(क) वास्तविक मध्यक विधि (Actual Mean Method) : यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

$$(\text{S.D. वा } \sigma) = \sqrt{\frac{\sum f(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

जहाँ, d = X – $\overline{X}$ श्रेणीको प्रत्येक पद र मध्यक वा औसतबिचको फरक, N = जम्मा पद सङ्ख्या र X = कुनै पदको मान

नोट : यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउँदा मध्यकको मान दशमलवमा आएको अवस्थामा हिसाव गर्न केही झन्झटिलो हुने गर्छ । त्यसैले प्रत्यक्ष विधि बढी उपयुक्त हुन्छ ।

(ख) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) : यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

स्तरीय भिन्नता (S.D. वा σ) = $\sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2}$ जहाँ, X = कुनै पदको मान र N = ∑f = जम्मा पद सङ्ख्या

(ग) अनुमानित मध्यक विधि (Assume Mean Method): यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन वास्तविक मध्यक पत्ता नलगाइ दिएको पदको मध्यतिर पर्ने मानलाई अनुमानित मध्यक लिइन्छ । यसमा निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

स्तरीय भिन्नता

$$(\text{S.D. वा } \sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

वा जहाँ, d = X – A श्रेणीको प्रत्येक पद र मध्यक वा औसतबिचको फरक

A = काल्पनिक मध्यक, N = ∑f = जम्मा पद सङ्ख्या र X = कुनै पदको मान

अनुमानित मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्दा अपनाउने प्रक्रियाका चरणहरू

1. सुरुमा दिइएका X का मानहरूबाट विचतिर पर्ने मानलाई अनुमानित मध्यक A लिने
2. दिइएको मान X र अनुमानित मध्यक A बिचको अन्तर d = X – A पत्ता लगाउने
3. बारम्बारता (f) र d को गुणनफल fd निकाल्ने
4. fd र d को गुणनफल fd^2 पत्ता लगाउने
5. स्तरीय भिन्नता (S.D) = $\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd^2}{N}\right)}$ सूत्र प्रयोग गर्ने

5.4.3 स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (Coefficient of Standard Deviation)

स्तरीय भिन्नता भनेको के हो थाहा पाइसक्नुभएको छ । अब स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क भन्नाले के बुभिन्छ ? यो कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? स्तरीय भिन्नता र स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्कमा के फरक छ ? छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्षमा पुग्नुहोस् ।

यिनीहरूको बिचमा फरक त छ त्यो के भने स्तरीय भिन्नता विचरणशीलताको निरपेक्ष मान हो भने स्तरीय भिन्नतामा आधारित तुलनात्मक मापन स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क हो । दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कहरूबिच एकरूपता (Cosistency) वा विविधता (Variability) को तुलनात्मक अध्ययन गर्न स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (coefficient of standard deviation) प्रयोग गरिन्छ । यसका लागि निम्न सूत्र प्रयोग गरिन्छ ।

$$\text{स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क} = \frac{\text{स्तरीय भिन्नता}}{\text{मध्यक}} = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

स्तरीय भिन्नता वा प्रमाणिक विचलनको गुणाङ्क तुलनात्मक रूपमा जति सानो हुन्छ त्यति नै बढी तथ्याङ्कमा वा वितरणमा एकरूपता वा स्थिरता भएको मानिन्छ । त्यसको विपरीत स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क ठुलो भएमा तथ्याङ्कमा वा वितरणमा एकरूपता नभएको वा बढी विविधता भएको भनेर बुझिन्छ । त्यसैले विभिन्न तथ्याङ्कहरूको तुलनात्मक अध्ययन गर्दा स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क सानो भएको राम्रो हुन्छ ।

5.4.4 विचरणशीलताको गुणाङ्क (Coefficient of Variation)

स्तरीय भिन्नता विचरणशीलताको निरपेक्ष मान हो । स्तरीय भिन्नतासँग सम्बन्धित विचरणशीलताको सापेक्षित मानलाई नै विचरणशीलताको गुणाङ्क (coefficient of variation) भनिन्छ । सामान्यतः स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क धेरै सानो हुने हुँदा यसलाई 100 ले गुणन गरी प्रतिशतमा बदलेर प्रयोग गर्ने गरिन्छ र त्यो नै विचरणशीलताको गुणाङ्क (coefficient of variation) हो । यो तथ्याङ्कको तुलनात्मक विधि हो । दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कको बिचमा विविधता वा एकरूपता कायम गर्न विचरणशीलताको गुणाङ्कको प्रयोग गरिन्छ । यदि विचरणशीलताको गुणाङ्क बढी भएमा तथ्याङ्कको वितरणमा विविधता भएको देखिन्छ भने विचरणशीलताको गुणाङ्क कम भएमा तथ्याङ्कको वितरणमा एकरूपता वा स्थिरता वा कम विविधता भएको हुन्छ । विचरणशीलताको गुणाङ्कलाई सङ्केतमा C.V. ले जनाइन्छ । यसलाई सूत्रमा निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ ।

विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V) $= \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100\%$ जहाँ, $\sigma =$ स्तरीय भिन्नता र $\overline{X}$ = तथ्याङ्कको मध्यक ।

उदाहरण 1

गाउँको एक विद्यालय जाने क्रममा, बाटामा हिँड्दै गरेका 10 जना विद्यार्थीहरूलाई तिमीहरूको गोजीमा कति कति पैसा छ भनी सोधिएको थियो । हेर्दा उनीहरूसँग निम्न रुपियाँ भएको पाइयो ।

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

उक्त तथ्याङ्कका आधारमा स्तरीय भिन्नता, स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्क: X = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

जम्मा पदहरूको सङ्ख्या (N) = 10

दिइएको तथ्याङ्कबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लागाउन तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेखी निम्नअनुसारको तालिका प्रयोग गरिन्छ ।

X	d = X – A	d^2
5	–25	625
10	–20	400
15	–15	225
20	–10	100
25	–5	25
30	0	0
35	5	25
40	10	100
45	15	225
50	20	400
	$\sum d = -25$	$\sum d^2 = 2125$

अनुमानित मध्यक (A) = 30 (मानौँ) [नोट : x को जुनसुकै मानलाई A मान्न सकिन्छ ।]

सूत्रअनुसार, स्तरीय भिन्नता (S.D) $= \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$

स्तरीय भिन्नता (S.D) $= \sqrt{\frac{2125}{10} - \left(\frac{-25}{10}\right)^2} = \sqrt{212.5 - 6.25} = \sqrt{206.25} = 14.36$

सूत्रअनुसार, बास्तविक मध्यक $(\overline{X}) = A + \frac{\sum d}{N} = 30 + \left(\frac{-25}{10}\right) = 30 - 2.5 = 27.5$

स्तरीय भिन्नता को गुणाङ्क $= \frac{\text{स्तरीय भिन्नता}}{\text{मध्यक}} = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{14.36}{27.5} = 0.5221$

विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V) $= \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100\% = \frac{14.36}{27.5} \times 100\% = 52.21\%$

विचारणीय प्रश्न : के यस प्रश्नलाई अर्को तरिकाबाट समाधान गर्न सकिन्छ ?

उदाहरण 2

संस्कृत माध्यमिक विद्यालयको कक्षा 9 मा अध्ययनरत 18 जना विद्यार्थीहरूमा 25 पूर्णाङ्कको अनिवार्य गणितको कक्षा टेस्ट लिइएको थियो । उक्त टेस्टमा उनीहरूले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तल तालिकामा दिइएको छ ।

प्राप्ताङ्क	6	10	12	14	24
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	4	5	4

उक्त तथ्याङ्कका आधारमा,

(क) काल्पनिक मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) स्तरीय भिन्नता र विचरणशीलता (variation) को गणना गरी फरक छुट्याउनुहोस् ।

(ङ) विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

काल्पनिक मध्यक (A) = 12

दिइएको तथ्याङ्कबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेखी निम्नअनुसारको तालिका प्रयोग गरिन्छ ।

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	$x - A = d$	fd	fd^2
6	2	6 – 12 = –6	– 12	72
10	3	10 – 12 = –2	– 6	12
12	4	12 – 12 = 0	0	0
14	5	14 – 12 = 2	10	20
24	4	24 – 12 = 12	48	576
	$\sum f = N = 18$		$\sum fd = 76$	$\sum fd^2 = 680$

अनुमानित मध्यक (A) = 12

(क) काल्पनिक मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने सूत्र निम्नानुसार छ ।

$$\text{स्तरीय भिन्नता } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

(ख) सूत्रअनुसार $(\sigma) = \sqrt{\frac{680}{18} - \left(\frac{76}{18}\right)^2} \quad = \sqrt{37.778 - 17.827} = \sqrt{19.95} = 4.47$

(ग) सूत्रअनुसार, बास्तविक मध्यक $(\overline{X}) = A + \frac{\sum fd}{N} = 12 + \frac{76}{18} = 16.22$

$$\text{स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क} = \frac{\text{स्तरीय भिन्नता}}{\text{मध्यक}} = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{4.47}{16.22} = 0.275$$

$$\text{स्तरीय भिन्नता } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

(घ) माथिबाट, स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = 4.47$

विचरणशीलता (variation) $= \sigma^2 = (4.47)^2 = 19.9809$

स्तरीय भिन्नताको वर्ग नै विचरणशीलता हुन्छ ।

(ङ) विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V) $= \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100\% = \frac{4.47}{16.22} \times 100\% = 27.5\%$

अभ्यास 5.4

1. (क) स्तरीय भिन्नता भन्नाले के बुझिन्छ लेख्नुहोस् ।
   (ख) स्तरीय भिन्नता कुन कुन विधिबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ, लेख्नुहोस् ।
   (ग) विभिन्न विधिबाट वैयक्तिक श्रेणी र खण्डित श्रेणीमा स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउन प्रयोग हुने सबै सूत्रहरू लेख्नुहोस् ।
   (घ) स्तरीय भिन्नता कसरी पत्ता लगाइन्छ, स्पष्ट पार्नुहोस् ।
   (ङ) हाम्रो दैनिक जीवनमा स्तरीय भिन्नताको उपयोग कहाँ गरिन्छ, खोजी गरी लेख्नुहोस् ।
   (च) स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क भन्नाले के बुझिन्छ, लेख्नुहोस् ।
2. (क) विचरणशीलताको परिभाषा लेख्नुहोस् र यो कसरी पत्ता लगाइन्छ, स्पष्ट पार्नुहोस् ।
   (ख) विचरणशीलताको गुणाङ्क बढी र कम हुनुले तथ्याङ्कलाई कसरी विश्लेषण गर्न सकिन्छ ? लेख्नुहोस् ।
3. विभिन्न समयमा फरक फरक उद्देश्यका लागि सङ्कलन गरिएका विभिन्न तथ्याङ्कहरू तल दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कका आधारमा स्तरीय भिन्नता, त्यसको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (क) मूल्य (रु): 150, 200, 250, 400, 160, 210, 420
   (ख) तापक्रम (°c): 20, 18, 25, 12, 9, 6, 21, 42, 35, 28.
   (ग) शरीरको तौल (kg): 13, 40, 27, 30, 25, 22, 21, 18, 12, 13, 10.
   (घ) विद्यार्थीको खाजा खर्च (रु): 50, 80, 85, 75, 70, 90, 100, 105, 120, 110, 130.
   (ङ) वर्षा (mm): 14, 10, 8, 12, 22, 28, 16, 24, 26.
   (च) प्राप्ताङ्क : 17, 10, 15, 7, 13, 9, 6, 18, 11, 14.
4. एउटा सुपर मार्केटमा काम गर्ने कर्मचारीहरूको दैनिक ज्याला निम्नअनुसार छ ।

ज्याला (रु)	1200	1300	1400	1500	1600
कामदार सङ्ख्या	8	12	15	9	6

   (क) कर्मचारीहरूको औसत ज्याला कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ख) उक्त तथ्याङ्कको स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) उक्त तथ्याङ्कको विचरणशीलताको गुणाङ्क कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. निम्नलिखित तथ्याङ्कका आधारमा स्तरीय भिन्नता, सोको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)

उमेर (वर्ष)	10	12	13	14	15	16
बच्चाको सङ्ख्या	8	12	15	9	6	5

(ख)

प्राप्ताङ्क	35	45	50	55	60	65	70	75
विद्यार्थी सङ्ख्या	8	4	5	5	6	6	6	1

(ग)

दैनिक ज्याला (रु)	1000	1050	1100	1150	1200
कामदार सङ्ख्या	14	9	5	8	5

उत्तर

1 देखि 2 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (क) 102.38, 0.401, 40.04% (ख) 10.76, 0.498, 49.83% (ग) 8.71, 0.415, 41.48%
   (घ) 22.40, 0.243, 24.27% (ङ) 6.96, 0.39, 39.14% (च) 3.87, 0.32, 32.27%
4. (क) 1386 (ख) 123.30 (ग) 8.89%
5. (क) 1.71, 0.132, 13.20% (ख) 12.30, 0.226, 22.6% (ग) 71.65, 0.066, 6.65%

5.3 ह्विस्कर बक्स प्लट (Whisker Box Plot)

Box plot का आविष्कारक गणितज्ञ John tukey हुन् । यसलाई ह्विस्कर बक्स प्लट (Whisker box plot) पनि भनिन्छ । खासगरी ह्विस्कर (Whisker) ले Box plot को दुई छेउमा रहेका सबैभन्दा सानो र सबैभन्दा ठुलो मानलाई प्रतिनिधित्व गर्छ ।

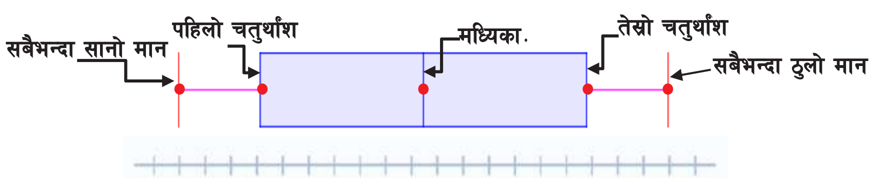
यहाँ हामीले box plot भनेको के हो ? दिइएको तथ्याङ्कबाट बक्स (box) plot कसरी बनाउने ? दिइएको box plot बाट तथ्याङ्कको अध्ययन कसरी गर्ने ? box plots हरूको तुलना र विश्लेषण कसरी गर्न सकिन्छ ? त्यस बारेमा अध्ययन गर्छौं ।

Box plot भनेको के हो ?

Box plot भनेको बाकस मात्र बनाउने होइन । सामान्यत: Box plot भनेको यस्तो रेखाचित्र हो जसको अध्ययनबाट दिइएको तथ्याङ्कमा सबैभन्दा सानो मान कति रहेछ, सबैभन्दा ठुलो मान कति रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ । साथै तल्लो (पहिलो) चतुर्थांश (Q_1), मध्यिका (M_d) र माथिल्लो (तेस्रो) चतुर्थांश (Q_3) का मानहरू पनि कति कति रहेछन् प्रस्टसँग थाहा पाउन सकिन्छ ।

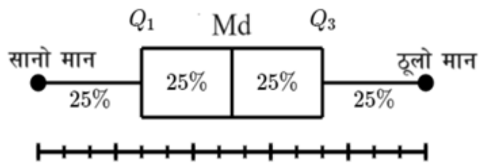
त्यसैले सबैभन्दा सानो मान, पहिलो चतुर्थांश (Q_1), मध्यिका (M_d), तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) र सबैभन्दा ठुलो मान Box plot रेखाचित्रमा भएका पाँचओटा तथ्याङ्कहरूको मानलाई पाँचओटा सङ्ख्याको सारांश भनिन्छ ।

यी मानहरूलाई स्पष्ट रूपमा देखाउनका लागि box plot लाई चित्रमा देखाइए जस्तै स्केलमा अङ्कित गरिनुपर्छ ।



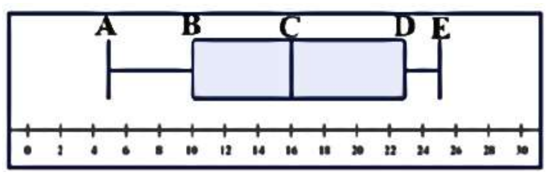
दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कहरूलाई तुलना गरी विश्लेषण गर्न box plots बढी उपयोगी हुन्छ । खासगरी यसबाट मध्यक, विस्तार र चतुर्थांशहरूको चित्रात्मक तुलना गर्न निकै सजिलो हुन्छ । सञ्चित बारम्बारताको लेखाचित्रबाट मध्यिका र चतुर्थांशको अनुमान गरी box plot बनाउन सजिलो हुन्छ ।

पाँचओटा मुख्य मानहरूले दिइएको तथ्याङ्कलाई विभाजन गर्न सहयोग गर्छ । ती मानहरूले तथ्याङ्कलाई तल चित्रमा देखाए जस्तै गरी विभाजन गर्छ ।



5.3.1. चित्र अध्ययन गर्नुहोस् ।

(क) चित्रमा, ह्विस्कर बक्स प्लट देखाइएको छ ।



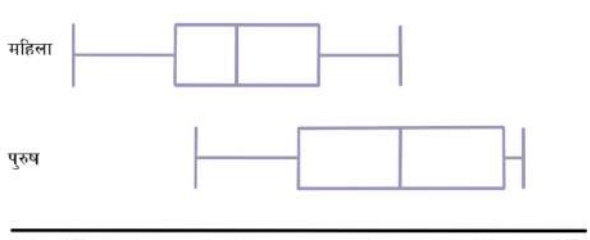
(अ) चित्रमा देखाइएका अङ्ग्रेजी अक्षरहरू A, B, C, D र E ले के के जनाउँछन् ?

(आ) तथ्याङ्कको सबैभन्दा सानो र सबैभन्दा ठुलो मान कति कति होलान् ?

(इ) तल्लो चतुर्थांश (Q_1) मध्यिका (M_d) र माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3), कति कति होलान् ? माथि सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गरी तालिकामा भर्नुहोस् ।

(अ)	A = ...	B = ...	C = ...	D = ...	E = ...
(आ)	सबैभन्दा सानो मान = ...	सबैभन्दा ठुलो मान = ...			
(इ)	Q_1 = ...	मध्यिका = ...	Q_3 = ...		

(ख) चित्रमा दुईओटा ह्विस्कर बक्स प्लट दिइएको छ । पहिलो ह्विस्कर बक्स प्लटले महिलाको उचाइ (cm) लाई जनाउँछ । दोस्रो ह्विस्कर बक्स प्लटले पुरुषको उचाइ (cm) लाई जनाउँछ । उक्त बक्स प्लटहरूको अध्ययन गर्नुहोस् र तल सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।



(अ) महिला र पुरुषको उचाइलाई तुलना गर्नुहोस् ।

(आ) महिलाको सबैभन्दा धेरै उचाइ कति छ ? लेख्नुहोस् ।

(इ) एक जना व्यक्तिको उचाइ 162 cm छ भने ती व्यक्ति महिला अथवा पुरुषमध्ये कुन हुने सम्भावना बढी रहन्छ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

माथि रहेका ह्विस्कर बक्स प्लटलाई अध्ययन गर्दा के देखिन्छ भने महिलाको उचाइभन्दा पुरुषको उचाइको माथिल्लो मान र मध्यिका उचाइ धेरै छ । यसको अर्थ महिलाभन्दा पुरुषहरू अग्ला छन् भन्ने बुझिन्छ । त्यसैगरी महिलाको सबैभन्दा धेरै उचाइ 163cm छ अर्थात् सबैभन्दा अग्लो महिलाको उचाइ 163cm छ भन्ने हो । कुनै व्यक्तिको उचाइ 162 cm छ भने त्यो व्यक्ति महिला वा पुरुष के हो भनी थाहा पाउन दुबै बक्स प्लटलाई अध्ययन गर्नुहोस् । दोस्रो बक्स प्लटमा 162 cm र त्योभन्दा धेरै उचाइ भएका धेरै पुरुषहरूको सङ्ख्या छ, त्यसकारण 162 cm उचाइ भएको व्यक्ति पुरुष नै हुनुपर्छ ।

Box plot बनाउन थाहा पाउनुपर्ने चरणहरू

1. मध्यिका र चतुर्थांशहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. लेखाचित्रमा स्केल बनाउनुहोस् र पाँचओटा मुख्य मानहरू: सबैभन्दा सानो मान, पहिलो चतुर्थांश (Q_1), मध्यिका (M_d), माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) र उच्चतम मानहरू प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
3. बक्स बनाउन पहिलो चतुर्थांश (Q_1) र माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) लाई जोड्ने र सबैभन्दा सानो र ठुलो मानमा तेर्सा रेखाहरू खिच्नुहोस् ।

उदाहरण 1

दिइएको जानकारीका आधारमा ह्विस्कर बक्स प्लट (Whisker box plot) बनाउनुहोस् ।

सबैभन्दा सानो मान	10
पहिलो चतुर्थांश (Q_1)	15
मध्यिका (M_d)	21
माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3)	28
सबैभन्दा ठुलो मान	35

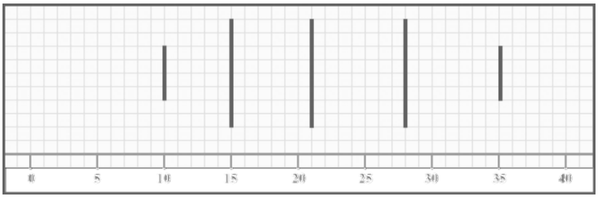
समाधान : यहाँ,

दिइएका पाँचओटा मुख्य मानहरू यसप्रकार छन् ।

सबैभन्दा सानो मान = 10, तल्लो चतुर्थांश (Q_1) = 15 मध्यिका = 21

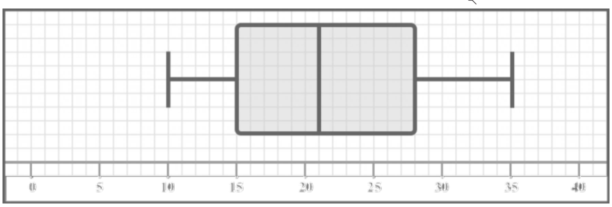
माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) = 10 र सबैभन्दा ठुलो मान = 35

स्केल लिइ दिइएका मानहरूलाई ग्राफमा भर्नुहोस् । स्केल लिँदा सबैभन्दा सानो र सबैभन्दा ठुलो मान भर्न मिल्ने गरी लिनुहोस् । ठाडो रेखा खिची ती पाँचओटा मानहरूलाई तल ग्राफमा देखाइएको छ ।



ग्राफमा तेस्रो रेखामा 0 देखि 40 सम्म लिइएको छ ।

बक्समा तल्लो चतुर्थांश (Q_1) 15 देखि माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) 28 सम्म जोड्ने । तल्लो ह्विस्कर सबैभन्दा सानो मान 10 सम्म र माथिल्लो ह्विस्कर सबैभन्दा ठुलो मान 35 सम्म जोड्ने ।



तल्लो चतुर्थांश (Q_1) र माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) लाई जोडिएको छ । सबैभन्दा सानो र ठुलो मानमा तेर्सा रेखाहरू खिचिएको छ ।

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्क विन्दुबाट ह्विस्कर बक्स प्लट खिची ग्राफमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

1, 2, 1, 3, 5, 7, 15, 8, 10, 12, 7

समाधान : यहाँ, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 7, 8, 10, 12, 15

दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेख्दा, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 7, 8, 10, 12, 15

जम्मा पद सङ्ख्या (N) = 11

दिइएका तथ्याङ्कमा पाँचओटा मुख्य मानहरू यसप्रकार छन् ।

सबैभन्दा सानो मान = 1   सबैभन्दा उच्चतम मान = 15

तल्लो चतुर्थांश (Q_1) पर्ने स्थान $= \left(\frac{N+1}{4}\right)^{औँ}$ पद

$= \left(\frac{11+1}{4}\right)^{औँ}$ पद $= \left(\frac{12}{4}\right)^{औँ}$ पद $= 3^{औँ}$ पद $= 2$

अतः तल्लो चतुर्थांश (Q_1) = 2

मध्यिका (Md) पर्ने स्थान $= \left(\frac{N+1}{2}\right)^{औँ}$ पद

$= \left(\frac{11+1}{2}\right)^{औँ}$ पद $= \left(\frac{12}{2}\right)^{औ}$ पद $= 6^{औँ}$ पद $= 7$

अतः मध्यिका = 7

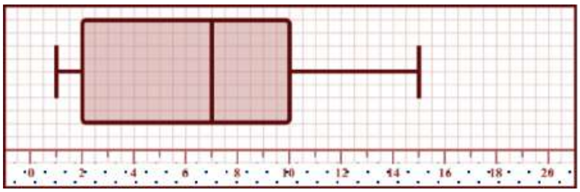
अतः मध्यिका = 7

माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) पर्ने स्थान $= 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{औँ}$ पद $= 3\left(\frac{11+1}{4}\right)^{औँ}$ पद

$= 3\left(\frac{12}{4}\right)^{औँ}$ पद $= 3 \times 3^{औँ}$ पद $= 9^{औँ}$ पद $= 10$

अतः माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) = 10

पाँच मुख्य मानहरू प्रयोग गरी ह्विस्कर बक्स प्लट तल देखाइएको छ

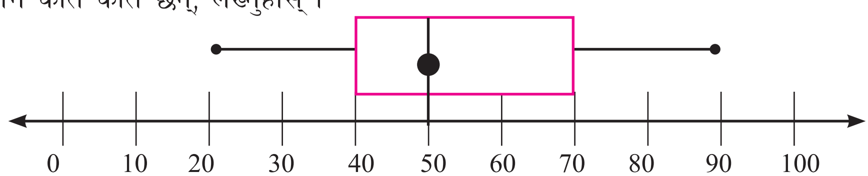


सबैभन्दा सानो मान	1
तल्लो चतुर्थांश	2
मध्यिका	7
माथिल्लो चतुर्थांश	10
सबैभन्दा ठुलो मान	15

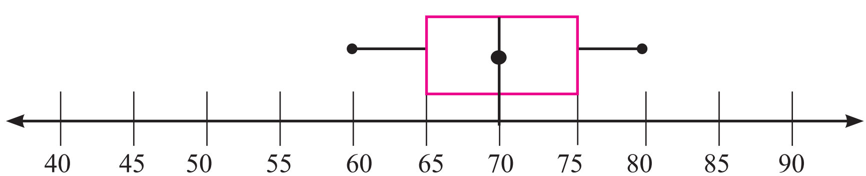
पाँचओटा मुख्य मानहरूलाई ठाडो रेखाले जनाई बक्समा पहिलो चतुर्थांश (Q_1) 2 देखि माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) 10 सम्म जोडिएको छ। तल्लो ह्विस्कर सबैभन्दा सानो मान 1 सम्म र माथिल्लो ह्विस्कर सबैभन्दा ठुलो मान 15 सम्म जोडिएको छ ।

अभ्यास 5.5

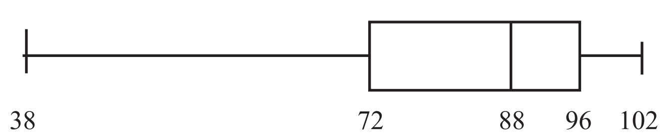
1. दिइएको Box र ह्विस्कर plot मा भएका पाँचओटा सङ्ख्याको सारांश के के हुन् र तिनीहरूको मान कति कति छन्, लेख्नुहोस् ।



2. दिइएको Box र ह्विस्कर plot मा एउटा माध्यमिक विद्यालयको बास्केटबल टिममा रहेका विद्यार्थीहरूको उचाइ (इन्च) देखाइएको छ। Box र ह्विस्कर plot मा भएका पाँचओटा सङ्ख्याको सारांश के के हुन् र तिनीहरूको मान कति कति छन्, लेख्नुहोस् ।



3. दिइएको Box र ह्विस्कर plot मा एउटा माध्यमिक विद्यालयमा अध्ययन गर्ने विद्यार्थीहरूको तौल (kg) मा देखाइएको छ। सो Box र ह्विस्कर plot को आधारमा तल दिइएका प्रश्नहरूका उत्तर दिनुहोस् ।



(क) सबैभन्दा धेरै तौल कति रहेछ ?

(ख) सबैभन्दा थोरै तौल कति रहेछ ?

(ग) मध्यिका तौल कति हुन्छ ?

(घ) कति प्रतिशत विद्यार्थीहरूको तौल 72 भन्दा माथि छ ?

(ङ) कति प्रतिशत विद्यार्थीहरूको तौल 88 र 96 को बिचमा पर्छ ? लेख्नुहोस् ।

(च) के तपाइँले मध्यिकाभन्दा मध्यक धेरै वा थोरै अपेक्षा गर्नुहुन्छ, वर्णन गर्नुहोस् ।

4. 2080 साल वैशाख महिनामा लिइएको 14 जना महिलाको तौल तल दिइएको छ । ह्विस्कर बक्स प्लट खिची लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

190, 175, 187, 199, 205, 187, 176, 180, 187, 191, 200, 193, 188, 196

5. कक्षा 9 मा अध्ययनरत 15 जना विद्यार्थीहरूले 75 पूर्णाङ्कको गणित विषयको पहिलो त्रैमासिक परीक्षमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तल दिइएको छ । ह्विस्कर बक्स प्लट खिची लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

61, 55, 54, 69, 74, 65, 58, 73, 71, 60, 66, 70, 56, 64, 73

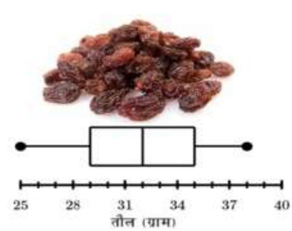
6. एउटा IT कम्पनीले आफ्ना दुईओटा स्टोरबाट कम्प्युटरको बिक्री गर्छ । एक वर्षमा दईओटा स्टोरबाट भएको बिक्री रेकर्ड तल दिइएको छ ।

स्टोर 1: 50, 460, 20, 160, 580, 250, 210, 120, 200, 510, 290, 380.

स्टोर 2: 520, 180, 260, 380, 80, 500, 630, 420, 210, 70, 440, 140

ह्विस्कर बक्स प्लट खिची ग्राफमा देखाउनुहोस् र समग्र पक्षको तुलना गर्नुहोस् ।

7. चित्रमा सुकेको छोकडा र सँगै यसको तौललाई ह्विस्कर बक्स प्लटमा देखाइएको छ । अब भन्नुहोस् कति प्रतिशत तौल 29 ग्रामभन्दा बढी छ ? के ह्विस्कर बक्स प्लट हेरी पत्ता लगाउन सकिन्छ त ?



उत्तर

1 क) सबैभन्दा सानो मान 20 तल्लो चतुर्थांश (Q_1) 40, मध्यिका 50, माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) 70 र उच्चतम मान 90

2. सबैभन्दा सानो मान = 60 तल्लो चतुर्थांश (Q1) = 65 मध्यिका = 70 माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) = 75 र उच्चतम मान = 80

3. (क) 102 (ख) 38 (ग) 88 (घ) 75% (ङ) 25%

4 देखि 6 सम्म ह्विस्कर बक्स प्लट खिची शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 7. 75%, सकिन्छ ।

परियोजना कार्य (Project Work)

1. **समस्या (Problem):** आफ्ना कक्षाका साथीहरूले एकाइ परीक्षामा गणित र सामाजिक विषयमा प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्क सङ्कलन गरी प्राप्त तथ्याङ्कका आधारमा कक्षाको औसत प्राप्ताङ्क पत्ता लगाई चतुर्थांशीय भिन्नता, मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् र तुलना गर्नुहोस् । यी भिन्नताहरूमध्ये कुन भिन्नता पत्ता लगाउनु उपयुक्त हो ? आफ्ना भनाइलाई निष्कर्षसहित प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

प्रक्रिया (Procedure): सबै साथीहरूले गणित र सामाजिक विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क सोधेर लेख्नुहोस् । अनि सबैले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई विषयगत रूपमा टेबुल बनाउनुहोस् । आवश्यक सूत्रहरूको प्रयोग गरी तल सोधिएका भिन्नताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

१. कुन औसत मान पत्ता लगाउने हो ? कारणसहित यकिन गर्नुहोस् ।

२. चतुर्थांशीय भिन्नता र चतुर्थांशीय भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

३. मध्यक भिन्नता र मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

४. स्तरीय भिन्नता र स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

५. नतिजालाई व्याख्या गर्नुहोस् ।

उपयोग र महत्त्व (Uses and Importance): कुन विषयको तथ्याङ्कको विस्तार (range) बढी छ ? तथ्याङ्कको विस्तार बढी हुँदा सिकाइमा कस्तो असर हुन्छ ? चतुर्थांशीय भिन्नता, मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नताको उपयोग कुन कुन क्षेत्रमा कसरी गर्न सकिन्छ ? यी सबैको महत्त्व बारेमा अध्ययन गरी विश्लेषण र व्याख्या गर्नुहोस् ।

निष्कर्ष (Conclusion): चतुर्थांशीय भिन्नता, मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नतामा कुन बढी भरपर्दो र विश्वसनीय छ निष्कर्ष लेख्नुहोस् । साथै कुन विषयको सिकाइ प्रभावकारी रहेछ ? निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

प्रतिविम्बन (Reflection): तपाईंले गरेको अध्ययन विधि र निष्कर्ष कति विश्वसनीय छ ? के तपाईं सही निष्कर्षमा पुग्नुभयो ? तपाईंलाई के के कठिनाइ पऱ्यो ? तपाईंको निष्कर्ष निकाल्ने सही विधि कुन रहेछ ? के तपाईंले गरेको बाहेक अन्य विधिबाट पनि यही निष्कर्षमा पुग्न सक्नुहुन्छ ? के तपाईंको निष्कर्ष निकाल्न लेखाचित्र वा अन्य विधि पनि उपयोगी थिए कि ? दैनिक जीवनमा यसको प्रयोग कसरी हुँदो रहेछ ? यस्तै कुराहरूमा प्रतिविम्बन गर्नुहोस् ।

2. **समस्या (Problem):** आफ्नो विद्यालयको कुनै कक्षामा अध्ययनरत छात्र र छात्राहरूको तौल कति छ छुट्टाछुट्टै सङ्कलन गर्नुहोस् । सङ्कलनबाट प्राप्त तथ्याङ्कका आधारमा कक्षाको औसत तौल छुट्टाछुट्टै पत्ता लगाउनुहोस् । छात्र र छात्राहरूको औसत तौल तुलना गर्नुहोस् । साथै चतुर्थांशीय भिन्नता, मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् र तुलना गर्नुहोस् । यी भिन्नताहरूमध्ये कुन मध्यक पत्ता लगाउनु उपयुक्त हो ? यी सबै प्रश्नहरूका आधारमा तयार पारिएको खोजलाई चार्ट पेपर, पावर पोइन्ट वा अन्य उपयुक्त विधिका माध्यमबाट कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

पाठ 6

सीमान्तमान (Limit)

6.0 परिचय (Introduction)

Zeno
(490 – 425B.C.)

प्रसिद्ध इटालियन दार्शनिक जेनो (Zeno) ले सिधारेखामा Space र time लाई अनन्त टुक्राहरू पार्दा त्यहाँ चाल नहुने कुरालाई प्रस्तुत गरे जसलाई Zeno's Paradox पनि भनिन्छ । सोह्रौँ शताब्दीतिर Newton, Leibniz तथा पछि Cauchy जस्ता गणितज्ञहरूले सीमान्तमानको अबधारको विकास गरेको पाइन्छ ।

सीमान्तमानको अवधारणाको विकास खासगरी वक्ररेखा भएका ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल कसरी निकाल्ने तथा कुनै पनि वक्ररेखाको एक विन्दुमा स्पर्शरेखा (tangent line) कसरी खिच्ने ? भन्ने प्रमुख समस्याबाट भएको पाइन्छ । सीमान्तमानको अध्ययनका लागि बीजगणित, निर्देशाङ्क ज्यामिति तथा त्रिकोणमिति जस्ता पाठहरूको पूर्वज्ञान हुन आवश्यक छ ।

6.1 असीमितता वा अनन्तको अवधारणा (Concept of Infinity)

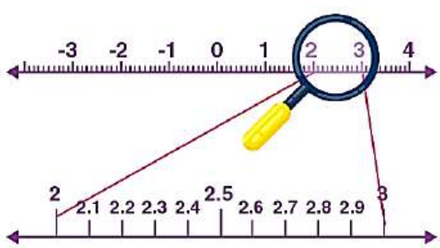
विचारणीय प्रश्न :

(क) प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । के प्राकृतिक सङ्ख्याहरू समिति हुन्छन् ?

(ख) सिधारेखामा कतिओटा विन्दुहरू हुन्छन होला ? सोच्नुहोस् ।

(ग) 1 लाई 3 ले भाग गर्नुहोस् कति पटकसम्म भाग क्रिया गर्दा अन्त्य हुन्छ ? के भागफल अन्त्य हुने दशमलवमा आयो ?

(घ) तलको सङ्ख्यारेखालाई दायाँ र बायाँतर्फ लम्ब्याउँदा अन्तिम मानहरू के के होलान् ?



> Infinity ल्याटिन भाषाको 'Infinitas' बाट आएको हो । Infinitas शब्द दुई शब्दहरू in र finitas मिली बनेको पाइन्छ जसमा in को अर्थ छैन वा होइन (not) भन्ने हुन्छ भने finitas को मूल finis को अर्थ अन्त्य (ends/termination) तथा सीमा (bounds) भन्ने हुन्छ । यसरी शाब्दिक रूपमा अन्त्य नहुने तथा सीमाविहीन वस्तु तथा प्रक्रियालाइ अनन्त (infinity) भनिन्छ । यसलाइ सङ्केतमा ∞ ले जनाइन्छ । अनन्त (Infinity) आफैँमा एउटा सङ्ख्या होइन, यो एउटा अन्त्यहिनता वा सीमाविहीनताको अवधारणा हो । सङ्ख्या रेखामा कुनै वास्तविक सङ्ख्या दायाँ तर्फ "$+\infty$" र बायाँ तर्फ "$-\infty$" को नजिक पुग्छ । तर ठिक "∞" र "$-\infty$" हुँदैन ।

6.1.1 शून्यले भाग (Division by Zero)

क्रियाकलाप 1 **तलका मान निकाल्नुहोस् :**

जस्तै : $\frac{5}{2} = 2.5$,

$\frac{5}{1}$ = ..., $\frac{5}{0.1}$ = ..., $\frac{5}{0.01}$ = ..., $\frac{5}{0.001}$ = ..., $\frac{5}{0.0001}$ = ..., $\frac{5}{0.00001}$ = ..., $\frac{5}{0.000000001}$ = ...

यसैगरी, हरमा भएको भाजकलाई 0 को धेरै नजिकमा पर्ने सङ्ख्या राख्दा त्यसको मान कति हुन्छ होला ? अनुमान गर्नुहोस् ।

"$\frac{5}{0}$ को मान कति लेख्न सकिन्छ होला अनुमान गर्नुहोस् ।"

कुनै पनि सङ्ख्यालाई 0 ले भाग गर्दा उक्त भागफल निश्चित ढङ्गले परिभाषित गर्न नसकिने हुनाले अपरिभाषित (undefined) हुन्छ । यसैलाई फलनको मान असीमित भएको पनि भन्न सकिन्छ । विशेषगरी हामीले फलनको निरन्तरताको अध्ययन गर्नका लागि यस अवधारणाको आवश्यकता पर्छ ।

$\therefore \frac{a}{0} = \infty$ (अपरिभाषित), $a \neq 0$,

उदाहरण 1

फलन $f(x) = \frac{1}{x-2}$ मा $x = 1, 2$ र 3 राखी $f(x)$ को मान निकाल्नुहोस् । x को कुन मानमा फलन अपरिभाषित भयो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको फलन, $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$x = 1$ हुँदा, $f(1) = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$

$x = 2$ हुँदा, $f(2) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = \infty$ (अपरिभाषित)

$x = 3$ हुँदा, $f(3) = \frac{1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$

$\therefore x = 2$ हुँदा मात्र फलन अपरिभाषित भयो ।

अभ्यास 6.1

1. अनन्त भनेको के हो ? के पूर्णसङ्ख्याहरू अनन्तसम्म फैलिएका हुन्छन ?

2. तलको खाली ठाउँ भर्नुहोस् ।

(क) $\infty + \infty = ...$ $(-\infty) + (-\infty) = \ldots$

(ख) $(+\infty)\times(+\infty) = \ldots$ $(-\infty) \times (-\infty) = \ldots$ $(-\infty) \times (\infty) = ...$

(ग) x कुनै पूर्णसङ्ख्या भए

(i) $x + (-\infty) = \ldots$ (ii) $x - \infty = \ldots$ (iii) $x + \infty = \ldots$ (iv) $x - (-\infty) = \ldots$

(v) $x \times \infty = \ldots$, for $x > 0$ (vi) $x \times (-\infty) = \ldots$, for $x > 0$

(vii) $x \times \infty = \ldots$, for $x < 0$ (viii) $x \times (-\infty) = \ldots$, for $x < 0$

3. फलन $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 1}$ दिइएको छ ।

(क) $x = 0, -1, 1$ र 2 राखी $f(x)$ को मान निकाल्नुहोस् ।

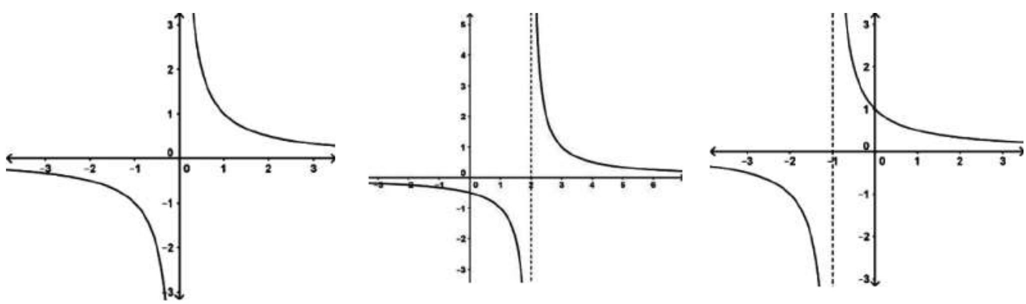
(ख) x को कुन मानमा दिइएको फलन अपरिभाषित छ ? लेख्नुहोस् ।

4. फलन $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ दिइएको छ ।

(क) $x = 0, 1, 2$ र 3 राखी $f(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) x को कुन कुन मानहरूमा फलन अपरिभाषित हुन्छन् ? लेख्नुहोस् ।

5. तल फलन $f(x)$ को लेखाचित्र प्रस्तुत गरिएको छ । उक्त फलन कुन विन्दुमा अपरिभाषित छ, लेखाचित्रका आधारमा लेख्नुहोस् ।



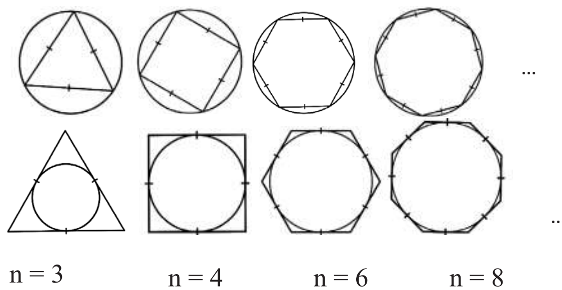
उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 2. (क) $\infty, -\infty$ (ख) $\infty, \infty, -\infty$ (ग) (i) $-\infty$, (ii) $-\infty$, (iii) ∞, (iv) ∞, (v) ∞, (vi) $-\infty$, (vii) $-\infty$, (viii) ∞ 3. (क) -5, अपरिभाषित, अपरिभाषित, $\dfrac{5}{3}$ (ख) $x = -1, 1$
4. (क) $\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}$, अपरिभाषित, अपरिभाषित (ख) $x = 2, 3$ 5. $x = 0, x = 2, x = -1$

6.2 सीमान्तमानको अवधारणा (Concept of Limit)

क्रियाकलाप 1

तलको चित्रहरू अध्ययन गरी प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) नियमित बहुभुज भनेको के हो ?

(ख) चित्रमा, वृत्तभित्र रहेका नियमित बहुभुजहरूको भुजाको सङ्ख्या बढाउँदै लगेर असीमित बनाउने हो भने उक्त बहुभुज र वृत्तबिचको क्षेत्रफलको फरक कति हुन्छ होला ? अनुमान गर्नुहोस् । उक्त नियमित बहुभुज कुन आकृतिको धेरै नजिक पुग्छ ?

(ग) नियमित बहुभुजको सीमान्त हुने अवस्था के हो ?

(घ) नियमित बहुभुजको परिमितिको सीमान्त हुने अवस्था के हो ?

(ङ) नियमित बहुभुजको क्षेत्रफलको सीमान्त हुने अवस्था के हो ?

नियमित बहुभुजलाई बाहिरबाट वृत्तले घेरिएको अवस्थामा, नियमित बहुभुजको भुजाको सङ्ख्या असिमित बनाउँदा अर्थात् भुजाको सङ्ख्यालाई अनन्तको धेरैनजिक लैजाँदा, नियमित वहुभुज वृत्तको धेरै नजिक पुग्ने अर्थात् लगभग वृत्त नै हुने हुनाले, नियमित बहुभुजको सीमान्त अवस्था वृत्त हुन्छ । नियमित बहुभुजको परिमिति तथा क्षेत्रफलको सिमान्त अवस्था क्रमशः वृत्तको परिधि तथा क्षेत्रफलहरू हुन्छन । तसर्थ सीमान्तमान नजिकपन (Closeness or approaches) सँग सम्बन्धित छ ।

उदाहरण 1

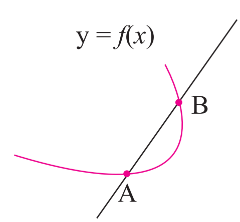
दायाँको चित्रमा फलन $f(x)$ को लेखाचित्र दिइएको छ सोही आधारमा तलका प्रश्नहरू समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) स्पर्शरेखा (Tangent Line) भन्नाले कस्तो रेखालाई बुझाउँछ ?

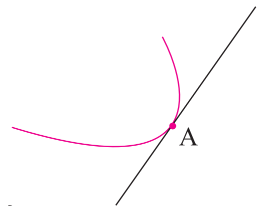
(ख) चित्रमा रेखा AB लाई के भनिन्छ ?

(ग) विन्दु B लाई विन्दु A को नजिक ल्याउँदा रेखा AB मा के परिवर्तन आउँछ ? अर्थात् रेखा AB कुन रेखाको नजिक जान्छ ?

(घ) जब विन्दु B विन्दु A को एकदमै नजिक (विन्दुहरू A र B बिचको दुरी लगभग शून्य बराबर हुन्छ) पुग्छ, त्यो अवस्थामा रेखा AB को सीमान्तमान के हुन्छ होला ?



समाधान



(क) कुनै पनि वक्र रेखाको एक मात्र विन्दु भएर जाने सिधारेखालाई स्पर्श रेखा भनिन्छ । चित्रमा दिइएको सिधारेखा विन्दु A मा स्पर्श रेखा हो ।

(ख) माथिको चित्रमा रेखा AB लाई छेदक रेखा (Secant Line) भनिन्छ । कुनै पनि वक्र रेखा (Curved Line) को कुनै दुई विन्दुहरू भएर जाने रेखाहरूलाई छेदक रेखाहरू (Secant Lines) भनिन्छ ।

(ग) विन्दु B लाई विन्दु A को नजिक ल्याउँदा रेखा छेदक (Secant Line) AB, विन्दु A बाट जाने स्पर्श रेखा (Tangent line) को धेरै नजिक जान्छ ।

(घ) जब विन्दु B, विन्दु A को धेरै नजिक पुग्छ तर ठ्याक्कै विन्दु A मा भने पुगेको हुँदैन, त्यो अवस्थामा रेखा AB, विन्दु A मा हुने स्पर्श रेखाको धेरै नजिक हुने भएकाले छेदक रेखा AB को सीमान्तमान विन्दु A मा हुने स्पर्शरेखा हुन्छ ।

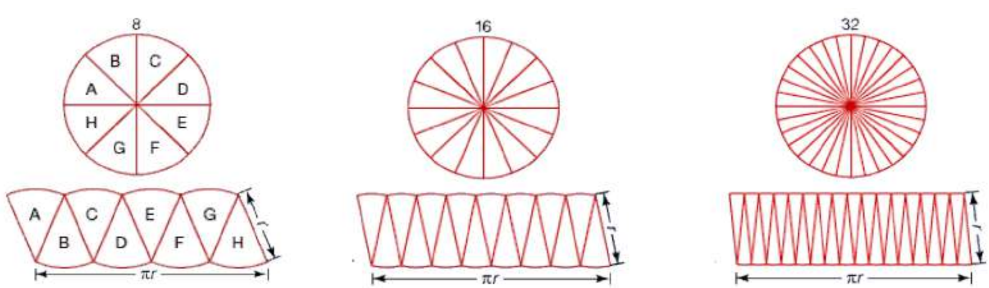
विन्दु B, विन्दु A को धेरै नजिक पुग्दा, छेदक रेखा AB, स्पर्शरेखाको धेरै नजिक पुग्छ र पार भने गर्दैन । त्यसैले छेदक रेखाको सीमान्तमान स्पर्शरेखा हो । सङ्केतमा

$B \to A$ हुँदा, छेदक $\to$ स्पर्शरेखा हुन्छ । यहाँ '$\to$' ले धेरै नजिक तर्फ (tends to or approaches to) लाई जनाउँछ । तसर्थ, Tangent at point A = $\lim_{B \to A}$ Secant AB

सीमान्तमान नजिकपन (Closeness or approaches) सँग सम्बन्धित छ ।

उदाहरण 2

तपाईंले वृत्तको क्षेत्रफल πr^2 कसरी हुन्छ, कहिल्यै सोच्नुभएको छ ? वृत्तको क्षेत्रफल πr^2 हो भनी प्रमाणित गर्नका लागि हामीलाई सीमान्तमानको अवधारण आवश्यकता पर्छ । यसलाई बुझ्नका लागि तलको चित्र अध्ययन गर्नुहोस् ।



एउटा वृत्त लिनुहोस् र यसलाई लगातार 8, 16 र 32 बराबर टुक्रामा विभाजन गरी चित्रमा जस्तै मिलाउनुहोस् । वृत्तको टुक्राहरूको सङ्ख्या बढाएर चित्रमा जस्तै मिलाउँदा आयतको स्वरूपको चित्र बन्दै गएको छ । टुक्राहरूको सङ्ख्या धेरै बनाई चित्रमा जस्तै मिलाएमा वृत्तको क्षेत्रफल आयतको क्षेत्रफलको नजिक जान्छ । अर्थात् जब टुक्राको सङ्ख्या अनन्त (infinite) हुन्छ, त्यस वेला वृत्तको क्षेत्रफलको सीमान्तमान (Limit) आयतको क्षेत्रफल हुन्छ ।

यसलाई सङ्केतमा लेख्दा,

$\lim_{n\to\infty}$ वृत्तको क्षेत्रफल = आयतको क्षेत्रफल (n भनेको क्षेत्रकको सङ्ख्या हो ।)

= लम्बाइ × चौडाइ

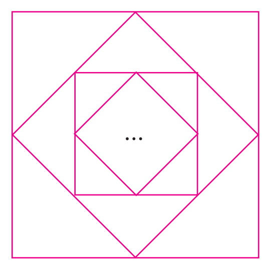
$= \pi r \times r$

$= \pi r^2$

क्षेत्रकको सङ्ख्या (n) लाई अनन्त बनाएर माथि चित्रमा जस्तै मिलाउँदा वृत्तको सीमान्तअवस्था आयत हुन्छ । कुनै एक परिमाण कुनै वस्तु वा सङ्ख्याको धेरै नजिक जाँदा अर्को परिमाण जुन वस्तु वा सङ्ख्याको नजिक जान्छ, उक्त वस्तु वा सङ्ख्या नै दोस्रो परिमाणको सीमान्तमान हो । सीमान्तमान एक वस्तु अर्को वस्तुसँगको नजिकपन (tends to or approaches to) सँग सम्बधित छ ।

उदाहरण 3

दायाँको चित्रमा सबैभन्दा बाहिरी वर्गको लम्बाइ 16 cm छ । त्यस पश्चात् प्रत्येक वर्गको मध्यविन्दुहरू जोडी वर्गहरू क्रमशः बनाइएको छ



(क) दोस्रो, तेस्रो र चौथो वर्गहरूको भुजाको लम्बाइ लेख्नुहोस् ।

(ख) यस्ता कतिओटा वर्गहरू निर्माण गर्न सकिन्छ होला ?

(ग) वर्गहरूको भुजाको लम्बाइको सीमान्तमान कति हुन्छ ? अनुमान गर्नुहोस् ।

(घ) वर्गहरूको परिमितिको सीमान्तमान कति होला ? अनुमान गर्नुहोस् ।

(ङ) वर्गहरूको क्षेत्रफलको सीमान्तमान कति होला ? अनुमान गर्नुहोस् ।

समाधान

(क) पहिलो वर्गको भुजाको लम्बाइ = 16 cm   दोस्रो वर्गको भुजाको लम्बाइ = $8\sqrt{2}$ cm

तेस्रो वर्गको भुजाको लम्बाइ = 8 cm   चौथो वर्गको भुजाको लम्बाइ = $4\sqrt{2}$ cm

(ख) यस्ता वर्गहरू असीमित निर्माण गर्न सकिन्छ ।

(ग) वर्गहरूको भुजाको लम्बाइको अनुक्रम निर्माण गर्दा, $16, 8\sqrt{2}, 8, 4\sqrt{2}, \ldots$

माथिको अनुक्रमबाट, वर्गहरूको सङ्ख्या बढाउँदै जाने हो भने भुजाहरूको लम्बाई 0 को धेरै नजिक पुग्छ । त्यसैले वर्गहरूको भुजाहरूको लम्बाइको सीमान्तमान 0 हुन्छ ।

(घ) वर्गहरूको सङ्ख्या असीमित हुँदा भुजाको लम्बाइको सीमान्तमान 0 हुने भएकाले वर्गहरूको परिमितिको सीमान्तमान पनि 0 नै हुन्छ ।

(ङ) वर्गहरूको सङ्ख्या असीमित हुँदा भुजाको लम्बाइको सीमान्तमान 0 हुने भएकाले वर्गहरूको क्षेत्रफलको सीमान्तमान पनि 0 नै हुन्छ ।

अनुक्रमहरूका आधारमा सीमान्तमानका लागि तलका क्रियाकलापहरू गर्नुहोस् :

क्रियाकलाप 2

सङ्ख्याहरूको अनुक्रमका आधारमा सीमान्तमानको अवधारणा

उद्देश्य : सङ्ख्याहरूको अनुक्रमका आधारमा सीमान्तमानको अवधारणाको विकास गर्नु ।

समस्या : दिइएको अनुक्रमका आधारमा प्रश्नहरू समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

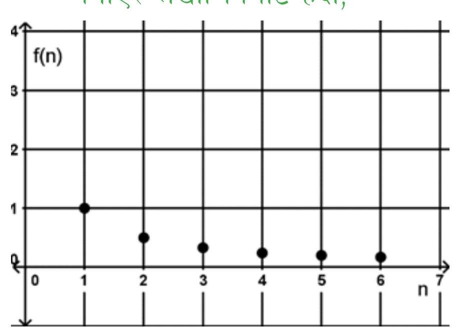
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

(क) माथिको अनुक्रमको साधारण पदको सूत्रलाई फलनका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ख) अनुक्रमको पदसङ्ख्या बढाउँदै जाँदा उक्त पदको मान कुन वास्तविक सङ्ख्याको नजिक जान्छ ? तलको तालिका पूरा गरेर वा लेखाचित्र हेरेर अनुमान गर्नुहोस् ।

पदसङ्ख्या (n)	अनुक्रममा उक्त पदको मान $\{f(n)\}$
पहिलो पद (n = 1)	$f(1) = 1$
दोस्रो पद (n = 2)	$f(2) = \frac{1}{2} = 0.5$
तेस्रो पद (n = 3)	$f(3) = \frac{1}{3} = \cdots$
चौथो पद (n = 4)	$f(4) = \frac{1}{4} = \cdots$
पाचौँ पद (n = 5)	$f(5) = \frac{1}{5} = \cdots$
दशौँ पद (n = 10)	$f(10) = \frac{1}{10} = \cdots$
सय पद (n = 100)	$f(100) = \frac{1}{100} = \cdots$
हजार पद (n = 1000)	$f(1000) = \frac{1}{1000} = \cdots$
दशहजार पद (n = 10000)	$f(10000) = \frac{1}{10000} = \cdots$
....	....
∞ को नजिक	.... को नजिक

(n, f(n)) को क्रमजोडा बनाएर लेखाचित्रबाट हेर्दा,



अनुक्रमको पदसङ्ख्या बढाउँदै लगभग अनन्त (infinite) को नजिक लैजाने हो भने उक्त अनुक्रमको पदको मान 0 को धेरै नजिक जान्छ । अर्थात् जब n को मान ∞ को नजिक राखिन्छ तब $f(n)$ को मान 0 को धेरै नजिक जान्छ तर 0 भन्दा बढी भने हुँदैन । यस्तो अवस्थामा अनुक्रमको सीमान्तमान 0 हुन्छ ।

$n \to \infty$ हुँदा $f(n) \to 0$ अर्थात् $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = 0$

यसरी पदसङ्ख्या (n) लाई ∞ को नजिक राख्दा अनुक्रमको मान जुन वास्तविक सङ्ख्याको नजिक पुग्छ, सोही वास्तविक सङ्ख्या नै उक्त अनुक्रमको सीमान्तमान हुन्छ ।

उदाहरण 1

अनुक्रम $f(n) = \frac{1}{2^n}$ को सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

हामीलाई थाहा छ, पदसङ्ख्या (n) को मान अनन्त (∞) को नजिक राख्दा $f(n)$ को मान जुन सङ्ख्याको नजिक जान्छ सोही सङ्ख्या दिइएको अनुक्रमको सीमान्तमान हो । n को मान राख्दा,

पदसङ्ख्या (n)	अनुक्रममा उक्त पदको मान, $f(n)$
पहिलो पद (n = 1)	$f(1) = 1$
दोस्रो पद (n = 2)	$f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$
तेस्रो पद (n = 3)	$f(3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$
चौथो पद (n = 4)	$f(4) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0.0625$
पाचौँ पद (n = 5)	$f(5) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.03125$
दशौँ पद (n = 10)	$f(10) = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.00097$
....	....
∞ को नजिक	.... को नजिक

माथिको तालिकाअनुसार, n को मान ∞ को धेरै नजिक हुँदा, $f(n)$ को मान 0 को धेरै नजिक जान्छ, त्यसैले दिइएको अनुक्रमको सीमान्तमान 0 हुन्छ । सङ्केतमा, $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

दिइएको अनुक्रमका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

3.1, 3.01, 3.001, 3.0001, 3.00001, ...

(क) दिइएको अनुक्रमको आठौँ पदको मान कति हुन्छ ?

(ख) पदसङ्ख्याको मान बढाउँदै जाँदा अनुक्रममा उक्त पदको मान कुन सङ्ख्याको नजिक जान्छ होला ? अनुमान गर्नुहोस् ।

(ग) दिइएको अनुक्रमको सीमान्तमान कति हुन्छ ?

समाधान

(क)

पदसङ्ख्या (n)	पहिलो पद (n=1)	दोस्रो पद (n=2)	तेस्रो पद (n=3)	चौथो पद (n=4)	पाँचौ पद (n=5)	छैटौँ पद (n=6)	सातौँ पद (n=7)	आठौँ पद (n=8)
अनुक्रमको मान (f(n))	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001	3.000001	3.0000001	3.00000001

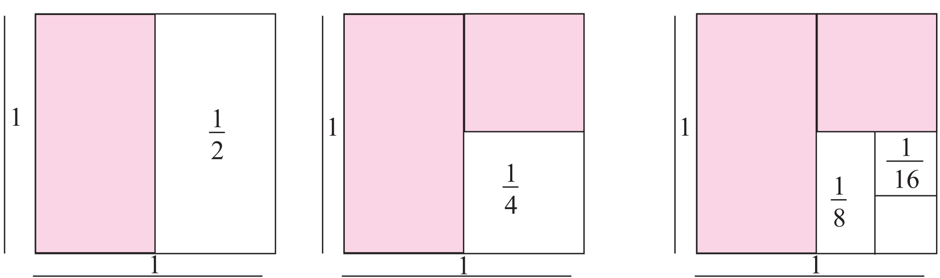
माथिको तालिकाअनुसार अनुक्रमको आठौँ पदको मान 3.00000001 हुन्छ ।

(ख) पदसङ्ख्या (n) को मान बढाउँदै अनन्त (infinity) को नजिक जाने हो भने अनुक्रमको मान 3 को एकदमै नजिक जान्छ अर्थात् 3 को सीमा पार गर्दैन ।

(ग) दिइएको अनुक्रमको सीमान्तमान 3 हुन्छ ।

क्रियाकलाप 3

दिइएको चित्रमा एक एकाइ वर्ग दिइएको छ जसको क्षेत्रफल 1 वर्ग एकाइ हुन्छ । वर्गलाइ आधा गर्दै बराबर दुई आयतमा बाडेर प्रत्येक टुक्राहरूको क्षेत्रफल र तिनीहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।



प्रक्रिया : कक्षाका प्रत्येक विद्यार्थीले माथिको समस्या समाधान गरी शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

हामीले वर्गलाई बराबर क्षेत्रफल हुने गरी दुईओटा आयतहरूमा बाँड्ने हो भने प्रत्येक आयतको क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$ वर्ग एकाइ हुन्छ । दुईमध्ये एउटालाई फेरि आधा पार्ने हो भने एउटा टुक्रा आयतको क्षेत्रफल $\frac{1}{4}$ वर्ग एकाइ हुन्छ । फेरि अर्को टुक्रा आयतलाई आधा बनाउँदा एउटा आयतको क्षेत्रफल $\frac{1}{8}$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

एवम् रितले आधा बनाउँदै जाने हो भने के सबै टुक्रा आयतको क्षेत्रफल जोड्दा पूरा वर्गको क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ ?

अर्थात्, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = 1$ हुन्छ ?

माथिका प्रत्येक टुक्रा आयतको क्षेत्रफललाई असीमित श्रेणी (Infinite Series) का रूपमा निम्नअनुसार लेख्न सकिन्छ :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

अब माथिको श्रेणीको योगफल पत्ता लगाउनका लागि सबैभन्दा पहिले, उक्त श्रेणीको आंशिक योगफल (Partial Sum) पत्ता लगाई उक्त आंशिक योगफल (Partial Sum) हरूको एउटा अनुक्रम लिई उक्त अनुक्रमको सीमान्तमान पत्ता लगाउँछौँ र आंशिक योगफलहरूको अनुक्रमको सीमान्तमान नै दिइएको असीमित श्रेणीको योगफल हुन्छ ।

दिइएको श्रेणीको आंशिक योगफल (Partial Sum) पत्ता लगाउँदा,

आंशिक योगफलको अनुक्रमको पदसङ्ख्या (n)	**व्याख्या**	**योगफल (s_n)**
पहिलो आंशिक योगफल (s_1)	श्रेणीको पहिलो पद	$\frac{1}{2} = 0.5$
दोस्रो आंशिक योगफल (s_2)	श्रेणीको पहिलो र दोस्रो पदहरूको योगफल	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75$
तेस्रो आंशिक योगफल (s_3)	श्रेणीको पहिलो, दोस्रो र तेस्रो पदहरूको योगफल	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0.875$
चौथो आंशिक योगफल (s_4)	श्रेणीको पहिलो, दोस्रो तेस्रो र चौथो पदहरूको योगफल	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=0.9375$
पाँचौँ आंशिक योगफल (s_5)	श्रेणीको पहिलो, दोस्रो तेस्रो, चौथो र पाँचौँ पदहरूको योगफल	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=0.96875$
... ...	... ...	... ...
n को मान अनन्त को नजिक बनाउँदा (n→ ∞)		योगफल(s_n) को मान कसको नजिक पुग्छ होला ($s_n \to ?$) अनुमान गर्नुहोस् ।

आंशिक योगफलको अनुक्रम निम्नानुसार हुन्छ,

अनुक्रम $= s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, \ldots = 0.5, 0.75, 0.875, 0.9375, 0.96875, \ldots$

माथिको आंशिक योगफलको अनुक्रमलाई अवलोकन गर्दा, उक्त अनुक्रमको सीमान्तमान 1 हुन्छ । त्यसैले दिइएको असीमित श्रेणीको योगफल 1 हुन्छ ।

कुनै पनि असीमित श्रेणीको योगफल पत्ता लगाउन पनि सीमान्तमानको आवश्यकता पर्छ । असीमित श्रेणीको योगफल भनेको उक्त श्रेणीको आंशिक योगफल (Partial Sum) बाट बन्ने अनुक्रमको सीमान्तमान हो । यदि $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ असीमित श्रेणी भए यसको आंशिक योगफललाई निम्नअनुसार परिभाषित गर्न सकिन्छ

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

....

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$

....

आंशिक योगफल (Partial Sum) बाट बन्ने अनुक्रम, $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, \ldots$

यहि आंशिक योगफलहरूको अनुक्रमको सीमान्तमान नै दिइएको श्रेणीको योगफल हो ।

उदाहरण 1

तलको असीमित श्रेणीको पहिलो पाँचओटा आंशिक योगफल (Partial Sum) पत्ता लगाउनुहोस् ।

$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

समाधान

माथिको श्रेणीको आंशिक पहिलो पाँचओटा आंशिक योगफल यसप्रकार छन्

पहिलो, $(s_1) = 4$

दोस्रो, $(s_2) = 4 + 2 = 6$

तेस्रो, $(s_3) = 4 + 2 + 1 = 7$

चौथो, $(s_4) = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = 7.5$

पाँचौं, $(s_5) = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 7.75$

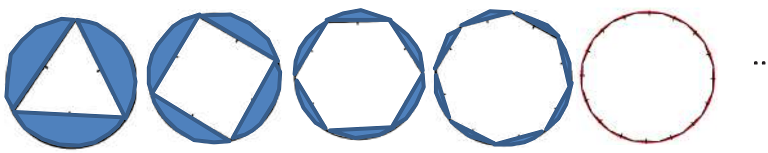
आंशिक योगफलको अनुक्रम,

$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 = 4, 6, 7, 7.5, 7.75, \ldots$

विचारणीय प्रश्न : के सबै प्रकारका असिमित श्रेणीहरूको योगफल पत्ता लगाउन सकिन्छ ? छलफल गरी निश्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

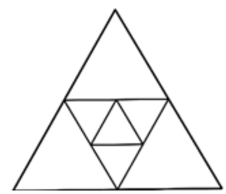
अभ्यास 6.2

1. तलको चित्र हेरी सोधिएको प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



नियमित बहुभुजहरूको भुजाको सङ्ख्या असीमित गर्ने हो भने छाया पारिएको भागको क्षेत्रफलको सीमान्तमान कति हुन्छ ? अनुमान गर्नुहोस् ।

2. दायाँको चित्रमा समबाहु त्रिभुजहरूको अनुक्रम दिइएको छ । अगिल्लो समबाहु त्रिभुजको मध्यविन्दुहरू जोड्दै क्रमशः अन्य समबाहु त्रिभुजहरू निर्माण गरिएको छ ।



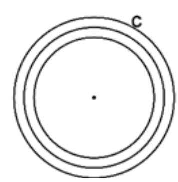
(क) यस्ता कतिओटा समबाहु त्रिभुजहरू निर्माण गर्न सकिन्छ ?

(ख) यसैगरी समबाहु त्रिभुजहरू असीमित बनाउँदा, समबाहु त्रिभुजहरूको एउटा भुजाको लम्बाइको सीमान्तमान कति हुन्छ होला ? अनुमान गर्नुहोस् ।

(ग) यसैगरी समबाहु त्रिभुजहरू असीमित बनाउँदा, समबाहु त्रिभुजहरूको परिमितिहरूको सीमान्तमान कति हुन्छ ? अनुमान गर्नुहोस् ।

(घ) यसैगरी समबाहु त्रिभुजहरू असीमित बनाउँदा, समबाहु त्रिभुजहरूको क्षेत्रफलहरूको सीमान्तमान कति हुन्छ ? अनुमान गर्नुहोस् ।

3. दायाँको चित्रमा एउटा वृत्त C भित्र समकेन्द्रित हुनेगरी अन्य वृत्तहरू खिचिएको छ ।



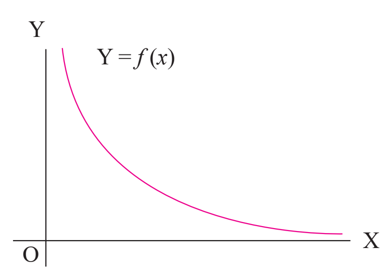
(क) यस्तै अन्य दुईओटा चित्रहरू खिच्नुहोस् ।

(ख) यस्ता कतिओटा एककेन्द्रित वृत्तहरू खिच्न सकिन्छ होला ?

(ग) यसैगरी वृत्तहरू असीमित बनाउँदा, उक्त वृत्तहरूको परिधिको सीमान्तमान अनुमान गर्नुहोस् ।

(घ) यसैगरी वृत्तहरू असीमित बनाउँदा, उक्त वृत्तहरूको क्षेत्रफलहरूको सीमान्तमान कति हुन्छ ? अनुमान गर्नुहोस् ।

4. दायाँको चित्रमा फलन $y = f(x)$ को लेखाचित्र प्रस्तुत गरिएको छ । x को मान बढाउँदै जाँदा y कोमा के कसरी फरक परेको छ । x को मान कति हुँदा y को मान 0 को बराबर हुन्छ ?



5. यदि n कुनै प्राकृतिक सङ्ख्या भए तल दिइएका अनुक्रमहरूको सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $f(n) = \frac{1}{10^n}$ (ख) $f(n) = \frac{n}{n^2+2}$ (ग) $f(n) = \frac{1}{n+2}$

(घ) $f(n) = \frac{1}{2n}$ (ङ) $f(n) = n^2$ (च) $f(n) = 2n$

6. तलका अनुक्रमहरूको सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ...

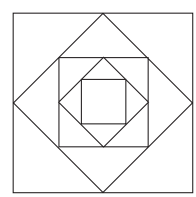
(ख) 7.1, 7.01, 7.001, 7.0001, ...

(ग) 2.9, 2.99, 2.999, 2.9999, ...

7. वृत्तभित्र बनाइएका बहुभुजका ढाँचाहरू कहाँ कहाँ देख्नुभएको छ ? सङ्कलन गर्नुहोस् । ती ढाचाँहरूमा के कस्ता आकृतिहरू छन् ? ती आकृतिहरूको सीमान्त चित्र के होला ? लेख्नुहोस् ।

8. 10 से.मि. लम्बाइ भएको एउटा रेखाखण्ड AB लिनुहोस् । उक्त रेखाखण्डलाइ आधा गर्नुहोस् र आधा भागको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् । फेरि आधा भागको पनि आधा गर्नुहोस् र लम्बाइ निकाल्नुहोस् । यसरी एवम् रितले आधा गर्दै जानुहोस् र गणना गरिएको लम्बाइहरूको एउटा अनुक्रम बनाउनुहोस् । उक्त अनुक्रमको सीमान्तमान कति हुन्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. चित्रमा बाहिरी वर्गको क्षेत्रफल 16 वर्ग एकाइ छ । बाहिरी वर्गका मध्य विन्दुहरू जोड्दा भित्री वर्ग बन्ने अनुक्रम देखाइएको छ । कतिओटा वर्गसम्म भित्री वर्गहरू बनाउन सकिन्छ होला ?



(क) प्रत्येक वर्गको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यसरी बन्ने वर्गको क्षेत्रफलको अनुक्रम लेख्नुहोस् । उक्त अनुक्रमको सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यसरी बन्ने प्रत्येक वर्गको परिमितिको अनुक्रम लेख्नुहोस् । उक्त परिमितिको सीमान्तमान कति होला, लेख्नुहोस् ।

(घ) प्रत्येक वर्गको क्षेत्रफलहरूको योगफल निकाल्नुहोस् ।

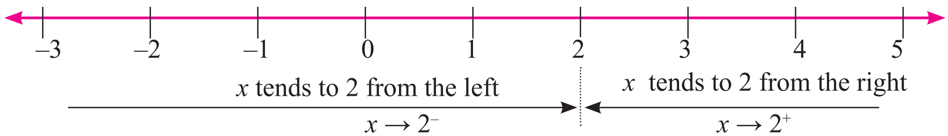
उत्तर

1. 0 2. (क) असीमित (ख) शून्य (ग) शून्य (घ) शून्य 3. (ख) असीमित (ग) शून्य (घ) शून्य 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् 5. (क) 0 (ख) 0 (ग) 0 (घ) 0 (ङ) ∞ (च) ∞ 6. (क) 0 (ख) 7 (ग) 3 7 – 9 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6.3 बीजीय फलनको सीमान्तमान (Limit of Algebraic Function)

$x \to a$ को अर्थ

बीजीय फलनको सीमान्तमान थाहा पाउनका लागि हामीले $x \to a$ को अर्थ बुझ्न अत्यन्त जरुरी हुन्छ । त्यसका लागि हामीले वास्तविक सङ्ख्यारेखा बुझ्नपर्ने हुन्छ । वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह र सङ्ख्यारेखाका बारेमा हामीले अगिल्ला कक्षाहरूमा पनि अध्ययन गरिसकेका छौँ । एउटा उदाहरण लिऔं, $x \to 2$ भनेको x को मान 2 को धेरै नजिक रहेका वास्तविक सङ्ख्याहरू भन्ने हुन्छ तर ठ्याक्कै 2 भने होइन । यसलाई वास्तविक सङ्ख्यारेखामा हेर्दा



यहाँ, x को मान 2 को धेरै नजिकको लिँदा 2 को दायाँ र बायाँबाट लिनुपर्छ । x को मान 2 को बायाँतिरबाट एकदमै नजिकको लिँदा,

$x = 1.5, 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, 1.\ 99999, \ldots$

सङ्केतमा, $x \to 2^- = 1.5, 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, 1.\ 99999, \ldots$

x को मान 2 को दायाँतिरबाट लिँदा,

$x = 2.5, 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, 2.00001, \ldots$

सङ्केतमा, $x \to 2^+ = 2.5, 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, 2.00001, \ldots$

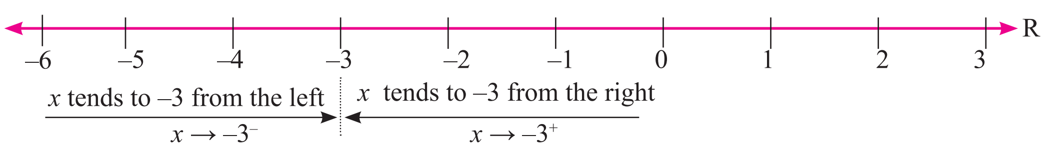
$\therefore x \to 2$ भन्नाले x को मान 2 को दायाँ र बायाँबाट एकदमै नजिकको भन्ने हुन्छ तर ठ्याक्कै 2 भने हुन्न । $x \to 2$ ले $x \to 2^-$ र $x \to 2^+$ दुवैलाई जनाउँछ ।

$x \to a$ भन्नाले x को मान कुनै वास्तविक सङ्ख्या a को एकदमै नजिकको भन्ने हुन्छ तर x को मान ठ्याक्कै a भने हुँदैन । यसरी a को एकदमै नजिकको मान लिँदा a को बायाँ र दायाँतिरबाट लिनुपर्छ । a को बायाँतिरको एकदमै नजिकको वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई $x \to a^-$ र a को दायाँतिरको एकदमै नजिकको वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई $x \to a^+$ ले जनाइन्छ । $x \to a$ ले $x \to a^-$ र $x \to a^+$ दुबैलाई जनाउँछ ।

उदाहरण 1

$x \to -3$ को अर्थ लेख्नुहोस् ।

समाधान



$x \to -3$ भन्नाले x को मान -3 को दायाँ र बायाँ दुबैतिरबाट धेरै नजिकको बास्तविक सङ्ख्याहरू भन्ने बुझिन्छ । दायाँतिरबाट धेरै नजिकको मानहरूलाई $x \to -3^+$ ले जनाइन्छ र $x \to -3^+ = -2.9, -2.99, -.999, -2.9999, \ldots$ हुन्छन । बायाँतिरबाट धेरै नजिकको मानहरूलाई $x \to -3^-$ ले जनाइन्छ र $x \to -3^- = -3.01, -3.001, -3.0001, -3.00001, \ldots$ हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 1

तलको तथ्यहरु अध्ययन गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

पहिलो, हामीलाई थाहा छ कि कुनै सङ्ख्यालाई सोहि सङ्ख्याले भाग गर्दा त्यसको भागफल 1 हुन्छ

जस्तै : $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{1}{1} = 1$ भए $\frac{0}{0} = 1$ हुनुपर्छ ।

दोस्रो, 0 लाई कुनै पनि सङ्ख्याले भाग गर्दा भागफल 0 नै हुन्छ ।

जस्तै : $\frac{0}{3} = 0$, $\frac{0}{2} = 0$, $\frac{0}{1} = 0$

त्यसो हो भने, $\frac{0}{0} = 0$ हुनुपर्छ ।

$4 + 5 = 5 + 4$

$4 - 4 = 5 - 5$

$\frac{4-4}{5-5} = \frac{5-5}{5-5}$ (दुबैतिर 5 – 5 ले भाग गरेको)

$\frac{0}{0} = 1$

माथिको दुइवटा तथ्यबाट, $\frac{0}{0}$ को मान कुनलाई लिने ? के $\frac{0}{0}$ को मान निश्चित गर्न सकिन्छ ?

तेस्रो, भाज्यताको सिद्धान्त (Division Algorithm) अनुसार,

$\frac{a}{b} = c$ भए $a = b \times c$ हुन्छ जसमा c को मान एकमात्र हुन्छ, त्यस्तै यदि $\frac{0}{0} = m$ भए, $0 = 0 \times m$ हुन्छ, अब m को मान कति राख्दा $0 = 0 \times m$ सत्य हुन्छ ?

$0 = 0 \times m$ मा को मान जुनसुकै सङ्ख्या राख्दा पनि दिइएको समीकरण मान्य हुन्छ ।

जस्तै

$m = 1$, $0 \times 1 = 0$, सत्य

$m = 2$, $0 \times 2 = 0$, सत्य

$m = 3$, $0 \times 3 = 0$, सत्य

... ...

माथिको उदाहरणबाट यो निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ कि, m को मान जुनसुकै वास्तविक सङ्ख्या हुन सक्छ, m को मान अनिश्चित हुने भएकाले $\frac{0}{0}$ को मान पनि यति नै हुन्छ भनी निश्चित गर्न सकिँदैन । त्यसैले $\frac{0}{0}$ को मान निश्चित गर्न नसकिने हुनाले यसलाई Indeterminate भनिन्छ ।

$\frac{0}{0}$ को स्वरूपलाई अनिश्चयको स्वरूप (Indeterminate Forms) भनिन्छ जसको मान यकिनका साथ यही नै हो भनेर भन्न नसकिने भएकाले यस्तो स्वरूपलाई indeterminate forms भनिएको हो । अन्य indeterminate forms हरूमा $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^0, $\infty - \infty$, 1^∞, $0 \times \infty$ पर्छन् ।

उदाहरण 2

फलन $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ मा $x = 0, 1, 2$ र 3 राख्नुहोस् । क्षेत्रको कुन विन्दुमा फलन अनिश्चय स्वरूप (Indeterminate form) मा छ ? खोजी गर्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको फलन, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x-2}$

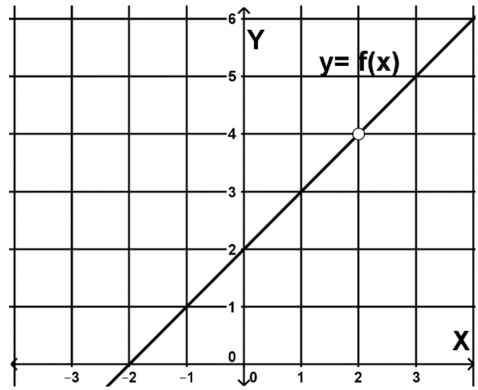
$x = 0$ हुँदा, $f(0) = \frac{0^2 - 4}{0-2} = \frac{-4}{-2} = 2$

$x = 1$ हुँदा, $f(1) = \frac{1^2 - 4}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3$

$x = 2$ हुँदा, $f(2) = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} =$ indeterminate

$x = 3$ हुँदा, $f(3) = \frac{3^2 - 4}{3-2} = \frac{9-4}{1} = 5$

2 हुँदा फलन $f(x)$ अनिश्चय स्वरूप (Indeterminate form) मा छ ।



उदाहरण 3

माथिको क्रियाकलापका आधारमा फलन $f(x) = 5x - 3$ को लागि तलको तालिका भर्नुहोस्

(क)

x	–2.1	–2.01	–2.001	–2.0001	–2.00001	–2.000001
$f(x)$	...	...	...	...	...	

(ख)

x	–1.9	–1.99	–1.999	–1.9999	–1.99999	–1.999999
$f(x)$	...	...	...	...	...	...

समाधान

(क)

x	–2.1	–2.01	–2.001	–2.0001	–2.00001	–2.000001
$f(x)$	–13.5	–13.05	–13.005	–13.0005	–13.00005	–13.000005

(ख)

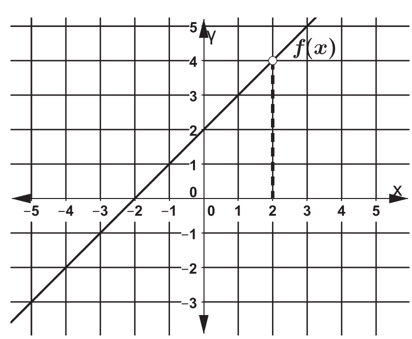
x	–1.9	–1.99	–1.999	–1.9999	–1.99999	–1.999999
f(x)	–12.5	–12.95	–12.995	–12.9995	–12.99995	–12.999995

उदाहरण 4

एउटा फलन $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ दिइएको छ । जसको लेखाचित्र दायाँ दिइएको छ । तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) फलनमा $x = 2$ राख्दा $f(x)$ को मान कति हुन्छ ?

(ख) तलको तालिका अध्ययन गरी जब x को मान 2 को नजिक हुन्छ उक्त समयमा फलनको मान वा व्यवहारलाई अनुमान गर्नुहोस् अर्थात् $f(x)$ को मान कुन वास्तविक सङ्ख्याको नजिक गइरहेको छ ? अनुमान गर्नुहोस् ।



(क) x को मान 2 को बायाँतिरबाट एकदमै नजिकको राख्दा $(x \to 2^-)$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	…	2
$f(x)$	3.9	3.99	3.999	3.9999	…	?

(ख) x को मान 2 को दायाँतिरबाट एकदमै नजिकको राख्दा $(x \to 2^+)$

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	…	2
$f(x)$	4.1	4.01	4.001	4.0001	…	?

(ग) फलन $f(x)$ को बायाँ सीमान्तमान कति होला ? अनुमान गर्नुहोस् र सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

(घ) फलन $f(x)$ को दायाँ सीमान्तमान कति होला ? अनुमान गर्नुहोस् र सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

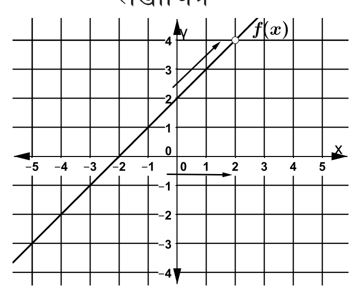
(ङ) फलन $f(x)$ को सीमान्तमान कति होला ? अनुमान गर्नुहोस् र सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

समाधान

(क) $x = 2$ हुँदा, $f(2) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$ = indeterminate form जसलाई माथिको लेखाचित्रबाट प्रष्ट हुन सकिन्छ ।

(ख) वास्तवमा, $x = 2$ हुँदा फलन अनिश्चय स्वरूपमा भएकाले x को मान 2 को नजिकमा फलनको कस्तो व्यवहार हुन्छ भनी थाहा पाउन आवश्यक हुन्छ । त्यसैले तालिका i) मा x को मान 2 को बायाँतिरबाट धेरै नजिकको राख्दा फलनको मान 4 को धेरै नजिक गइरहेको देखिन्छ । त्यस्तै तालिका ii) मा पनि x को मान 2 को दायाँतिरबाट धेरै नजिकको राख्दा फलनको मान 4 को धेरै नजिक गइरहेको देखिन्छ ।

लेखाचित्र



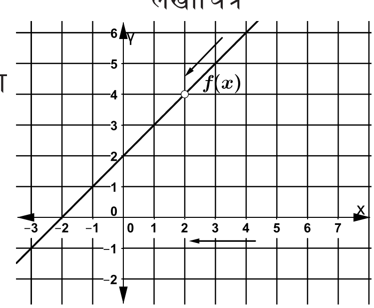
(ग) x को मान 2 को बायाँतिरबाट एकदमै नजिकको राख्दा फलनको मान 4 को एकदमै नजिक गइरहेको र 4 भन्दा बढी नहुने हुनाले, फलनको बायाँ सीमान्तमान 4 हुन्छ ।

यसलाई सङ्केतमा लेख्दा,

$x \to 2^-$ हुँदा, $f(x) \to 4$ हुन्छ अर्थात्

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$ लेखिन्छ ।

लेखाचित्र



(घ) x को मान 2 को दायाँतिरबाट एकदमै नजिकको राख्दा फलनको मान 4 को एकदमै नजिक गइरहेको र 4 भन्दा बढी नहुने हुनाले, फलनको दायाँ सीमान्तमान 4 हुन्छ ।

यसलाई सङ्केतमा लेख्दा,

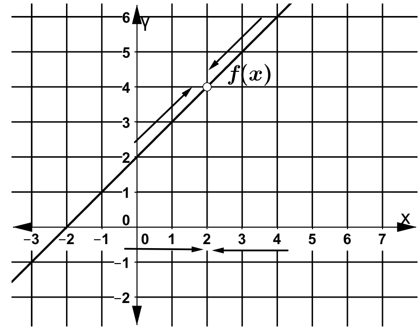
$x \to 2^+$ हुँदा, $f(x) \to 4$ हुन्छ, अर्थात्

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$ लेखिन्छ ।

(ङ) फलनको दायाँ र बायाँ सीमान्तमान बराबर आएको र 4 भएकाले, x को मान 2 को धेरै नजिक हुँदा फलन $f(x)$ को मान 4 को धेरै नजिक हुन्छ र 4 भन्दा बढी हुँदैन भन्न सकिन्छ । त्यसैले x को मान 2 को धेरै नजिक हुँदा फलन $f(x)$ को सीमान्तमान 4 हुन्छ ।

यसलाई सङ्केतमा लेख्दा, $x \to 2$ हुँदा, $f(x) \to 4$ हुन्छ, अर्थात् $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

लेखाचित्र



यहाँ 2 लाई a र 4 लाई l मान्दा, फलन $f(x)$ को सीमान्तमान $l = 4$ हुनका लागि x को मान कुनै वास्तविक सङ्ख्या a = 2 को धेरै नजिक (दायाँ र बायाँ दुबैतिरबाट) पुग्दा बीजीय फलन $f(x)$ को मान वास्तवविक सङ्ख्या $l = 4$ को धेरै नजिक गएको हुनुपर्छ ।

फलनको सीमान्तमान भनेको फलनको व्यवहार (Behaviour) हो अर्थात् x को मान कुनै वास्तविक सङ्ख्या a को एकदमै नजिक (दायाँ र बायाँ दुबैतिरबाट) पुग्दा फलनले व्यवहार कस्तो हुन्छ भनी हेर्नु हो । तसर्थ, x को मान कुनै वास्तविक सङ्ख्या a को एकदमै नजिक (दायाँ र बायाँ दुबैतिरबाट) पुग्दा बीजीय फलन $f(x)$ को मान वास्तवविक सङ्ख्या l को नजिक गएमा, l लाई $f(x)$ को सीमान्तमान भनिन्छ ।

सङ्केतमा, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$ भएमा $\lim_{x \to a} f(x) = l$

अर्थात्, दायाँ र बायाँ सीमान्तमान बराबर आएमा मात्र फलनको सीमान्तमान प्राप्त गर्न सकिन्छ वा exist गर्छ भनिन्छ । यदि दायाँ र बायाँ सीमान्तमान बराबर नभएमा फलनको सीमान्तमान प्राप्त गर्न सकिँदैन वा doesnot exist भनिन्छ ।

उदाहरण 5

$x \to -1$ हुँदा फलन $f(x) = 4x - 1$ को सीमान्तमान खोजी गर्नुहोस् ।

समाधान

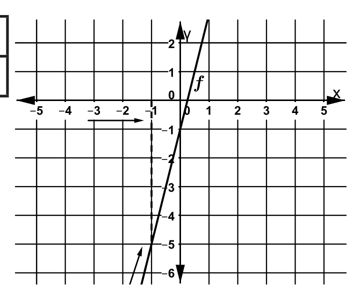
(क) बायाँ सीमान्तमान

x को मान -1 को बायाँतिरबाट राखेर तालिका निर्माण गर्दा,

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	...	-1
$f(x)$	-5.4	-5.04	-5.004	-5.0004	-5.00004	...	-5

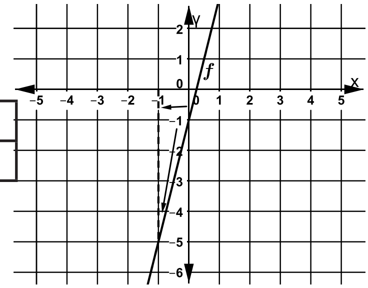
माथिको तालिकाबाट, x को मान -1 को बायाँबाट एकदमै नजिक हुँदा फलन $f(x)$ को मान -5 को एकदमै नजिक गएको छ । तसर्थ फलनको बायाँ सीमान्तमान -5 हुन्छ ।

लेखाचित्र



सङ्केतमा, $x \to -1^-$ हुँदा, $f(x) \to -5$ हुन्छ । अर्थात् $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -5$

लेखाचित्र



(ख) दायाँ सीमान्तमान

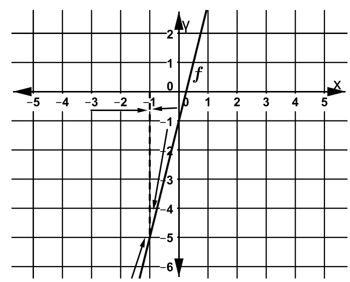
x को मान –1 को दायाँतिरबाट राखेर तालिका निर्माण गर्दा,

x	–0.9	–0.99	–0.999	–0.99999	–0.99999	…	–1
$f(x)$	–4.6	–4.96	–4.996	–4.9996	–4.99996	…	–5

तालिकाबाट, x को मान –1 को दायाँबाट एकदमै नजिक हुँदा फलन $f(x)$ को मान –5 को एकदमै नजिक गएको छ । तसर्थ फलनको दायाँ सीमान्तमान –5 हुन्छ ।

सङ्केतमा, $x \to -1^+$ हुँदा, $f(x) \to -5$ हुन्छ अर्थात् $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -5$

(ग) फलनको सीमान्तमान

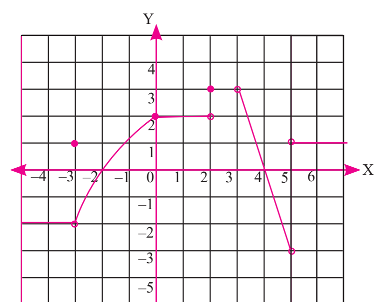


यसरी दायाँ र बायाँ सीमान्तमान बराबर भएकाले, x को मान –1 को नजिक हुँदा फलनको सीमान्तमान –5 हुन्छ ।

यसलाई सङ्केतमा लेख्दा, $x \to -1$ हुँदा, $f(x) \to -5$ हुन्छ

अर्थात्, $\lim_{x \to -1} f(x) = -5$

उदाहरण 6

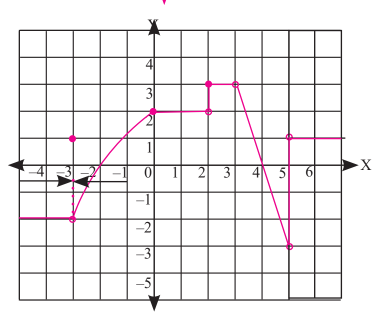


दायाँ $y = f(x)$ को लेखाचित्र दिइएको छ । उक्त लेखाचित्र हेरी तलको विन्दुमा सीमान्तमान मान्य (exist) गर्छ या गर्दैन कारणसहित लेख्नुहोस ।

(क) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (ख) $\lim_{x \to 5} f(x)$

(ग) $\lim_{x \to 2} f(x)$

समाधान



(क) दिइएको लेखाचित्रमा x को मान दायाँबाट –3 को धेरै नजिक पुग्दा, फलनको मान –2 को धेरै नजिक गएको छ ।

अर्थात् $x \to -3^+$ हुँदा $f(x) \to -2$ छ । तसर्थ, फलनको दायाँ सीमान्तमान –2 हुन्छ ।

त्यसैगरी, x को मान बायाँबाट –3 को धेरै नजिक पुग्दा, फलनको मान –2 को धेरै नजिक गएको छ ।

अर्थात् $x \to -3^-$ हुँदा $f(x) \to -2$ छ । तसर्थ, फलनको बायाँ सीमान्तमान –2 हुन्छ ।

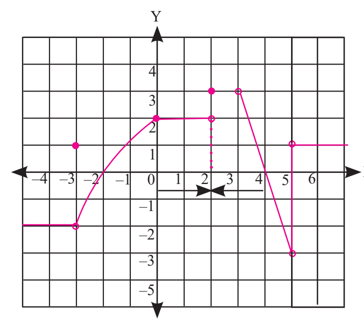
यसरी फलनको दायाँ र बायाँ सीमान्तमान बराबर भएकाले फलनको सीमान्तमान –2 हुन्छ । अर्थात् $\lim_{x \to -3} f(x) = -2$

(ख) दिइएको लेखाचित्रमा x को मान दायाँबाट 5 को धेरै नजिक पुग्दा, फलनको मान 1 को धेरै नजिक गएको छ । अर्थात् $x \to 5^+$ हुँदा $f(x) \to 1$ छ । तसर्थ, फलनको दायाँ सीमान्तमान 1 हुन्छ ।

त्यसैगरी, x को मान बायाँबाट 5 को धेरै नजिक पुग्दा, फलनको मान –3 को धेरै नजिक गएको छ । अर्थात् $x \to 5^-$ हुँदा $f(x) \to -3$ छ । तसर्थ, फलनको बायाँ सीमान्तमान –3 हुन्छ ।

तसर्थ, फलनको दायाँ र बायाँ सीमान्तमान बराबर नभएकाले फलनको सीमान्तमान यकिन गर्न सकिँदैन (limit deos not exist) । अर्थात्, $\lim_{x \to 5} f(x)$ = does not exist

(ग) दिइएको लेखाचित्रमा x को मान दायाँबाट 2 को धेरै नजिक पुग्दा, फलनको मान यकिन गर्न सकिँदैन त्यसैले फलनको दायाँ सीमान्तमान यकिन गर्न सकिँदैन अर्थात् असीमित (∞) हुन्छ ।



त्यसैगरी, x को मान बायाँबाट जब 2 को धेरै नजिक पुग्दा, फलनको मान 2 को धेरै नजिक गएको छ ।

अर्थात् $x \to 2^-$ हुँदा $f(x) \to 2$ छ । तसर्थ, फलनको बायाँ सीमान्तमान 2 हुन्छ ।

यसरी फलनको दायाँ र बायाँ सीमान्तमान बराबर नभएकाले फलनको सीमान्तमान यकिन गर्न सकिँदैन (limit deos not exist)। अर्थात् $\lim_{x \to 2} f(x)$ = does not exist

अभ्यास 6.3

1. (क) $x \to -3$ को अर्थ लेख्नुहोस् । (ख) $x \to 5^-$ को अर्थ लेख्नुहोस् ।

   (ग) $\lim_{x \to 2} f(x) = -5$ को अर्थ लेख्नुहोस् । (घ) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1$ को अर्थ लेख्नुहोस् ।

   (ङ) $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -4$ को अर्थ लेख्नुहोस् ।

   (च) x को मान m को एकदमै नजिक (दायाँ र बायाँ दुबैतिरबाट) हुँदा $f(x)$ को सीमान्तमानलाई जनाउने सङ्केत तलको मध्य कुन सही छ ?

   (i) $\lim_{x \to m^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to m^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x \to -m^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to m} f(x)$

2. फलन $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ दिइएको छ ।

   (क) $x = 0, 1, 4$ र 9 राखी $f(x)$ को मान निकाल्नुहोस् ।

(ख) x को कुन मानमा फलन अनिश्चय स्वरूप (Indeterminate form) मा छ ? लेख्नुहोस् ।

3. फलन $f(x)= \frac{x^2-16}{x-4}$ दिइएको छ ।

(क) $x = 0, 1, 3$ र 4 राखी $f(x)$ को मान निकाल्नुहोस् ।

(ख) x को कुन मानमा फलन अनिश्चय स्वरूप (Indeterminate form) मा छ ? लेख्नुहोस् ।

4. तलको तालिका पूरा गर्नुहोस् र उक्त तालिकाका आधारमा दिइएको फलनको सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\lim\limits_{x \to 3} (x+2)$

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3
$x+2$					...	?

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	...	3
$x+2$					...	?

(ख) $\lim\limits_{x \to -2} (2x-3)$

x	–2.1	–2.01	–2.001	–2.0001	...	–2
$2x-3$					...	?

x	–1.9	–1.99	–1.999	–1.9999	...	–2
$2x-3$					‘	?

(ग) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2+2)$

x	3.9	3.99	3.999	3.9999	...	4
x^2+2					...	?

x	4.1	4.01	4.001	4.0001	...	4
x^2+2					...	?

(घ) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)$

x	–3.1	–3.01	–3.001	–3.0001	...	–3
$\frac{x^2-9}{x+3}$					...	?

x	–2.9	–2.99	–2.999	–2.9999	...	–3
$\frac{x^2-9}{x+3}$					...	?

5. (क) एउटा फलन $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ दिइएको छ ।

   (i) $f(2)$ को मान कति हुन्छ ?

   (ii) $f(1.9), f(1.99), f(1.999), f(1.9999)$ को मान पत्ता लगाई x को मान 2 को धेरै नजिक हुँदा फलनको बायाँ सीमान्तमान कति होला ? सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

   (iii) $f(2.01), f(2.001), f(2.0001), f(2.00001)$ को मान पत्ता लगाई x को मान 2 को धेरै नजिक हुँदा फलनको दायाँ सीमान्तमान कति होला ? सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

   (iv) फलनको सीमान्तमान कति होला ? सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

   (ख) एउटा फलन $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ दिइएको छ ।

   (i) f(3) को मान कति हुन्छ ?

   (ii) $f(2.9)$, f(2.99), $f(2.999), f(2.9999)$ को मान पत्ता लगाई x को मान 3 को धेरै नजिक हुँदा फलनको बायाँ सीमान्तमान कति होला ? सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

   (iii) $f(3.01), f(3.001), f(3.0001), f(3.00001)$ को मान पत्ता लगाई x को मान 3 को धेरै नजिक हुँदा फलनको दायाँ सीमान्तमान कति होला ? सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

   (iv) फलनको सीमान्तमान कति होला ? पत्ता लगाइ सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

6. दिइएको फलनहरूको लागि तालिका निर्माण गरी दिइएको विन्दुमा सीमान्तमानको खोजी गर्नुहोस् :

(क) $\lim_{x \to 2} (3x+1)$ (ख) $\lim_{x \to -3} (2x-3)$ (ग) $\lim_{x \to -2} (4x)$

(घ) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 2)$ (ङ) $\lim_{x \to -2} (3x^2 + 1)$ (च) $\lim_{x \to -2} (2x^2 - 3)$

(छ) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ (ज) $\lim_{x \to -1} \left(\frac{-2}{x+1}\right)$ (झ) $\lim_{x \to -3} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

(ञ) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{x-2}\right)$ (ट) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{2x-6}{x-3}\right)$ (ठ) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{4x-8}\right)$

7. तल दिइएको फलनहरूको लागि तालिका निर्माण गरी दिइएको विन्दुमा सीमान्तमानको खोजी गर्नुहोस् :

(क) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$ (ख) $\lim_{x \to 9} \left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\right)$ (ग) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{x^2-16}{x-4}\right)$

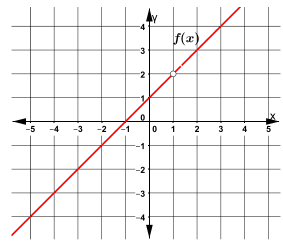
(घ) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x^2+x-6}\right)$ (ङ) $\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^2+6x+6}{x^2-9}\right)$ (च) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

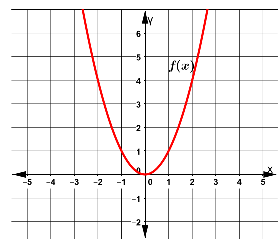
(क) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}\right) = 3$ (ख) $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 1}\right) = \dfrac{5}{2}$ (ग) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x^3 - 8}{x - 2}\right) = 12$

9. लेखाचित्र अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

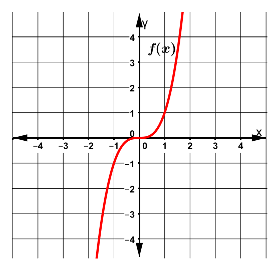
(क) यदि $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ भए,
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ र $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् ।



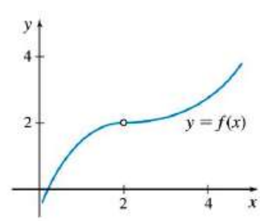
(ख) यदि $f(x) = x^2$ भए
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ र $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् ।



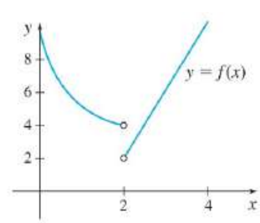
(ग) यदि $f(x) = x^3$ भए
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ र $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् ।



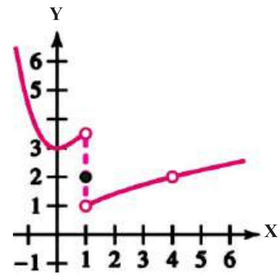
(घ) दायाँको $y = f(x)$ को लेखाचित्रबाट
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ र $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ का सीमान्तमान पत्ता लगाउनुहोस् ।



10. दायाँको लेखाचित्र हेरी विन्दु 2 मा फलन $f(x)$ को सीमान्तमान यकिन गर्न सकिन्छ या सकिँदैन कारणसहित लेख्नुहोस् ।



11. दायाँको लेखाचित्र हेरी विन्दु 1 मा फलन $f(x)$ को सीमान्तमान यकिन गर्न सकिन्छ या सकिँदैन कारणसहित लेख्नुहोस् ।



उत्तर

1. शिक्षकलाइ देखाउनुहोस् । 2. (क) 3, 4, 5, $\frac{0}{0}$ (ख) $x = 9$ 3. (क) 4, 5, 7, $\frac{0}{0}$ (ख) $x = 4$

4. (क) 5 (ख) –7 (ग) 18 (घ) –6

5. क) i) $\frac{0}{0}$ ii) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$ iii) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$ iv) $\lim_{x \to 2} f(x)=4$

ख) i) $\frac{0}{0}$ ii) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6$ iii) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$ iv) $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

6. (क) 7 (ख) –9 (ग) –8 घ) –1 (ङ)13 (च) 5 (छ) $\frac{2}{5}$

ज) does not exist (झ) 4 (ञ) does not exist (ट) 2 (ठ) does not exist

7. (क) 6 (ख) 6 (ग) 8 (घ) $\frac{4}{5}$ (ङ) 0 (च) does not exist

9. (क) 2, 2, 2 (ख) 1, 1, 1 (ग) 1, 1, 1 (घ) 2, 2, 2

10. does not exist 11. does not exist